УКД В 511.5 **к.т.н. Корчагин И.Ф.**

Отображение алгебраических функций
(Вторая исправленная редакция)

Аннотация

В работе раскрывается отображение рациональных алгебраических функций – оригиналов в рациональные алгебраические функции – образы. В качестве отображающих функций рассматриваются те же рациональные, дробно-рациональные и многомерные алгебраические функции.

1.1 Определение, обоснование, назначение отображений.

Отображение функции это её преобразование, обусловленное заменой независимого переменного

Ниже рассматриваются отображения рациональных алгебраических функций комплексного переменного

$$R_\upsilon(Z) = Z^\upsilon - r_I Z^{\upsilon-1} + r_{II} Z^{\upsilon-2} - \ldots + (-1)^\nu r_{III..} \tag{1}$$

на основе использования аппарата «симметричных моментов» (См. в Интернет работу автора “Симметричные алгебраические моменты”)

Представленная функция (1) обладает примечательным и необходимым для отображения свойством – она полностью определена своими нулями, причём, единственным образом, однозначно.

Действительно, если известны нули функции (1) – Z_1, Z_2, .. Z_ν, то известна и сама функция (1), так как она, в силу основной теоремы алгебры, представима произведением известных линейных сомножителей, эту форму функции

$$R_\upsilon(Z) = (Z - Z_1)(Z - Z_2)\ldots(Z - Z_\nu) \tag{2}$$

будем называть её решением.

Пусть, например, отображение заданной функции-оригинала (1) осуществляется тоже рациональной функцией

$$V_\mu = Z^\mu + q_1 Z^{\mu-1} + \ldots + q_\mu \tag{3}$$

Это означает, что каждой точке (Z) плоскости аргумента функции-оригинала (1) ставятся в однозначное соответствие точки плоскости аргумента (V_μ) функции-образа. Причём, наряду с прочими точками, функцией отображения (3) «переносятся» и точки нулей функции-оригинала, соответственно, в точки – $V_{\mu 1}$, $V_{\mu 2}$, … $V_{\mu\nu}$, как мы полагаем, нулей функции-образа.

Опираясь на выше приведённые свойства рациональных алгебраических функций, воссоздаем, функцию-образ по точкам её нулей, а раскрывая определяющее произведение линейных сомножителей, представляем функцию-образ в канонической знакопеременной форме

$$R_{\mu\nu}(V_\mu) = V_\mu^\nu - \left(V_{\mu_1} + V_{\mu_2} + \ldots + V_{\mu_\nu}\right)V_\mu^{\nu-1} + \ldots + (-1)^\nu \left(V_{\mu_1} V_{\mu_2} V_{\mu_\nu}\right) \tag{4}$$

Одним из основных требований предъявляемых к функции (3) отображения является обеспечение возможности построения коэффициентов функции-образа через коэффициенты заданной функции оригинала. Ниже, в качестве функций отображения используются только алгебраические функции, применение которых, как это показано в работе «Симметричные алгебраические моменты», обеспечивает не только сходимость но и единственность такого представления.

Графически, заданная рациональная функция (1) представляет собой ν-линейчатую пространственную фигуру, в каждом сечении которой плоскостями R_ν (Z) = const, в соответствии с основной теоремой алгебры, содержится ν точек проколов, определяющих нули функции (1). Отображением функцией (3) фигура оригинала может быть «перемещена» и «переориентирована» относительно центра отсчёта, если предположить что начала координат пространств оригинала и образа совмещены. Отображением функций (3) фигура оригинала может быть достаточно произвольно деформирована, например, до "превращения" функции-образа в чётно (или нечётно) симметричную или степенную функцию

$$R_{\mu\nu}(V_\mu) = V_\mu^\nu \tag{5}$$

Реализация каждого из требований наложенных на функцию-образ обеспечивается выбором соответствующего значения одного из произвольных коэффициентов (q) функции отображения (3). Коэффициенты (q) функции отображения (3) будем называть поэтому также параметрами отображения. Требования к функции-образу записываются в форме выражений связи между коэффициентами, в частности, в форме равенств коэффициентов константам.

Например, для размещения функции-образа (4) в центральной системе координат, требуется равенство нулю первого её коэффициента

$$\mathrm{V}_{\mu 1} + \mathrm{V}_{\mu 2} + \ldots \mathrm{V}_{\mu\nu} = \tag{6}$$

Раскрываем образы нулей в соответствии с функцией отображения (3) и вычисляем первый коэффициент

$$\begin{gathered} = \left(Z_1^{\mu\nu} + q_1 Z_1^{\mu-1} + \ldots + q_\mu Z_1^0\right) + \left(Z_2^\mu + q_1 Z_2^{\mu-1} + \ldots + q_\mu Z_2^0\right) + \ldots \\ \ldots + \left(Z_\nu^\mu + q_1 Z_\nu^{\mu-1} + \ldots + q_\mu Z_\nu^0\right) = \left(Z_1^\mu + \ldots\right)_\nu^1 + q_1\left(Z_1^{\mu-1} + \ldots\right)_\nu^1 + \ldots + q_\mu\left(Z_1^0 + \ldots\right)_\nu^1 = \\ = r_\mu + q_1 r_{\mu-1} + \ldots + q_\mu r_0 = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

Здесь, через r_μ, как видим , обозначены стандартные моменты нулей функции-оригинала (1).

Для выполнения требования (6) наложенного на функцию-образ достаточно одного свободного параметра (q) отображения. Пусть это будет параметр q_1, остальные полагаем равными нулю. Функция отображения (3) при этом окажется функцией первого порядка ($\mu = 1$)

$$V_1 = Z + q_1 \tag{8}$$

Первый коэффициент (6) функции-образа равен

$$\left(V_{\mu_1} + \ldots\right)_\nu = r_1 + q_1 r_0 = r_1 + \nu q_1 \tag{9}$$

Откуда следует, что для выполнения требования (6) наложенного на функцию-образ параметр отображения (q_1) должен иметь значение

$$q_1 = -r_1/\nu \tag{10}$$

При наложении нескольких требований на функцию образ, параметры отображения вычисляются как корни системы, состоящей из соответствующего числа уравнений.

Подстановка найденных значений параметров отображения окончательно определяет функцию-образ со всеми заложенными в неё качественными особенностями. На этом заканчивается действие метода отображений как метода синтезирования новых функций. Дальнейшее использование функций-образов зависит от того как была поставлена более общая задача.

Так, например, если задача заключается в разработке некоторого устройства или его части и нами составлена функция-оригинал, описывающая работу его макета, то функция-образ, учитывающая требования закладываемые к работе будущего устройства, представит собой более совершенную математическую модель разработки. Новый оригинал. Применение, таким образом, отображений при проектировании позволяет сместить центр тяжести исследований от стенда к рабочему столу.

В процессе проведения исследовательских работ, при обработке гипотез функция-оригинал определяет наше первое представление о явлении. Функция-образ включает в себя вновь полученные сведения и предположения, представляет собой более совершенную модель, новую функцию оригинал.(См. в Интернете работу автора “Анализ и синтез математических моделей физических процессов”)

В математических науках отображение, это инструмент синтеза и анализа, позволяющий видоизменить аналитические и графические формы функций. Исторически, отображение было и остается основным методом решения алгебраических уравнений. Отображение позволяет привести образ многоугольника корней уравнения к частной решаемой форме.(См. в Интернете работу автора “Решение алгебраических уравнений высоких степеней”).

1.2. Отображения линейными функциями.

Рассмотрим линейное отображение функции третьего порядка

$$A_3(Z) = Z^3 - m_I Z^2 + m_{II} Z - m_{III} = Z^3 - 3a_1 Z^2 + 3a_2 Z - a_3 \qquad (11)$$

линейной функцией

$$V = q_0 Z + q_1 Z^0 \qquad (12)$$

Функция-образ тоже, представляет собой алгебраическую функцию третьего порядка

$$B_3(V) = V^3 - 3b_1 V^2 + 3b_2 V - b_3 \qquad (13)$$

Действительно, функции-образу придаём три однозначно определённых точки нулей (12)

$$\begin{aligned} V_1 &= q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0 \\ V_2 &= q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0 \\ V_3 &= q_0 Z_3 + q_1 Z_3^0 \end{aligned} \qquad (14)$$

на плоскости (V) определения, из которых она и может быть воссоздана в соответствии с основной теоремой алгебры , единственным образом

$$B_3(V) = V^3 - (V_1 + \ldots)_3^1 \cdot V^2 + (V_1 V_2 + \ldots)_3^1 \cdot V - (V_1 V_2 V_3) \qquad (15)$$

Вычисление коэффициентов функции-образа (13) начинаем с третьего (13, 14, 15)

$$b_3 = V_1 V_2 V_3 = (q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0)(q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0)(q_0 Z_3 + q_1 Z_3^0) = \qquad (16)$$

Выписываем произведение вторых слагаемых сомножителей (16) коэффициента b_3

$$= q_1 q_1 q_1 Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots \qquad (17)$$

Для удобства, полученное произведение (17) представим в форме

$$= q_{111} m_{000} + \ldots \qquad (18)$$

где произведение параметров отображения заменено условным произведением индексов

$$q_1 \cdot q_1 \cdot q_1 = q_{111} \qquad (19)$$

а произведение «нулей» функции (11) соответствующим моментом

$$Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 = m_{000} \qquad (20)$$

Получившийся таким образом головной момент (18) произведения функций (16) остается просуммировать сочетаниями с повторением индексов по три (три индекса и у момента и у параметра) из двух (два возможных значения индекса – 0 и 1)

$$= \left(q_{111}m_{000} + \ldots\right)_4 = q_{111}m_{000} + q_{011}m_{100} + q_{001}m_{110} + q_{000}m_{111} = \tag{21}$$

Возвращаясь в найденном (21) выражении вместо произведения индексов к произведению параметров, получим окончательное выражение третьего коэффициента (16) функции-образа (15) через параметры отображения и коэффициенты функции-оригинала

$$= q_1^3 m_{000} + q_0 q_1^2 m_{100} + q_0^2 q_1 m_{110} + q_0^3 m_{111} = \tag{22}$$

Замечания.

1. Можно не переходить к произведению индексов (19) вместо произведения параметров, а выбранное произведение (17) сразу представить головным моментом коэффициента b_3 (16)

$$\left(= q_1 q_1 q_1 m_{000} + \ldots\right)_4 = \tag{24}$$

а затем сразу вывести результат (22).

2. Головной момент (17) коэффициента b_3 может быть выбран произведением любых слагаемых, например

$$= \left(q_0 Z_1\right)\left(q_1 Z_2^0\right)\left(q_0 Z_3\right) = q_0 q_1 q_0 Z_1 Z_2^0 Z_3 = \left(q_{001}m_{110} + \ldots\right)_4 \tag{24}$$

В работе головной момент (17) коэффициента b_3 выбран таковым из соображения будущего представления его в форме по убывающим степеням параметра q_1 отображения, имеющего размерность переменной функции-образа.

3. Выборка комбинаций при переходе от сокращенной записи функции (21) коэффициента b_3 осуществляется простым переносом подстрочных единиц из обозначения параметра в обозначение момента.

Второй и третий коэффициенты функции образа (13) вычисляем как, соответственно, первую и вторую производную третьего (22) коэффициента по параметру q_1

$$3b_2 = \frac{1}{1}\left(b_3\right)' = 3q_1^2 + 2q_0 q_1 m_1 + q_0^2 m_{11}$$

$$3b_1 = \frac{1}{2}\left(b_3\right)'' = 3q_1 + q_0 m_1 \tag{25}$$

Здесь учтено, что $m_{000} = 1$, $m_{100} = m_1$ и $m_{110} = m_{11}$. Производные (25) делённые на число соответствующее порядку производной будем называть «целыми производными» и в дальнейшем, если это не оговорено, слово «целые» иногда будем опускать.

Для проверки произведем вычисление, например, второго коэффициента функции-образа полностью

$$
\begin{aligned}
3b_2 &= (V_1V_2 + \ldots)_3^1 = \\
&= \left[(q_0Z_1 + q_1Z_1^0)(q_0Z_2 + q_1Z_2^0) + \ldots\right]_3^1 = \\
&= q_1q_1Z_1^0Z_2^0 + \ldots = (q_{11}m_{00} + \ldots)_3^1 = \\
&= q_{11}m_{00} + q_{01}m_{10} + q_{00}m_{11} = \\
&= 3q_1^2 + 2q_0q_1m_1 + q_0^2m_{11}
\end{aligned} \tag{26}
$$

Можно произвести вычисление и первого коэффициента и еще раз убедиться в совпадении результатов с ранее сделанными выводами (25).

Итак, функция-образ (13) в пространстве над плоскостью (V) комплексной переменной определена. Коэффициенты её (22, 25) выражены через коэффициенты функции-оригинала (11) и произвольные параметры (q_0, q_1) функции отображения (12). Известно, что придавая различные значения модулю параметра q_0 ,можно изменить масштаб треугольника нулей функции-образа. Изменение аргумента q_0 это повороты треугольника нулей около своего центра тяжести. Изменение модуля параметра q_1 это изменение расстояния до центра треугольника от центра системы отсчета. Аргумент q_1 это аргумент центра треугольника нулей (рис. 1)

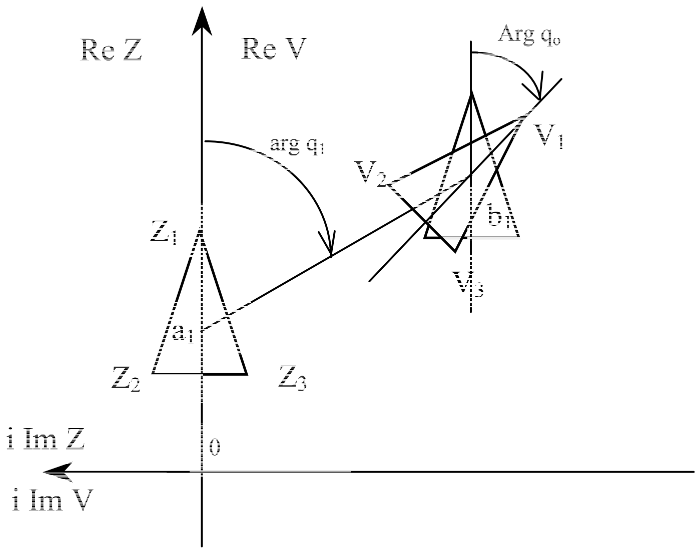

Рис. 1. Линейное отображение (плоскости аргумента оригинала (Z) и образа (V) совмещены).

Предпримем попытку представления функции образа (13) в форме куба

$$
B_3(V) = V^3 - 3b_1V^2 + 3b_1^2V - b_1^3 = (V - b_1)^3 \tag{27}
$$

т.е. функции с трехкратным нулём (если удастся , то будет найдено решение уравнения третьей степени). Для этого необходимо, как видим, выполнения двух условий

$$b_1^2 = b_2$$
$$b_1^3 = b_3 \tag{28}$$

Функция отображения (12) содержит как раз два произвольных параметра. Однако, подстановка найденных коэффициентов (22, 25) в выражения (28) требуемой связи, вместо ожидаемой системы уравнений относительно параметров (q_0, q_1) отображения, формирует нам встречное требование

$$a_{02} = -a_1^2 + a_2 = -b_1^2 + b_2 = const$$
$$a_{03} = 2a_1^3 - 3a_1a_2 + a_3 = 2b_1^3 - 3b_1b_2 + b_3 = const \tag{29}$$

Независимое от параметров отображение постоянство значений некоторых функций коэффициентов образа и оригинала, именуемых в связи с этим инвариантами линейного отображения.

Выдвинутое условие (28) равенства нулю инвариантов функции-образа не реализуемо ни в розницу, ни вместе. Если же инвариант, хотя бы один, равен нулю у функции-оригинала, то он равен нулю у образа любого линейного отображения. Линейным отображением невозможно видоизменить фигуру функции-оригинала (мы не имеем в виду масштабного изменения), привести её к какой-то частной разрешаемой форме. Однако, ДНК алгебраических функций – их инварианты линейного отображения, разрушаемы отображением функцией уже второго порядка .

Отметим, что инвариантами являются коэффициенты функции, если она размещена в центральной системе координат, т.е. там, где первый коэффициент функции равен нулю. Справедливо и обратное утверждение – если коэффициенты функции – инвариантны, то первый коэффициент равен нулю.

Чтобы показать справедливость прямого утверждения, разместим функцию-образ в центральной системе координат, приравняв первый её коэффициент (25) нулю

$$3b_1 = 3q_1 + q_0m_1 = \tag{30}$$

Положим теперь $q_0 = 1$ и перейдем к биномиальным коэффициентам

$$= 3q_1 + 3a_1 = 0$$
$$q_1 = -a_1 \tag{31}$$

Подставляем найденное значение параметра отображения (q_1) в формулы (25, 22) определяющие второй и третий коэффициенты функции-образа

$$3b_2 = 3\left(-a_1^2 + a_2\right)$$
$$b_3 = 2a_1^3 - 3a_1a_2 + a_3 \tag{32}$$

Находим, что они действительно равны соответствующим инвариантам линейного отображения

Приравняем второй и третий коэффициенты функции инвариантам

$$3b_2 = 3b_{02} = 3\left(-b_1^2 + b_2\right)$$

$$b_3 = b_{03} = 2b_1^{\ 3} - 3b_1 b_2 + b_3 \qquad (33)$$

находим, что справедливо и обратное утверждение, так как приведенные равенства имеют место только в случае, когда первый коэффициент (b_1) функции равен нулю.

1.3. Отображение функциями второго порядка.

В качестве функции-оригинала по-прежнему будем рассматривать целую рациональную функцию третьего порядка

$$A_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z^1 - m_{111} = Z^3 - 3a_1 Z^2 + 3a_2 Z^1 - a_3 \qquad (34)$$

Отображение заданной (34) функции, а точнее отображение точек плоскости аргумента над которой задана функция-оригинал в точки плоскости аргумента, над которой будет размещаться функция-образ, осуществляется однозначной целой рациональной функцией второго порядка

$$Z_2 = q_0 Z^2 + q_1 Z^1 + q_2 Z^0 \qquad (35)$$

Полагаем, что образами нулей функции-оригинала является нули функции-образа (35)

$$\begin{aligned} Z_{21} &= q_0 Z_1^2 + q_1 Z_1^1 + q_2 Z_1^0 \\ Z_{22} &= q_0 Z_2^2 + q_1 Z_2^1 + q_2 Z_2^0 \\ Z_{23} &= q_0 Z_3^2 + q_1 Z_3^1 + q_2 Z_3^0 \end{aligned} \qquad (36)$$

Тогда, функция-образ, воспроизведенная через своё решение, будет тоже целой рациональной функцией

$$\begin{aligned} A_3(Z_2) &= Z_2^3 - (Z_{21} + \ldots)_3^1 Z_2^2 + (Z_{21} Z_{22} + \ldots)_3^1 Z_2^1 - (Z_{21} Z_{22} Z_{23} + \ldots)_1^1 = \\ &= Z_2^3 - 3a_{21} Z_2^2 + 3a_{22} Z_2^1 - a_{23} \end{aligned} \qquad (37)$$

Вычисляем третий коэффициент функции-образа

$$a_{23} = Z_{21} Z_{22} Z_{23} = \left[\left(q_0 Z_1^2 + q_1 Z_1^1 + q_2 Z_1^0\right) \times \ldots\right]_3 = \qquad (38)$$

Формируем головной момент коэффициента из первых слагаемых сомножителей (38)

$$\begin{aligned} &= q_0 Z_1^2 q_0 Z_2^2 q_0 Z_3^2 + \ldots = \\ &= (q_{000} m_{222} + \ldots)_{10} = \end{aligned} \qquad (39)$$

При этом, количество слагаемых результата вычисляем как количество сочетаний с повторениями из общего числа применяемых в выражении индексов (0, 1, 2 – из трёх) по числу мест для размещения индексов в обозначении параметра отображения (q) или момента (m) , т.е. по три ,

$$\frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = 10 \qquad (40)$$

При переходе от сокращенной (39) к полной (41) записи третьего коэффициента каждое очередное слагаемое формируются списанием единицы из числа в обозначение момента (m) и занесением её в обозначение параметра отображения (q)

$$\begin{aligned} &= q_{000}m_{222} + q_{001}m_{221} + q_{002}m_{220} + q_{011}m_{211} + q_{012}m_{210} + \\ &+ q_{022}m_{200} + q_{111}m_{111} + q_{112}m_{110} + q_{122}m_{100} + q_{222}m_{000} = \end{aligned} \tag{41}$$

Теперь, для получения окончательного результата, следует перейти от представления параметров отображения в форме произведения индексов к форме произведения параметров

$$\begin{aligned} &= q_0^3 m_{222} + q_0^2 q_1 m_{221} + q_0^2 q_2 m_{220} + q_0 q_1^2 m_{211} + q_0 q_1 q_2 m_{210} + \\ &+ q_0 q_2^2 m_{200} + q_1^3 m_{111} + q_1^2 q_2 m_{110} + q_1 q_2^2 m_{100} + q_2^3 m_{000} = \end{aligned} \tag{42}$$

Замечания

Укажем на некоторые общие свойства моментов с нулями в обозначении

1. Полнокорневые моменты

$$\begin{aligned} m_{220} &= \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_3^1 = m_{22} \\ m_{210} &= \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_1^6 = \left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_3^2 = m_{21} \\ m_{200} &= \left(Z_1^2 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_3^1 = m_2 \\ m_{110} &= \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right)_3^1 = m_{11} \\ m_{100} &= \left(Z_1^1 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_3^1 = m_1 \\ m_{000} &= \left(Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_1^1 = 1 \end{aligned} \tag{43}$$

2. Неполнокорневые моменты

$$\begin{aligned} m_{20} &= \left(Z_1^2 Z_2^0 + \ldots\right)_3^2 = 2\left(Z_1^2 + \ldots\right)_3^1 = 2m_2 \\ m_{10} &= \left(Z_1^1 Z_2^0 + \ldots\right)_3^2 = 2\left(Z_1^1 + \ldots\right)_3^1 = 2m_1 \\ m_0 &= \left(Z_1^0 + \ldots\right)_3^1 = 3 \end{aligned} \tag{44}$$

3. Вообще же, все встречающиеся по тексту моменты считаем величинами известными, так как выражения их через единичные могут быть вычислены, а частично заимствованы из работы автора “Симметричные алгебраические моменты”.

   Упрощаем, в соответствии со сделанным замечанием, функцию третьего коэффициента (a_{23}) и представляем её в форме многочлена по убывающим степеням параметра (q_2) размерности переменной функции-образа

$$
\begin{aligned}
&= q_0^3 m_{222} + q_0^2 q_1 m_{221} + q_0^2 q_2 m_{22} + q_0 q_1^2 m_{221} + q_0 q_1 q_2 m_{21} + \\
&+ q_0 q_2^2 m_2 + q_1^3 m_{111} + q_1^2 q_2 m_{11} + q_1 q_2^2 m_1 + q_2^3 = \\
&= a_{23} = q_2^3 + q_2^2 \left(q_1 m_1 + q_0 m_2 \right) + q_2 \left(q_1^2 m_{11} + q_0 q_1 m_{21} + q_0^2 m_{22} \right) + \\
&+ \left(q_1^3 m_{111} + q_0 q_1^2 m_{211} + q_0^2 q_1 m_{221} + q_0^3 m_{222} \right) \qquad (45)
\end{aligned}
$$

С целью проверки правильности проведенных выкладок убедимся в постоянстве кличества частных моментов в начале (38) и конце (45) вычислений

$$
3 \cdot 3 \cdot 3 = 1 + (3+3) + (3+6+3) + (1+3+3+1) = 27 \qquad (46)
$$

Наконец, коэффициенты второго и первого порядков функции-образа (37) вычисляем как соответственно первая и вторая целые производные третьего коэффициента по параметру (q_2) размерности плоскости отображения (или размерности новой переменной - - Z_2)

$$
\begin{aligned}
&3a_{22} = 3q_2^2 + 2q_2 \left(q_1 m_1 + q_0 m_0 \right) + \left(q_1^2 m_1 + q_0 q_1 m_{21} + q_0^2 m_{22} \right) \\
&3a_{21} = 3q_2 + \left(q_1 m_1 + q_0 m_2 \right)
\end{aligned} \qquad (47)
$$

Сравнивая формулы коэффициентов функций-образов линейного (22, 25) и квадратичного (44, 47) отображений, можно заключить, что отображение функцией (35) второго порядка это наложение трёх отображений, рис. 2.

Первое отображение это стандартное отображение функцией $Z_2 = Z^2$, где $q_0 = 1$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$. Этим действием треугольник нулей функции-оригинала деформируется, центр его тяжести (a_1) располагается в точке (m_2) плоскости нового аргумента.

Второе преобразование это пропорциональное отображение функцией $Z_2 = q_1 Z$. Этим действием треугольник-образ конформно видоизменяется и из точки m_2 передвигается в точку $\left(m_2 + q_1 m_1 \right)$ плоскости отображения $\left(Z_2 \right)$.

Третьим отображением треугольник нулей функции-образа параллельно перемещается из второго положения в конечное – $a_{21} = m_2 + q_1 m_1 + q_2$

Порядок переходов может быть прочитан и по другому. Сначала линейное отображение центра треугольника-оригинала из точки a_1 в точку b_1. Затем стандартное отображение в точку $\left(m_2 + q_1 m_1 \right)$ на плоскости отображения $\left(Z_2 \right)$, а в заключение, линейное перемещение $\left(q_2 \right)$ по плоскости $\left(Z_2 \right)$ отображения в конечную точку $\left(a_{21} \right)$.

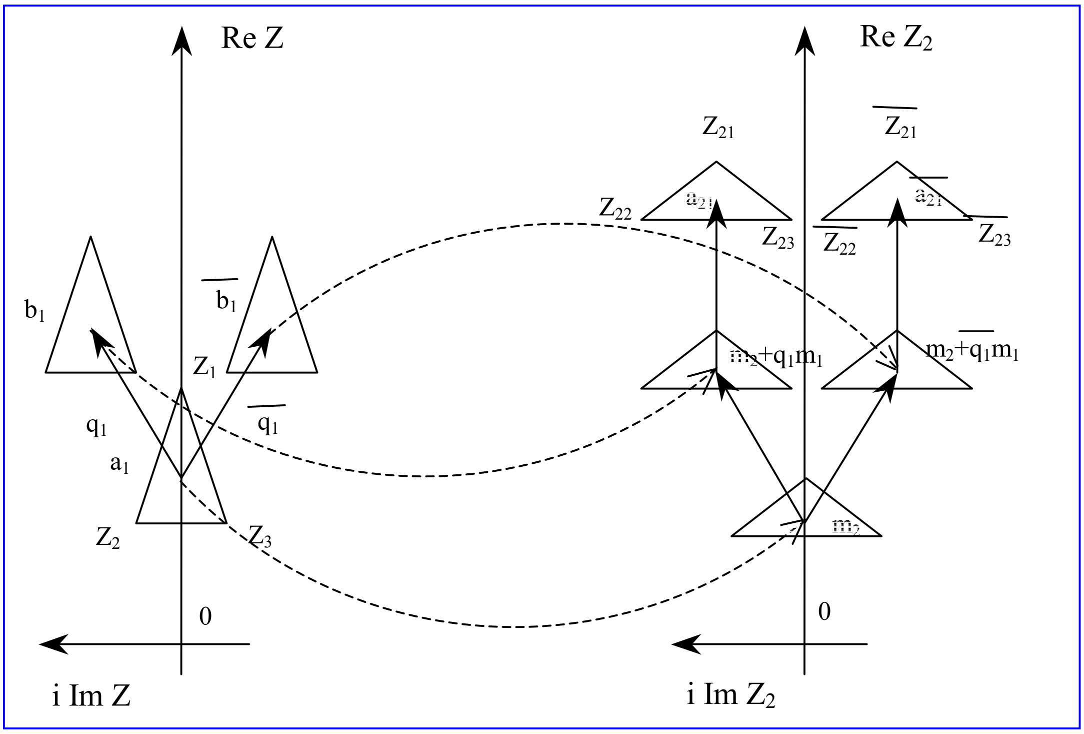

Рис. 2. Отображение функций второго порядка.

В том, что последнее перемещенее q_2 линейно, можно убедиться построив инварианты линейного отображения функции-образа. Инварианты не должны зависеть от параметра q_2 линейного отображения. Действительно, инвариант второго порядка функции-образа равен

$$-a_{21}^2 + a_{22} = \tag{48}$$

а после подстановки значений коэффициентов, выраженных через параметры отображения (47), где одновременно принимаем $q_0 = 1$, находим подтверждение независимости инварианта от параметра (q_2) перемещения

$$= \frac{1}{9}\left[q_1^2\left(3m_{11} - m_1^2\right) + q_1\left(3m_{21} - 2m_1 m_2\right) + 3\left(m_{22} - m_2^2\right)\right] \tag{49}$$

Полученное выражение показывает, что существует два значения параметра отображения (q_1), при которых инварианту второго порядка функции-образа может быть придано любое значение, например нулевое. Управление инвариантами это управление конфигураций треугольников нулей функции и, следовательно, самой функцией.

Так нулевому значению инварианта второго порядка соответствует равносторонний треугольник нулей функции. Нулевому значению инварианта третьего порядка соответствует треугольник – отрезок, лежащий на действительной или мнимой оси системы отчета, и т.д.

Пусть, например, требуется найти общее решение уравнения (или функции) третьей степени. Уравнение будем считать заданным в центральной системе координат

$$Z^3 + m_{011}Z - m_{0111} = 0 \tag{50}$$

на что указывает неканонический ноль в обозначении моментов.

Наметим для себя решение поставленной задачи через частную форму уравнения образа, у которого не только первый, но и второй коэффициенты равны нулю. То есть функция-образ должна удовлетворять двум новым условиям. Следовательно, функция отображения должна содержать два активных, произвольных параметра отображения. Например, рассмотренная функция второго порядка (35) с параметром $q_0 = 1$

Образы корней заданного уравнения (50) в этом случае будут определяться формулами (36)

$$\begin{aligned} Z_{21} &= Z_1^2 + q_1 Z_1 + q_2 \\ Z_{22} &= Z_2^2 + q_1 Z_2 + q_2 \\ Z_{23} &= Z_3^2 + q_1 Z_3 + q_2 \end{aligned} \tag{51}$$

Уравнение образ (37) должно иметь вид

$$Z_2^3 - a_{023} = 0 \tag{52}$$

И должны иметь место два наложенных нами условия на первый и второй коэффициенты (47) уравнения образа

$$\begin{aligned} 3a_{22} &= 3q_2^2 - 4q_2 m_{011} + q_1^2 m_{011} - 3q_1 m_{011} + m_{011}^2 = 0 \\ 3a_{21} &= 3q_2 - 2m_{011} = 0 \end{aligned} \tag{53}$$

В последних двух уравнениях смешанные и кратные моменты заменены на центральные единичные.

Начинается решение с нахождения значений параметров отображения удовлетворяющих системе уравнений (53)

$$\begin{aligned} q_{11,2} &= \frac{3m_{0111}}{2m_{011}} \pm \sqrt{\frac{27m_{0111}^2 + 4m_{011}^3}{12m_{011}^2}} \\ q_2 &= \frac{2m_{011}}{3} \end{aligned} \tag{54}$$

Далее подстановкой найденных значений параметров отображения (54) определяется коэффициент третьего порядка (45) уравнения образа, в центральной системе координат.

$$\begin{aligned} a_{023} &= \frac{D_3^2}{54\sqrt{3}m_{011}^3}\left(\sqrt{3}D_3 \pm 9m_{0111}\right) \\ D_3 &= \sqrt{27m_{0111}^2 + 4m_{011}^3} \end{aligned} \tag{55}$$

Следующим шагом вычисляются корни уравнения образа (52)

$$Z_{21,2,3} = \sqrt[3]{a_{023}} \tag{56}$$

и, наконец, корни заданного уравнения из уравнений (51), после подстановки значений найденных коэффициентов. В более общем случае корни заданного уравнения находятся из системы – одно из уравнений (51) и заданное уравнение (50).

Найденное решение сводится к известным формулам Кардано, что и должно произойти с любым «новым» решением, так как речь идет об одних и тех же корнях (точках плоскости). И ничего "нового" не существует, или между коэффициентами заданного уравнения существует аппиорная связь.

1.4. Отображение дробно-рациональными функциями.

Рассмотренные примеры отображений линейными и квадратичными функциями содержат достаточное количество информации для построения отображений функциями более высоких порядков.

Отображения дробно-рациональными функциями рассмотрим на примере тоже простейшей из своего класса

$$\kappa = \frac{p_1}{Z + q_1} = \frac{p_1}{q_0 Z + q_1 Z^0} \tag{60}$$

функции нулевой размерности. Здесь параметры отображения (p_1 и q_1) имеют размерность переменной (Z) функции-оригинала (11).

Параметр q_0 – безразмерен и вместе с нулевой степенью переменного ($Z^0 = 1$) , более выполняет симметрирующую функции отображения роль. Многочлены числителя и знаменателя отображающей функции (60) могут быть более высокого порядков, а сама дробно-рациональная функция может иметь как положительный, так и отрицательный порядок величины. Однако принцип построения коэффициентов функции- образа остается общим и неизменным.

Строим образы нулей функции-образа на основании выбранной функции отображения (60) в зависимости от нулей функции оригинала (11)

$$\begin{gathered}
\kappa_1 = \frac{p_1}{q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0} \\
\kappa_2 = \frac{p_1}{q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0} \\
\kappa_3 = \frac{p_1}{q_0 Z_3 + q_1 Z_3^0}
\end{gathered} \tag{61}$$

Исходя из принятого для функции-образа количества нулей (61), записываем ее формулу

$$\begin{aligned}
A_3(\kappa) &= \kappa^3 - 3\alpha_1 \kappa^2 + 3\alpha_2 \kappa - \alpha_3 = \\
&= \kappa^3 - \mu_1 \kappa^2 + \mu_{11} \kappa + \mu_{111}
\end{aligned} \tag{62}$$

Выражаем первый коэффициент функции-образа через свои нули (61) и далее через нули и моменты функции-оригинала (34)

$$3\alpha_1 = (\kappa_1 + ...)_3^1 = \left(\frac{p_1}{q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0} + ... \right)_3^1 =$$

$$= p_1 \frac{\left[\left(q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0 \right) \left(q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0 \right) + ... \right]_3^1}{\left[\left(q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0 \right) \cdot ... \right]_3} =$$

$$= p_1 \frac{(q_{00} m_{11} + ...)_3}{(q_{000} m_{111} + ...)_4} = p_1 \frac{A_3'(q_1)}{A_3(q_1)} \tag{63}$$

Аналогично, для второго и третьего коэффициентов функции-образа (62) можно получить выражения

$$3\alpha_2 = p_1^2 \frac{(q_0 m_1 + ...)_2}{(q_{000} m_{111} + ...)_4} = p_1^2 \frac{A_3''(q_1)}{A_3(q_1)}$$

$$\alpha_3 = p_1^3 \frac{1}{(q_{000} m_{111} + ...)_4} = p_1^3 \frac{A_3'''(q_1)}{A_3(q_1)} \tag{64}$$

Знаменатели выражений коэффициентов (63,64) как видим, представляют собой значение функции-оригинала в точке определяемой параметром (q_1) отображения. Числители коэффициентов – значения соответствующих производных функции-оригинала в той же точке. (q_1).

Применим отображение дробно-рациональной функцией для построения графо-аналитического решения уравнения третьей степени. Уравнение (функцию) будем считать заданным в центральной системе координат ($m_1 = 0$)

$$Z^3 + m_{011} Z - m_{0111} = 0 \tag{65}$$

Графо-аналитическое решение предполагает безразмерную форму уравнения-образа, т.е. ту самую, которая была только что рассмотрена (62). Решение также предполагает, что коэффициенты около переменного должны быть постоянными числами, например

$$\kappa^3 + \kappa^2 + \mu_{111} = 0 \tag{66}$$

Взятая частная форма уравнения-образа (66), отличается от общей (62) тем, что в последней положен первый коэффициент (63) равным минус единице ($\mu_1 = -1$), а второй (64) – нулю. ($\mu_{11} = 0$)

$$\mu_1 = p_1 \frac{A_3'(q_1)}{A_3(q_1)} = -1$$

$$\mu_{11} = p_1^2 \frac{A_3''(q_1)}{A_3(q_1)} = 0 \tag{67}$$

Раскрывая уравнения полученной системы (67), и имея в виду $q_0 = 1$, $m_1=0$, найдем значения параметров отображения

$$q_1 = 0$$

$$p_1 = -\frac{m_{0111}}{m_{011}} \tag{68}$$

а через них и третий коэффициент (64) уравнения образа (62),

$$\mu_{111} = \frac{m_{0111}^2}{m_{011}^3} \qquad (69)$$

Уравнение-образ в задуманной форме (66) получает, в соответствии с равенствами 67,69, вид

$$\kappa^3 + \kappa^2 + \frac{m_{0111}^2}{2} = 0 \qquad (70)$$

Теперь, графически или по заранее подготовленным таблицам, определяются корни (κ_1, κ_2, κ_3) уравнения-образа (70), а затем и корни заданного уравнения (65) через функцию отображения (60, 61)

$$Z_{1,2,3} = \frac{m_{0111}}{\kappa_{1,2,3} m_{011}} \qquad (71)$$

В общем случае, когда дробно-рациональная функция отображения неразрешима относительно переменной функции-оригинала, корни заданного уравнения вычисляются из системы уравнений – заданного и функции отображения.

1.5. Отображение стандартными функциями

По существу речь пойдет о стандартном отображении некоторой искусственно созданной функции-резольвенты и определении её через известный образ.

Итак, считаем заданной функцию третьего порядка

$$A_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111} \qquad (72)$$

Составим две линейных формы из нулей заданной функции

$$V_1 = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3$$

$$V_2 = \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 \qquad (73)$$

и будем их считать нулями (ведь точки V_1 и V_2 лежат в плоскости аргумента) некоторой новой функции второго порядка, функции-резольвенты заданной функции (72)

$$A_2(V) = V^2 - d_1 V + d_{11} \qquad (74)$$

Перспектива в том, что когда будут найдены значения чисел (α, β) и нулей (V_1, V_2) резольвенты, то, добавив к уравнениям (73) образов нулей первый коэффициент заданной функции (72), получим линейную систему однозначно определяющую корни заданного уравнения (72)

$$\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3 = V_1$$
$$\beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 = V_2$$
$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = m_1 \tag{75}$$

Для составления уравнений определяющих числовые коэффициенты (α, β) и нули (V_1, V_2) введём стандартное отображение резольвенты (74) степенной функцией третьего порядка

$$V_3 = V^3 \tag{76}$$

(При отображении функцией второго порядка необходимого количества уравнений не получается). Функция-образ резольвенты (74) в общем случае будет иметь вид

$$A_2(V_3) = V_3^2 - 2g_{31}V_3 + g_{32} \tag{77}$$

Введя временное обозначение для слагаемых нулей (73) резольвенты

$$\alpha Z = k$$
$$\beta Z = r \tag{78}$$

произведём вычисление коэффициентов функции-образа (77). С учётом предыдущего (73,76,78) имеем

$$2g_{31} = (k_1 + k_2 + k_3)^3 + (r_1 + r_2 + r_3)^3 =$$
$$= \left(k_1^3 + \ldots\right)_3^1 + 3\left(k_1^2 k_2^1 + \ldots\right)_3^2 + 6k_1k_2k_3 +$$
$$+ \left(r_1^3 + \ldots\right)_3^1 + 3\left(r_1^2 r_2^1 + \ldots\right)_3^2 + 6r_1r_2r_3 =$$
$$\left[\left(\alpha_1^3 + \beta_1^3\right)Z_1^3 + \ldots\right]_3^1 + 3\left[\left(\alpha_1^2\alpha_2 + \beta_1^2\beta_2^1\right)Z_1^2Z_2^1 + \ldots\right]_3^2 + 6\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_1\beta_2\beta_3\right)Z_1Z_2Z_3 = \tag{79}$$

Наложим на произвольные параметры (α, β) отображения условие – обеспечение беспрепятственной сходимости моментов нулей заданной функции (72). Для этого числовые множители около частных слагаемых каждого симметричного момента должны быть между собой равны и, соответственно, могут быть вынесены

$$= \gamma_{31}\left(Z_1^3 + \ldots\right)_3^1 + 3\gamma_{32}\left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_3^2 + 6\gamma_{33}Z_1Z_2Z_3 =$$
$$= \gamma_{31}m_3 + 3\gamma_{32}m_{21} + 6\gamma_{33}m_{111} \tag{80}$$

где вынесенные числовые множители равны

$$\gamma_{32} = \alpha_1^3 + \beta_1^3 = \alpha_2^3 + \beta_2^3 = \alpha_3^3 + \beta_3^3 = \left[\left(\alpha_1^3 + \beta_1^3\right) = \ldots\right]_3^1$$
$$\gamma_{32} = \left[\left(\alpha_1^2\alpha_2^1 + \beta_1^2\beta_2^1\right) = \ldots\right]_3^2$$
$$\gamma_{33} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_1\beta_2\beta_3 \tag{81}$$

Переходим к вычислению второго коэффициента образа резольвенты

$$g_{32} = (k_1 + k_2 + k_3)^3 (r_1 + r_2 + r_3)^3 = = \left[(k_1 r_1 + ...)_3^{\underline{1}} + (k_1 r_2 + ...)_3^{\underline{2}} \right]^3 = \qquad (82)$$

Здесь черта под верхним заскобным индексом момента означает, что комбинации перестановки составляются нижними индексами частных моментов.

$$\begin{aligned} &\left[(\alpha_1 \beta_1 z_1^2 + ...)_3^1 + (\alpha_1 \beta_1 z_1 z_2 + ...)_3^2 \right]^3 = \\ &= \left[\gamma_{21} (z_1^2 + ...)_3^1 + \gamma_{22} (z_1 z_2 + ...)_3^1 \right]^3 = \\ &\quad = (\gamma_{21} m_2 + \gamma_{22} m_{11})^3 \end{aligned} \qquad (83)$$

где числовые коэффициенты около моментов равны

$$\begin{aligned} \gamma_{21} &= (\alpha_1 \beta_1 - ...)_3 \\ \gamma_{22} &= [(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + ...]_3 \end{aligned} \qquad (84)$$

Условия (81, 84), которым должны удовлетворять параметры (α, β) отображения, симметричны относительно букв и индексов, что позволяет предположить и принять их равными корням одного и того же уравнения, степени наибольшей из встречающихся

$$\alpha^3 - \mu_1 \alpha^2 + \mu_{11} \alpha - \mu_{111} = 0 \qquad (85)$$

Из уравнений (81, 84) могут быть найдены первый и третий моменты уравнения параметров (85)

$$\begin{aligned} \mu_1^2 &= 3\gamma_{21} + 3\gamma_{22} = (\alpha_1 + ...)_3^1 \cdot (\beta_1 + ...)_3^1 = \left[(\alpha_1 + ...)_3^1 \right]^2 \\ \mu_1^3 &= {}^{3\gamma_{31}}\!/_2 + {}^{18\gamma_{32}}\!/_2 + 3\gamma_{33} = \left[(\alpha_1 + ...)_3^1 \right]^3 \\ \mu_{111} &= {}^{\gamma_{33}}\!/_2 = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \end{aligned} \qquad (86)$$

Из тех же уравнений (81, 84) могут быть найдены первый (μ_3) и третий (μ_{333}) моменты стандартного отображений уравнений параметров (85) на плоскость третьего порядка

$$\begin{aligned} \mu_3 &= {}^{3\gamma_{31}}\!/_2 = (\alpha_1^3 + ...)_3^1 \\ \mu_{333} &= \mu_{111}{}^3 = \left({}^{\gamma_{33}}\!/_2 \right)^3 \end{aligned} \qquad (87)$$

Условиями (81,84) введено пять параметров (γ), связанных между собой пока ещё только одной связью (86.1, 86.2). Наложим на параметры (γ) ещё два условия, которые позволяют разрешить уравнение образа параметров

$$\alpha_3^3 - \mu_3\alpha_3^2 + \mu_{33}\alpha_3 - \mu_{333} = 0 \tag{88}$$

а именно, положим

$$\begin{aligned} \mu_3^2 &= 3\mu_{33} \\ \mu_3^3 &= 27\mu_{333} \end{aligned} \tag{89}$$

и тогда с учётом предыдущего (87.1, 88, 89)

$$\alpha_3 = \gamma_{31}/2 \tag{90}$$

Раскрывая связь, наложенную на моменты (89) образа через единичные моменты, с учётом полученных выражений (86) для первого и третьего моментов оригинала можно найти

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_{11} &= 0 \\ \mu_{111} &= \gamma_{33}/2 \end{aligned} \tag{91}$$

Параметр (α) отображения вычисляем как корни уравнения (85, 91)

$$\alpha_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{\gamma_{33}}{2}}\left(1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) \tag{92}$$

Параметр (β) отображения вычисляется по параметру (α) через формулу связи (84.1)

$$\beta_{1,2,3} = \frac{\gamma_{21}}{\alpha_{1,2,3}} \tag{93}$$

Промежуточные параметры (γ) определяются условиями их введения (81, 84)

$$\gamma_{31} = 2, \quad \gamma_{32} = -1, \quad \gamma_{22} = -1, \; \gamma_{33} = 2, \; \gamma_{21} = 1 \tag{94}$$

Коэффициенты функции-образа резольвенты вычисляются формулами их определения (80, 83)

$$\begin{aligned} 2g_{31} &= 2m_3 - 3m_{21} + 12m_{111} \\ g_{32} &= (m_2 - m_{11})^3 \end{aligned} \tag{95}$$

Итак, образ резольвенты на плоскости третьего порядка имеет вид

$$A_2(V_3) = V_3^2 - (2m_3 - 3m_{21} + 12m_{111})V_3 + (m_2 - m_{11})^3 \tag{96}$$

Сама функция резольвенты (74) нас не интересует. Нужны нули (V_1 и V_2) резольвенты, через которые система уравнений (75) однозначно определит искомые нули заданной функции (72). Нули же функции резольвенты в соответствии с функцией отображения (76), вычисляются как корни третьей степени из нулей функции-образа (77, 96).

В работе не приводятся числовые примеры, так как таковые легко составить и проверить корректность проведённых выкладок. Во-вторых, если выкладки закончить конечной формулой , то получиться некоторое подобие решений Кардано. Такое общее решение неприемлемо для практики, потому что сложно. Естественно , ещё более сложно решение уравнения четвертой степени и вообще нерешаемо уравнение более высокой степени (Абель).

Точные, общие формулы приемлемы для численного решения уравнений. Однако и здесь они уступают методам вычислительной математики (например, идее Лобачевского--Греффе), особенно при вычислении корней уравнений более высоких степеней.

Недостатком численных решений уравнений является то, что они способны всего лишь констатировать факты прикладных задач. Например констатировать устойчивость или неустойчивость , надёжность , ресурс и т.д. Общее решение указывает пути изменения той же устойчивости , экономичности, надёжности и т.д. В связи с чем поиск общего решения всегда был и остаётся актуальной задачей математики.

Решение проблемы построения общей конечной формулы для корней уравнений высоких степеней, хотя и приближенное , но аналитически несложное и с любой наперед заданной , оцениваемой точностью предложено на основе применения изложенных начал отображений (см. в Интернет работу автора “Решение алгебраических уравнений высоких степеней”). Этими же решениями осуществляется и численное решение уравнений. Однако численные решения используются лишь для оценки точности приближений соответствующих общих решений.

Отображение позволяет поставить и решать качественно новые задачи практики , например, произвести необходимую корректировку заданной , начальной образующей уравнение функции, разместить входной параметр описываемой образующей функцией модели в требуемом интервале изменений , разместить выходной параметр (рабочую точку) на требуемом участке кривой образующей функции, вычислить коэффициенты синтезированной функции, численно определить физические параметры новой модели (см. в Интернете работу автора “ Анализ и синтез математических моделей физических процессов”).

В решении поставленных задач усматривается основное практическое назначение теории отображений.

Литература.

1.”Симметричные алгебраические моменты” - 2003

2.”Решение алгебраических уравнений высоких степеней”   - 2003

3.”Анализ и синтез математических моделей физических процессов”   - 2004

Все работы размещены в Интернете на сайте Компании Безопасность по адресу

http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html

E-mail: office@bezopasnost.ru

Корчагин Игорь Федорович

115191, г. Москва , ул. 3-ая Рощинская д.6

тел. 234-3311,232-0040,737-9268