

УДК В 511

И.Ф.Корчагин

Анализ и синтез математических моделей физических устройств и процессов

Введение

В настоящей работе предпринята попытка создания аналитического аппарата анализа и синтеза функций математических моделей. Возможность его создания наступила после разработки метода отображений позволяющего перемещать, разворачивать и деформировать прототип функции под произвольные требования.

Предлагаемый аппарат позволяет направленно и систематизированно, за рабочим столом, опираясь на эксперимент, проектировать физические устройства, анализировать новые явления и процессы, причем, соответственно, более экономично, надежно и обоснованно и, вплоть, до вычисления номиналов комплектующих элементов создаваемого или исследуемого процесса.

Аннотация

На примерах многочленов второго, третьего, четвёртого и пятого порядков проведён графический анализ математических моделей. Методом отображений функции преобразовываются под требуемые качественные характеристики процесса. Вычисляются коэффициенты синтезированной функции, вычисляются номиналы физических элементов обновлённого макета.

1. Функции второго порядка.

1.1 Общие положения.

Под физически реализуемой функцией ниже понимается математическая, действительная функция. Функция физически воплощаемая.

Математическая модель - это математическая функция или образуемое ею уравнение, полученные в результате аналитического описания работы реального устройства или процесса. Таким процессом может быть работа проектируемого устройства или движение изучаемого физического явления. Причём выходной параметр макета исследуемого процесса отождествляется со значением функции (математической модели), а входной - с её аргументом.

Функция математической модели, по определению, физически реализуема, так как воссоздаётся по объективно существующему образцу. Математически, физическая реализуемость функции обозначается и определяется как её действительность, в то время как аргумент математической модели, в общем случае, - комплексная величина, хотя и физически реальная. Примером действительной функции от комплексного аргумента является электротехническое устройство, содержащее реактивность. В настоящей работе, в качестве математических моделей рассматриваются действительные, целые, рациональные функции комплексного переменного или образуемые ими алгебраические уравнения.

Из действительности физически реализуемой функции вытекает два других её важных свойства - попарная сопряжённость комплексных корней и действительность коэффициентов. Причём, все три свойства функции равносильны, т.е. если имеет место одно из них, то два других являются следствиями первого.

Пусть, например, задана функция комплексного переменного

$$A_v(Z) = Z^v + q_1 Z^{v-1} + \dots + q_v = \quad (1)$$

и известно, что она действительна.

Тогда, представив её в форме решения

$$= (Z - Z_1)(Z - Z_2) \dots (Z - Z_v) \quad (2)$$

видно, что действительной функция может быть только тогда, когда комплексные корни её попарно сопряжены.

Построим функцию $\overline{A_v(Z)}$ - сопряжённую заданной (1), $A_v(Z)$

$$\overline{A_v(Z)} = Z^v + \bar{q}_1 Z^{v-1} + \dots + \bar{q}_v \quad (3)$$

Но, по условию, функция действительна и совпадает с себе сопряжённой

$$A_v(Z) = \overline{A_v(Z)} \quad (4)$$

равны и действительны, следовательно, все соответствующие коэффициенты ($q_v = \bar{q}_v$) заданной (1) и сопряжённой (3) функций.

Если известно, что действительны коэффициенты (q) функции (1), то она действительна, так как совпадает с себе сопряжённой и, следовательно, комплексные корни заданной функции (1) попарно сопряжены.

Наконец, если известно, что попарно сопряжены комплексные корни заданной функции (1), то действительность её является следствием представления в форме решения (2), а действительность коэффициентов вытекает из равенства (4) с сопряжённой функцией (3).

Важным для анализа свойством рассматриваемых функций является их единственность. Две функции тождественны, совпадают, если совпадают их корни (нули). Т.е., например, если на плоскости аргумента отмечены две точки, то существует только одна, единственная функция второго порядка, которая имеет эти две точки своими нулями. Свойство единственности вытекает из представления функции в форме решения (2) и единственности представления её коэффициентов через заданные нули функции.

1.2 Предварительный, констатирующий анализ

Пусть на основании аналогий, опыта, интуиции и промежуточного макетирования создан действующий макет, а математическое описание его работы завершилось написанием функции второго порядка

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1 Z + a_2 = Z^2 - d_1 Z + d_{11} \quad (5)$$

Функция построенной математической модели представлена в биномиальной и канонической знакопеременных формах. Коэффициенты её определяются (являются) функциями физических элементов макета. Аргумент функции ($Z = X + iY$) – комплексная величина. Сама функция действительна, что может быть отражено записью её в виде системы

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_2(Z) &= \operatorname{Re}(Z^2 - 2a_1Z + a_2) = X^2 - 2a_1X + a_2 + (iY)^2 \\ i \operatorname{Im} A_2(Z) &= 2(iY)(X - a_1) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Первое из выражений представленной системы определяет действительную функцию двух действительных переменных (X и Y). Второе выражение системы (6) отражает факт отсутствия у заданной функции (5) мнимой части. Одновременно, как уравнение, второе выражение указывает на взаимную связь переменных (X и Y), а графически представляет собой “кривую” в плоскости аргумента, проекцию над которой расположена фигура заданной функции (6).

Построение графиков функций основывается на известных приёмах математического анализа.

График действительной функции (6) состоит из двух парабол второго порядка. Первая парабола – $A - A'$ (рис. 1)

$$\begin{aligned} Y &= 0 = \text{const}, & X &= \text{var} \\ \operatorname{Re} A_2(Z) &= X^2 - 2a_1X + a_2 = (X - a_1)^2 + a_{02} \end{aligned} \quad (7)$$

лежит в действительной плоскости ($A_2 0X$) (в плоскости листа рисунка 1). Вершина параболы лежит над плоскостью аргумента, на расстоянии дискриминанта (a_{02}). Абсцисса вершины – это первый коэффициент (a_1) функции

Вторая парабола – $B - B'$ (рис. 1)

$$\begin{aligned} X &= a_1 = \text{const}, & Y &= \text{var} \\ \operatorname{Re} A_2(Z) &= -a_1^2 + a_2 + (iY)^2 = a_{02} + (iY)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

конструктивно совпадающая с параболой $A - A'$, лежит в комплексной плоскости ($X = a_1$) перпендикулярной оси X (плотный штрих), но представляет собой действительную (!) функцию. В развороте на плоскость листа парабола ($B - B'$) показана тонким штрихом ($B_2 - B'_2$).

Вершина параболы $(B - B')$ совпадает с вершиной параболы $(A - A')$. Точка вершины параболы принадлежит параболе $(A - A')$. Общая абсцисса $(X = a_1)$ вершин парабол определяет положение вертикальной оси симметрии получившейся пространственной линейчатой фигуры, представляющей собой график действительной функции второго порядка (6).

Любое из сечений построенной линейчатой фигуры плоскостью $A_2 = const$ параллельной плоскости аргумента определяет двумя точками проколов некоторое алгебраическое уравнение второй степени

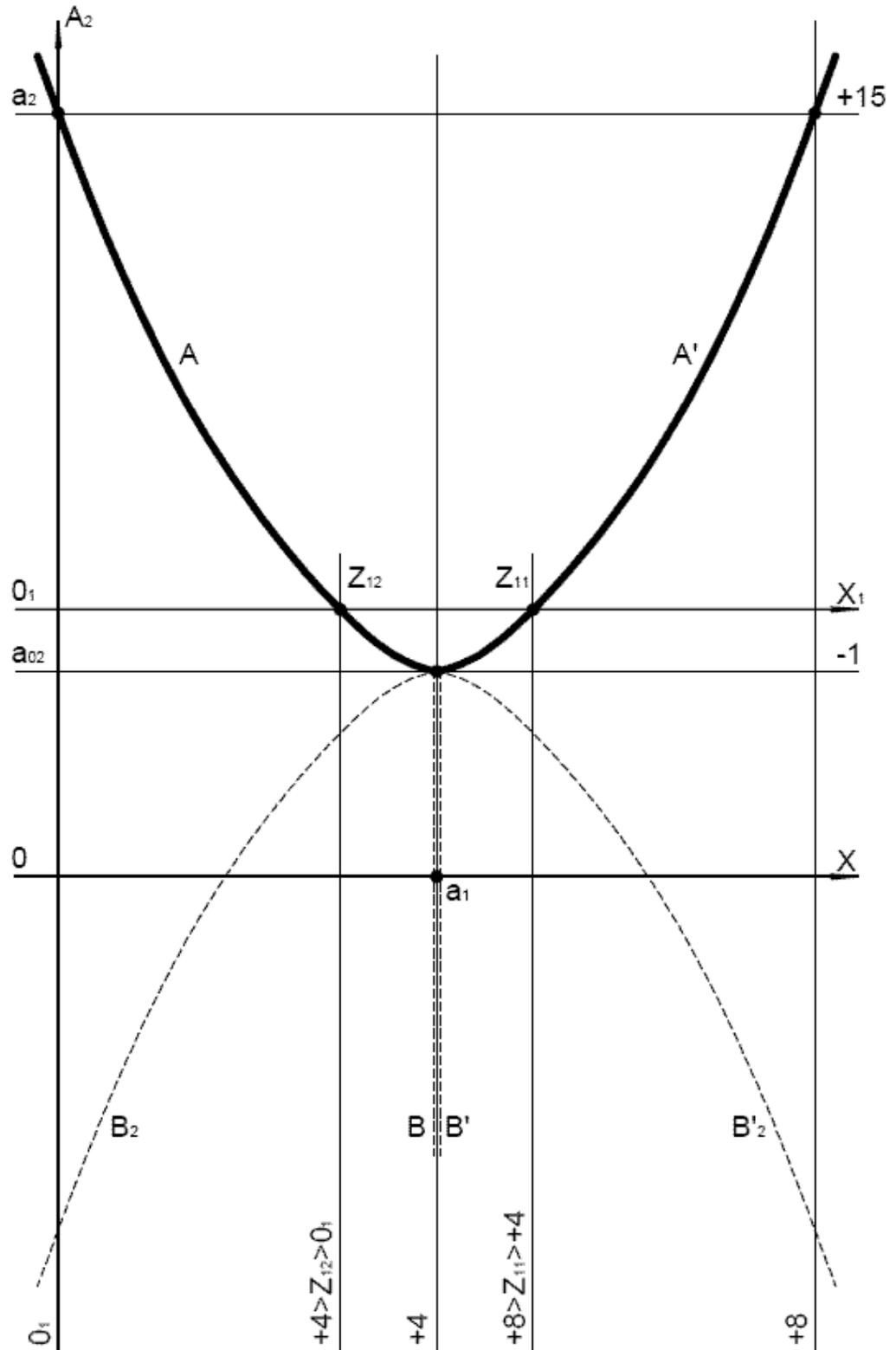
$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = const \quad (9)$$

В частности, если рассматривать сечение фигуры плоскостью аргумента, то уравнение имеет вид

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = 0 \quad (10)$$

Таким образом, график алгебраического уравнения можно рассматривать как след фигуры действительной функции (6) комплексного переменного, оставленный на плоскости аргумента. В связи с чем, действительную функцию (6) будем называть образующей уравнения функцией.

Рис. 1. Фигура функции второго порядка



Положение фигуры функции в пространстве, по вертикали определяется величиной её дискриминанта (a_{02}). Положение по горизонтали определяется величиной первого коэффициента (a_1) функции. Функция и пространство, под которым понимается центр отсчёта и координаты - единое целое, определяемое коэффициентами заданной функции. Как правило, определяется положение фигуры функции относительно её собственной системы координат. Однако, можно и наоборот, определять положение системы отсчёта относительно заданного положения функции. На этом приёме построен описываемый ниже метод графической, качественной и количественной оценки корней (нулей) функции (6) или, что то же самое, корней алгебраического уравнения (10).

Подставив численные значения физических элементов макета в формулы коэффициентов заданной функции (5), найдём величины этих коэффициентов. Например,

$$\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_2 &= 15 \end{aligned} \quad (11)$$

Вычисляем инвариант второго порядка, он же дискриминант заданной (11) функции

$$a_{02} = -a_1^2 + a_2 = -1 \quad (12)$$

и наносим, как на шаблон, на выносные линии построенного рисунка (1) функции второго порядка, численные значения абсциссы (a_1) - оси симметрии фигуры заданной функции (11), ординаты (a_2) пересечения линии фигуры с осью ординат, (a_{02}) - вершин парабол.

Ориентируясь на численные значения проставленных величин, наносим на рисунок след плоскости аргумента (линию O_1X_1) и оси ординат собственного пространства функции, определяя тем самым положение центра отсчёта пространства относительно фигуры заданной функции (11). Отмечая места проколов линиями фигуры функции плоскости аргумента пространства, ориентировочно определяем нули заданной функции (1) или, что то же самое, корни уравнения (10)

$$\begin{aligned} +4 &> Z_{12} > 0 \\ +8 &> Z_{11} > +4 \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, определено - корни заданной функции (10,11) действительны и положительны (13). Истинное значение корней (для сравнения) представляет

$$\begin{aligned} Z_{12} &= +3 \\ Z_{11} &= +5 \end{aligned} \quad (14)$$

и, как видим, соответствует сделанным предварительным выводам (13).

Проведённая качественная оценка характера корней, их величины и расположения на линиях обобщённой фигуры функции представляет собой хоть и наглядную, но предварительную и всего лишь констатирующую часть анализа. Более полная информация о процессе, описываемом заданной функцией может быть получена из рассмотрения её собственной, частной фигуры. Там, только, могут рассматриваться и идеи о совершенствовании модели.

1.3 Формирование требований к новой модели

Решение заданной задачи начинается с построения частной фигуры математической модели. Построение ведём упрощенно, соединяя нанесённые на заготовленную координатную плоскость характерные точки фигуры функции (10,11) отрезками прямых (рис.2).

Точка (a_{02}) - дискриминанта функции, в сечении которой сошлись два действительных корня, а в окрестности берут начало два комплексно сопряжённых. Координаты этой точки известны. Абсцисса (11) - $a_1 = 4$, ордината (12) - $a_{02} = -1$.

Точки сечения функции, в котором один из корней образуемого уравнения равен нулю

$$A_{21}(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = a_2 = const \quad (15)$$

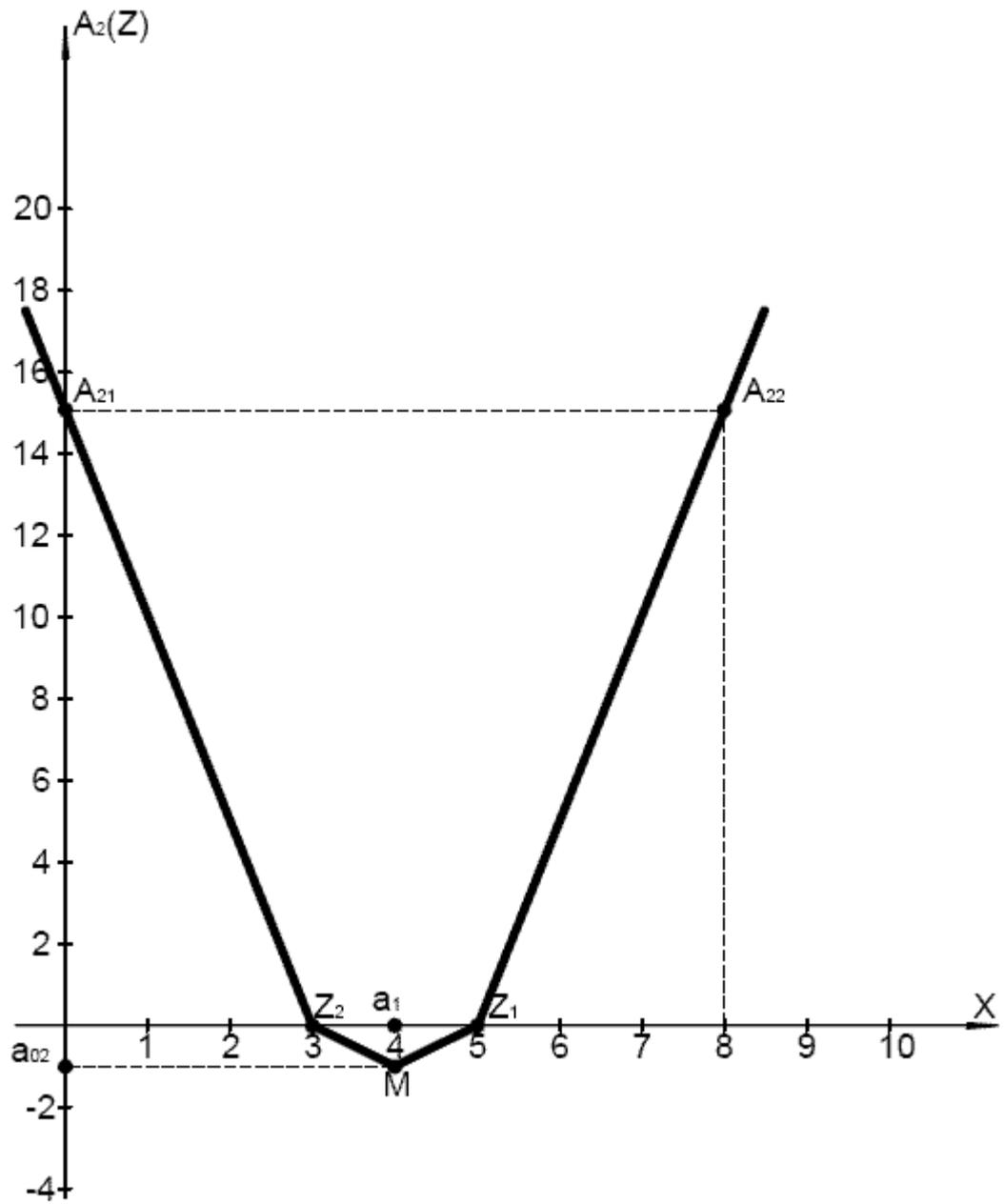


Рис. 2. Фигура функции заданной математической модели

Ординаты точек сечения равны между собой и определяются величиной свободного коэффициента (11) - $A_{21} = A_{22} = a_2 = 15$. Абсциссы точек, в соответствии с построенным уравнением (15), равны - $X(A_{21}) = 0, X(A_{22}) = 2a = 8$.

Точки корней (нулей) функции математической модели требуют не только численного, но и общего решения. Численные решения – констатирующие решения. Решения, указывающие на наличие или отсутствие требуемой качественной характеристики (устойчивость, надежность, экономность и т.д.). Общее решение – это решение в функции номиналов физических элементов и поэтому указывает на возможные пути изменения (или достижения) требуемых значений характеристик.

Общее решение для корней функций второго порядка известно

$$Z_{12} = a_1 \pm i\sqrt{a_{02}} = a_1 \pm i\sqrt{-a_1^2 + a_2} \quad (16)$$

В рассматриваемом случае математической модели (10,11) (численно) корни равны

$$\begin{aligned} Z_1 &= 5 \\ Z_2 &= 3 \end{aligned} \quad (17)$$

Для вычисления корней уравнений более высоких степеней следует пользоваться общими предельными решениями (см. в Интернете работу автора “Решение алгебраических уравнений высоких степеней”).

Применим, для примера, предельное решение к рассматриваемой функции (10,11). Так для первого корня в четвертом приближении имеем

$$\begin{aligned} Z_1(4) &= \sqrt[4]{d_4} = \sqrt[4]{d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2} = \sqrt[4]{(2a_1)^4 - 4(2a_1)^2 a_2 + 2a_2^2} = \\ &= \sqrt[4]{8^4 - 4 * 8^2 * 15 + 2 * 15^2} = \sqrt[4]{706} = 5,15 \end{aligned} \quad (18)$$

результат с ошибкой в 3%. Повторное же (как у Лобачевского-Греффе) применение вычисления в том же четвёртом приближении даёт результат в шестнадцатом приближении

$$Z_1(16) = \sqrt[16]{d_{16}} = \sqrt[16]{d_4^4 - 4d_4^2 d_{44} + 2d_{44}^2} = \sqrt[16]{706^4 - 4 * 706^2 * 15^4 + 2 * 15^8} = 5,00009 \quad (19)$$

с ошибкой не превышающей 0,002%.

Сравнение результатов и формул общего решения (16) и предельного общего (18) показывает, что предельное решение не может быть отвергнуто даже в случае, когда анализу подвергается функция всего лишь второго порядка. Что же касается функций более высоких порядков, то решений (общих, в удобоваримой форме), кроме предельного, вообще не существует.

Построенная по вычисленным координатам характерных точек фигура функции заданной математической модели (10,11) (рис.2), с точки зрения разработчика устройства, может оказаться, имеет недостатком положительность корней (Z_1 и Z_2). Этот недостаток устраняется линейным отображением, зеркально или параллельно переносящим заданную функцию из I-IV квадрантов в III - II квадранты плоскости аргумента. В рассматриваемом случае, первому коэффициенту (a_{21}) функции образа будет придан минусовой знак (рис.3) и нужная величина по ходу более сложных преобразований.

Второй недостаток заданной фигуры (рис.2) может быть усмотрен в относительной близости вершины параболы с ординатой ($a_{02} = -1$) к действительной оси (X) пространства. Желательно, чтобы отношение (p_2) высоты (a, M) к основанию ($Z_1 - Z_2$) (рис.2)

$$p_2(Z_1 - Z_2) = a_{02} \quad (20)$$

в треугольнике нижней части параболы фигуры, было значительно больше. Сейчас это отношение равно $p_2 = 0,5$. Хотелось бы, чтобы у образа это отношение было равным, например, 3 (трём). Реализация второго пожелания (20) обусловлена вычислением и приданием определённых значений коэффициентам новой функции и поэтому возможна только на основании соответствующего выбора значений параметров отображения.

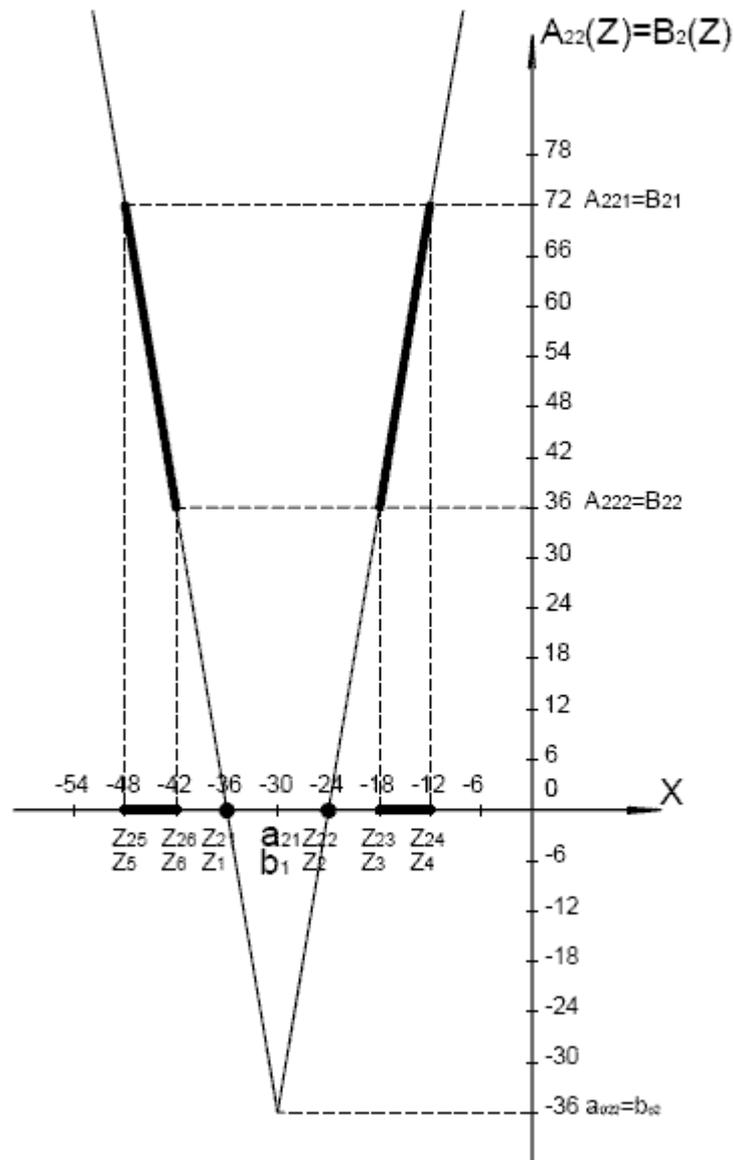


Рис. 3. Желательный и действительный вид обновленной фигуры функции математической модели

Третий недостаток заданной фигуры (рис.2), можно увидеть в относительной близости корней (Z_1 и Z_2) к началу координат. Желательно, чтобы отношение (α) большего из корней к их разности

$$\alpha(Z_1 - Z_2) = Z_1 \quad (21)$$

было больше (в оригинале оно равно $\alpha = 2,5$). Принимаем для обновлённой функции это отношение равным 3 (трём).

Высказанное пожелание (21) обусловлено наложением требования на величину дискриминанта ($Z_{21} - Z_{22}$) синтезируемой

функции, т.е. тоже потребует введения в функцию преобразования специального параметра отображения.

Помимо включения желательных, качественных характеристик модель и макет образа должны сохранить потребительскую функцию (суть) модели и макета-оригинала. Для чего, при переходе от оригинала к образу требуется сохранить неизменными уравнения технологических связей физических элементов макета-оригинала. Несоблюдение этих требований приведет к синтезированию новой, отличной по существу от оригинала модели, в то время как задача состоит только лишь в ее качественной доработке.

Макет-оригинал представляет собой некоторое однозначно определённое количество (σ) физических элементов объединённых монтажом в соответствии с принципиальной схемой. Все σ элементов макета сгруппированы между собой уравнениями технологических взаимосвязей. Количество этих связей должно быть равно количеству σ элементов макета, так как, в противном случае, элементы не могут быть выбраны однозначно ни количественно, ни по номиналу. Именно эти σ уравнений связи должны быть сохранены в синтезируемом образе в процессе модернизации оригинала.

Математическая модель-оригинал представляет собой результат математического описания физического процесса реализованного в макете. Математическая модель – это алгебраическая функция или уравнение. Коэффициенты функции математической модели-оригинала представляют собой величины, зависящие от физических элементов макета-оригинала, но не являются функциями последних. Коэффициенты модели-оригинала записываются в форме функции, однако представляют собой всего лишь формулы для вычисления значений коэффициентов по заданным, фиксированным значениям номиналов физических элементов макета-оригинала. Количество коэффициентов функций математической модели равно ее порядку (ν). Могут среди коэффициентов оказаться и взаимозависимые. Условно, коэффициенты математической модели, после подстановки их численных значений, могут рассматриваться как новые уравнения связи физических элементов макета-оригинала. Совместно с σ уравнениями технологических связей элементов макета-оригинала коэффициенты составят систему из $(\sigma+\nu)$ уравнений с рангом функциональной матрицы, равным σ .

В полученной из $(\sigma+\nu)$ системе уравнений относительно физических элементов макета-оригинала эквивалентны любые подсистемы из σ строк (без повторений). Однако, по завершении перехода к обновленной функции математической модели,

коэффициенты модели-образа получают новые численные значения, отличные от значений коэффициентов модели-оригинала. Новые значения коэффициентов модели-образа будут получены исходя из удовлетворения новых качественных требований к функции-образу. Коэффициенты функции поэтому, представляют собой уже не условные, а действительные, необходимо учитываемые уравнения. Поэтому, в расчетную подсистему из σ уравнений для вычисления номиналов физических элементов макета-образа, должны прежде войти ν уравнений коэффициентов модели-образа и только оставшиеся $(\sigma-\nu)$ из уравнений технологических связей элементов.

Фигура функции-образа соответствующая основным (20,21) пожеланиям представлена на рис.3. Для выполнения вышеуказанных двух (20,21) пожеланий функция отображения должна содержать два параметра, т.е. быть функцией второго порядка. Требование отрицательности нулей синтезируемой функции учитывается попутно.

1.4. Построение обновлённой функции математической модели

Итак, предстоит преобразовать функцию второго порядка (функцию-оригинал)

$$A_2(Z_1) = Z_1^2 - 2a_{11}Z_1 + a_{12} = Z_1^2 - d_1Z_1 + d_{11} \quad (22)$$

Функцией второго порядка (функцией отображения)

$$Z_2 = q_0Z_1^2 + q_1Z_1^1 + q_2Z_1^0 \quad (23)$$

в функцию-образ, размещённую над плоскостью величин второго порядка (23)

$$A_{22}(Z_2) = Z_2^2 - 2a_{21}Z_2^1 + a_{22} \quad (24)$$

Функция-образ – функция тоже второго порядка (подробнее, см. в Интернете работу автора “Отображение алгебраических функций”).

Коэффициенты функции-образа могут быть выражены через коэффициенты функции-оригинала (22) и параметры отображения (q) (23)

$$\begin{aligned} 2a_{21} &= Z_{21} + Z_{22} = d_2 + q_1 d_1 + 2q_2 \\ a_{22} &= Z_{21} Z_{22} = d_{22} + q_1 d_{21} + q_2 d_2 + q_1^2 d_{11} + q_1 q_2 + q_2^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Может быть вычислен и инвариант линейного отображения функции-образа

$$a_{022} = -a_{21}^2 + a_{22} = a_{02}(q_1 + d_1)^2 \quad (26)$$

Искомой, обновлённой, т.е. удовлетворяющей изложенным (п. 1.3) пожеланиям, функцией математической модели является функция-образ (24). Очередная задача заключается в численном вычислении её характеристик – коэффициентов, инварианта и корней. Решение поставленной задачи осуществляем по следующему плану.

Во-первых, выражаем требования (пожелания) в функции коэффициентов образа и далее в форме уравнений от параметров отображения (q_1, q_2) и известных численных коэффициентов функции-оригинала (11). Причём, количество параметров отображения заранее выбрано равным количеству требований к функции-образу. Поэтому количество получающихся уравнений будет равным количеству неизвестных (q) .

Решая построенную систему, во-вторых, находим численные значения параметров отображения обеспечивающих выполнение требований к функции-образу.

В-третьих, подставляя численные значения параметров отображения в выражения (25) коэффициентов функции-образа, находим численные значения коэффициентов функции-образа.

В-четвёртых, численно вычисляем корни функции-образа. Строим и убеждаемся в том, что фигура функции-образа и свойства её коэффициентов полностью соответствуют начально заложенным требованиям.

В-пятых, вычисляем номиналы физических элементов макета функции-образа – это уже новая задача.

Приведённая очерёдность работ – это общий подход. В частности, как правило, задача решается проще. Так в нашем конкретном случае (11), требуемая связь (21) для корней образа будет записана соотношением

$$\alpha(Z_{21} - Z_{22}) = Z_{21} \quad (27)$$

Дополним это соотношение коэффициентами функции-образа

$$\begin{aligned} 2a_{21} &= Z_{21} + Z_{22} \\ a_{22} &= Z_{21}Z_{22} \end{aligned} \quad (28)$$

Исключая из полученной системы (28,27) корни, найдём эквивалент требуемой связи (27) выраженным через коэффициенты функции-образа

$$(2\alpha - 1)^2 a_{22} = 4\alpha(\alpha - 1)a_{21}^2 \quad (29)$$

В комментарии к формулировке требования (21) для параметра связи (29) уже выбрано численное значение. Поэтому рассматриваемое требование можно записать в ($\alpha = 3$) частном виде

$$-24a_{21}^2 + 25a_{22} = a_{21}^2 + 25a_{022} = 0 \quad (30)$$

Требуемое качество (20) функции-образа по части удалённости вершины параболы от действительной оси можно записать формулой

$$p_2(Z_{21} - Z_{22}) = a_{022} \quad (31)$$

С учётом функции отображения (23) вычисляем разность корней функции-образа

$$Z_{21} - Z_{22} = (Z_1^2 - Z_2^2) + q_1(Z_1 - Z_2) = (Z_1 - Z_2)(d_1 + q_1) \quad (32)$$

Имея в виду, что разность корней оригинала равна

$$(Z_1 - Z_2)^2 = d_2 - 2d_{11} = d_1^2 - 4d_{11} = -4a_{02} \quad (33)$$

из приведённых соотношений (33,31,32,25,26), можно получить формулу вычисления первого параметра (q_1) отображения

$$q_1 = \frac{2p_2 - d_1\sqrt{-a_{02}}}{\sqrt{-a_{02}}} \quad (34)$$

В комментариях (20) к введению параметра (p_2) удалённости вершин параболы была выбрана его величина ($p_2=3$), что определяет частное значение параметра (q_1) отображения

$$q_1 = \frac{2 * 3 - 8 * 1}{1} = -2 \quad (35)$$

Далее, последовательно могут быть найдены численные значения: инварианта второго порядка (26) функции-образа

$$a_{022} = -1 * (-2 + 8)^2 = -36 \quad (36)$$

коэффициенты (29) функции-образа

$$a_{21} = \pm \sqrt{-25(-36)} = -30 \quad (37)$$

(здесь знак минус выбран в соответствии с требованиями)

$$a_{22} = \frac{24}{25} * a_{21}^2 = 864 \quad (38)$$

Наконец, корни функции-образа из системы уравнений (28,27)

$$\begin{aligned} Z_{21} &= \frac{2\alpha}{2\alpha - 1} a_{21} = -36 \\ Z_{22} &= 2a_{21} - Z_{21} = -24 \end{aligned} \quad (39)$$

Фигура обновлённой, с учётом пожеланий (требований), функции математической модели представлена на рис.3. Она полностью совпала с намеченным эскизом после нанесения масштабной сетки (чисел на оси координат). Характеристики синтезированной функции

$$A_{22}(Z_2) = Z_2^2 + 2 * 30 * Z_2 + 864 \quad (40)$$

соответствуют заданным требованиям (27,31,36,39)

$$\begin{aligned}
 \alpha(Z_{21} - Z_{22}) &= Z_{21} & p_2(Z_{21} - Z_{22}) &= a_{022} \\
 3[-36 - (-24)] &= -36 & 3[-36 - (-24)] &= -36
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Рисунок фигуры функции (рис.3) позволяет различать две разновидности математических моделей.

Первая – характеризуется постоянством значения функции $A_{22}(Z) = const$ и соответственно выходного параметра макета. Такой макет описывается уравнениями. Корни (Z_1 и Z_2) уравнения – это значения аргумента образующей функции в нулях, каждый из корней определяет соответствующий входной параметр макета.

Точка линии образующей функции в нуле $A_{22}(Z_1 \text{ или } Z_2)$ – это рабочая точка процесса, фиксированный выбором комплектующих элементов выходной параметр макета, его функция.

Изменение входного параметра макета, в любую сторону от значения определяемого корнями (Z_1 или Z_2) модели, выводит макет из рабочего состояния, так как соответствующей рабочей точки нет. Новая рабочая точка может появиться только после изменения величин коэффициентов (a_{21}, a_{22}) или самой функции A_{22} . Т.е. после изменения величин номиналов элементов входящих в макет, или, проще, включения обратных связей на регулирующие элементы.

Другая разновидность математической модели предполагает наличие непрерывной взаимной связи между изменяющимся входом и соответственно изменяющимся выходом макета. Математическая модель в этом случае – функция, а макет – регулируемый процесс. Здесь могут быть выбраны взаимосвязанные интервалы изменения входного и выходного параметров макета и, соответственно, аргумента и функции математической модели.

1.5. Вычисление номиналов физических элементов синтезированной функции модели

Основной трудностью настоящего параграфа является изменение представления о трактовке отображения.

Дело в том, что до сих пор, намеренно, отображение трактовалось как перенос функции оригинала из своего, в пространство образа, в пространство другого измерения. Такая трактовка возможна и она помогла более осязательно воспринять отображение. В своем случае она физически единственна.

Здесь же мы говорим о преемственности оригинала и образа, говорим о едином устройстве, процессе, явлении и пространстве соответственно. Следовательно, должно перейти и к новой трактовке отображения и рассматривать оригинал и образ не как функции в разных пространствах, а как функции (оригинал и образ) в одном и том же пространстве, в одной и той же системе координат.

Наиболее естественно альтернативные трактовки воспринимаются в случае линейного отображения. Здесь, в равной степени допускается говорить как о переносе функции оригинала на другую плоскость, так и о смещении ее по плоскости аргумента пространства оригинала в другое положение. Точно также и в случае нелинейного отображения. Ведь речь идет только о трактовке (о сервисе).

Далее мы будем говорить об одном пространстве. Значения аргумента функции - образа (23) будем размещать на плоскости аргумента (Z_1) функции - оригинала. Ведь на плоскости Z_1 есть числа равные Z_2 . Значения функции - образа (24) будем размещать на оси ординат функции - оригинала (22). Ведь на оси $A_2(Z)$ есть числа равные $A_{22}(Z_2)$.

Если возникают трудности с размерностью, то предварительным отображением всегда можно перейти к безразмерной форме как заданной функции, так и всех её последующих отображений, сократив все члены их на наименование.

Преобразования закончены, обновлённую функцию (40) можно записать в обычных обозначениях, без сложных индексов и форме, например, биномиальной

$$B_2(Z) = Z^2 - 2b_1Z + b_2 \quad (42)$$

и считать её заданной над той же плоскостью (Z_1) величин первого порядка, что и функция-оригинал (22). Синтезированная функция (42) стала новым оригиналом. У неё тот же по размерности входной параметр и тот же выходной, что и у функции-оригинала (22). У неё новые численные значения коэффициентов и корней, новая по-новому расположенная фигура.

Новой математической модели соответствует и новый физически воплощающий её макет. Однако, старыми и неизменными остаются принцип работы макета, операторы уравнений связи его физических элементов, операторы коэффициентов моделей оригинала и образа. Изменились лишь под новую абстрактную математическую модель количественные значения номиналов физических элементов макета.

Например. Пусть макет электрического устройства состоит из омических сопротивлений R, L, C - резистора, ёмкости и индуктивности. А уравнения коэффициентов и связи физических элементов выражаются формулами

$$\begin{aligned} 2a_1 &= R_1 + L_1 + C_1 \\ a_2 &= R_1 C_1 + R_1 L_1 \\ L_1 &= C_1 \end{aligned} \quad (43)$$

Тогда, в соответствии с изложенным, уравнения коэффициентов математической модели, и связи элементов обновлённого макета, выражаются теми же, инвариантными отображению формулами, операторами

$$\begin{aligned} 2b_1 &= R_2 + L_2 + C_2 \\ b_2 &= R_2 C_2 + R_2 L_2 \\ L_2 &= C_2 \end{aligned} \quad (44)$$

Однако, в новой модели изменены все количественные значения как коэффициентов функций, так и элементов макета.

Формулы (43) выражения коэффициентов функции-оригинала через элементы макета-оригинала получены при построении математической модели. Именно этими формулами были вычислены численные значения коэффициентов (a_1 и a_2) (11) функции оригинала. Теперь же известны формулы (44) выражения

коэффициентов (b_1 и b_2) синтезированной функции. Вычислены численные значения коэффициентов (b_1, b_2) (37,38), а предстоит вычислить численные значения номиналов физических элементов (R_2, L_2, C_2) макета функции-образа.

Представим уравнения системы (44) разрешёнными относительно одного из параметров, например, (R)

$$\begin{aligned} R + (L + C) &= 2b_1 \\ R(L + C) + 0 &= b_2 \end{aligned} \quad (45)$$

Необходимым условием существования системы уравнений (45) является требование неравенства нулю её определителя

$$(L + C)^2 \neq 0 \quad (46)$$

Полагаем, что это условие выполняется, так как макет работает.

Достаточным условием совместности уравнений системы (45) является требование равенства нулю остатка от деления одного из уравнений на другое (алгоритм Евклида). Иными словами, достаточное условие – это требование наличия общего множителя у уравнений системы. Остаток определяем как результат подстановки выделенного параметра (R) из одного уравнения (45) в другое

$$[2b_1 - (L + C)](L + C) = b_2 \quad (47)$$

откуда может быть определена сумма ($L + C$) номиналов элементов

$$(L + C) = b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - b_2} \quad (48)$$

Подключая к вычислениям уравнение связи (44) элементов макета, можно найти и номиналы реактивных элементов (L, C) макета синтезированной математической модели.

Повторное макетирование устройства в соответствии с обновлённой (42) математической моделью и проверка макета в работе может потребовать новой доработки в части положения рабочей точки и каких бы то ни было характеристик синтезированной модели. Доработка или корректировка проводится без повторного отображения, на основе анализа общих решений функции модели выраженных через элементы макета.

Так в рассматриваемом примере (43,44), исходя из общего решения (16), можно найти

$$Z_{1,2} = b_1 \pm i\sqrt{b_{02}} = \frac{R+L+C \pm i\sqrt{(R+L+C) - LR(L+C)}}{2} \quad (50)$$

а, с допуском до 3%, из предельного решения (18) – соответственно

$$Z_1 = \sqrt[4]{d_1^2 - 4d_1^2 d_{11} + d_{11}^2} = \sqrt[4]{(R+L+C)^4 - 4(R+L+C)R(L+C) + 2R^2(L+C)} \quad (51)$$

Исследование общих решений (50,51) показывает какой из физических элементов макета и в какую сторону следует изменить для того, чтобы “сдвинуть” рабочую точку или какую-либо другую характеристику процесса в требуемом направлении. Формулы общего решения (50, 51) необходимы также для предварительного «ощупывания» макета-оригинала. Использование их может позволить вообще отказаться от отображения в процессе синтезирования модели-образа, но уже на объективной, систематизированной основе.

2. Функции третьего порядка

Анализ математической модели третьего порядка по -прежнему основан на исследовании обобщённого рисунка фигуры функции. Действительной функции от комплексного переменного ($Z = X + iY$).

Аналитически, будем рассматривать функцию в центральной системе координат (первый коэффициент равен нулю)

$$A_3(Z) = Z^3 + 3a_{02}Z - a_{03} \quad (52)$$

Это позволяет упростить выкладки. Построение же фигуры функции, для общности, будет проводиться в периферийной системе, т.е. со сдвигом центра тяжести фигуры на величину первого коэффициента - a_1 (рис.4).

Аналогично функции второго порядка, действительная функция третьего порядка, в параметрах переменной, записывается системой из двух формул

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_3(Z) &= X^3 + 3[(iY)^2 + a_{02}]X - a_{03} \\ i \operatorname{Im} A_3(Z) &= (iY)[(iY)^2 + 3X^2 + 3a_{02}] = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Фигура графика функции состоит из четырёх ветвей (рис.4)
Ветвь $A - A'$ фигуры

$$\begin{aligned} Y &= 0 \\ \operatorname{Re} A_3(Z) &= X^3 + 3a_{02}X - a_{03} \end{aligned} \quad (54)$$

полученная из совместного решения формул системы (53) определяет действительные корни образуемых в горизонтальных сечениях уравнений. Кривая лежит в плоскости $A_3 0X$, плоскость листа, и нанесена более плотной линией.

Ветвь $B - B'$ фигуры

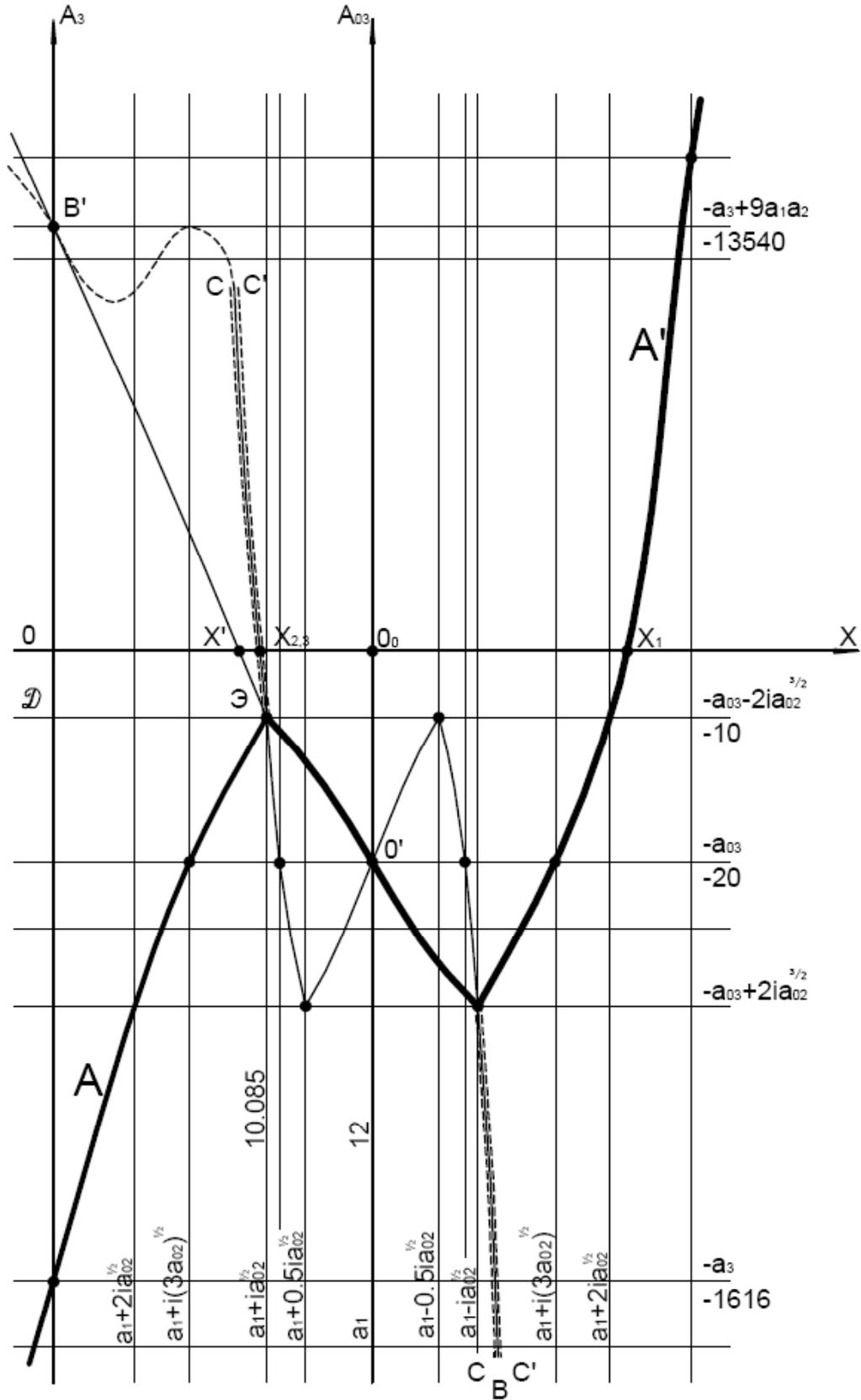
$$\begin{aligned} Y &\neq 0 \\ -\operatorname{Re} A_{03}(Z) &= (2X)^3 + 3a_{02}(2X) + a_{03} \end{aligned} \quad (55)$$

полученная из совместного решения формул системы (53), по форме, – вдвое сжатая в поперечнике кривая $A - A'$. Ветвь определяет середины корней образуемых уравнений. Причём корней как комплексных так и действительных. Кривая $B - B'$, как и кривая $A - A'$ лежит в плоскости $(A_3 0X)$ листа рисунка и нанесена более тонкой линией.

Ветви $C - C'$ фигуры проекции которых на плоскость аргумента записываются уравнением (53)

$$\begin{aligned} Y &\neq 0 \\ 0 &= (iY)^2 + 3X^2 + 3a_{02} \end{aligned} \quad (56)$$

Рис. 4. Фигура функции третьего порядка



представляют собой пространственные параболы второго порядка, лежащие в изогнутой плоскости нормальной к плоскости $(A_3, 0X)$ листа. Вершины парабол $C - C'$ соприкасаются с точками экстремумов ветви $A - A'$. Осевыми линиями парабол являются отходящие ветви кривой $B - B'$. Параболы $C - C'$ определяют комплексные корни образуемых функцией (53) уравнений.

Для функции третьего порядка, из анализа двух её производных достаточно просто определяются координаты точек экстремумов и перегиба. Дополняя эти точки точками пересечения оси ординат линиями фигуры функции (53), проставляем их координаты на выносных линиях (рис.4). Полученная сетка известных координатных линий позволяет произвести оценку знаков и величин корней любого из частно образованных функцией (53) уравнений. При необходимости, построенная сетка может быть дополнена промежуточными линиями и превращена в вычислительную сетку.

Рассмотрим числовой пример уравнения третьей степени и его образующей функции

$$A_3(Z) = Z^3 - 36Z^2 + 421Z - 1616 = 0 \quad (57)$$

Выписываем биномиальные коэффициенты заданного уравнения (57)

$$\begin{aligned} a_1 &= 12 \\ a_2 &= 140,3 \\ a_3 &= 1616 \end{aligned} \quad (58)$$

Вычисляем инварианты линейного отображения уравнения (57)

$$\begin{aligned} a_{02} &= -a_1^2 + a_2 = -11\frac{1}{3} \\ a_{03} &= 2a_1^2 - 3a_1a_2 + a_3 = 20 \end{aligned} \quad (59)$$

ориентируясь на знаки первого коэффициента (a_1) и инварианта третьего порядка (a_{03}), заключаем, что центр собственной системы отсчёта образующей функции заданного уравнения (57) находится во втором квадранте плоскости $(A_{03}, 0', a_{03})$.

Двигаясь по оси (a_{03}) в направлении оси ординат системы отсчёта образующей функции заданного уравнения, вычисляем ординаты экстремума (\mathcal{E}) линии $A - A'$ фигуры образующей функции

$$-a_{03} - 2i(a_{02})^{3/2} = -10 \quad (60)$$

и точки (B') пересечения линии $B - B'$ с осью ординат

$$-a_3 + 9a_1a_2 = 13540 \quad (61)$$

Сопоставляя полученные значения величин ординат, заключаем, что действительный корень (X_1) заданного уравнения (57) положителен, комплексные – имеют положительную действительную часть ($X_{2,3}$).

С целью более точного вычисления величин корней определяем абсциссу экстремума (\mathcal{E}) (57) линии $A - A'$

$$a_1 + ia_{02}^{1/2} = 10,085 \quad (62)$$

Из аппроксимирующих треугольников $B'D\mathcal{E}$ и $B'OX'$ приближённо определяем действительную часть комплексно сопряжённых корней заданного уравнения

$$X' = \frac{D\mathcal{E} * OB'}{B'D} = \frac{10,085 * 13540}{13550} = 10,07756 \quad (63)$$

Мнимую часть корней определяем из уравнения системы (53) образующей функции, но в периферийной системе координат, по найденному значению действительной части корней

$$(iY) = \sqrt{-3(X')^2 + 6a_1(X') - 3a_2} = \sqrt{-0,0873} = i0,295 \quad (64)$$

Действительный корень Z_1 заданного уравнения (57) получаем из формулы для его первого коэффициента по найденным комплексно сопряжённым корням Z_2 и Z_3

$$Z_1 = 3a_1 - Z_2 - Z_3 = 3 * 12 - (10,07756 + i0,295) - (10,07756 - i0,295) = 15,84 \quad (65)$$

Для сравнения и оценки корректности рисунка фигуры (рис. 4) отметим, что истинно, корни заданного (57) уравнения соответственно равны

$$\begin{aligned} Z_1 &= 16 \\ Z_{2,3} &= 10 \pm i \end{aligned} \quad (66)$$

т.е. построенная фигура функции третьего порядка соответствует действительности.

Теперь, когда обобщенная фигура функции построена, выявляется возможность более точного вычисления численного значения корней заданного уравнения (57) и построения его общего решения. Из построения фигуры функции (рис.4) и аналитических выражений (57,55) следует, что в центральной системе координат (A_{03}, O_0, X) действительный корень (X_{01}) заданного уравнения (57) и действительный корень (X_{023}) функции средин (55) корней связаны соотношением

$$2X_{023} = X_{01} \quad (67)$$

К тому же, действительный корень функции (55) средин корней есть действительная часть комплексно сопряжённых корней заданного (57) уравнения.

Вычисляем численное значение действительного корня заданной функции (57,58,59), в четвёртом приближении, в центральной системе координат, где в соответствии с таблицей моментов

$$\begin{aligned} 3a_{01} = m_{01} &= 0 & m_4 &= 2m_{011} = 2(-11)^2 = 242 \\ 3a_{02} = m_{011} &= -11 & m_{44} &= m_{011}^2 + 4m_{011}m_{011} = -2959 \\ a_{03} = m_{0111} &= 20 & m_{444} &= m_{011}^4 = 20^4 \end{aligned}$$

$$Z_{01}(4) = \sqrt[4]{m_4} = \sqrt[4]{242} = 3,94 \quad (68)$$

Делаем повторное отображение на плоскость четвёртого порядка, где

$$m_{16} = m_4^4 - 4m_4^2m_{44} + 2m_{44}^2 + 4m_4m_{444} = 427778 * 10^4 \quad (69)$$

и вычисляем тот же корень в шестнадцатом приближении

$$Z_{01}(16) = \sqrt[16]{m_{16}} = 3,999 \quad (70)$$

После проверки, принимаем корень равным

$$Z_{01} = X_{01} = 4 \quad (71)$$

т.е. четвертое приближение даёт ошибку до 0,5%, а шестнадцатое до 0,006% по отношению к истинному значению ($Z_1 = a_1 + Z_{01} = 16$) корня.

Действительная часть комплексно сопряжённых корней уравнения (57), в центральной системе ($A_{03}0_0X$) координат (67,71), равна

$$X_{02,3} = \frac{1}{2} X_{01} = 2 \quad (72)$$

а в своей собственной (периферийной), в соответствии с рисунком (4), равна

$$X_{2,3} = a_1 - X_{02,3} = 10 \quad (73)$$

Комплексная часть сопряжённых корней, в центральной системе координат вычисляется из уравнения проекции (53) фигуры функции на плоскость аргумента

$$(iY)^2 = -3X^2 - 3b_{02} = -3 * 2^2 - (-11) = -1 \quad (74)$$

по известному значению действительной части (72).

Таким образом, комплексные корни заданного уравнения (57) получаются (72,74) равными (в центральной системе координат)

$$Z_{02,3} = X_{02,3} \pm iY = 2 \pm i \quad (75)$$

а в периферийной (73,74), заданной –

$$Z_{2,3} = X_{2,3} \pm iY = 10 \pm i \quad (76)$$

Высокая степень точности найденных численных величин корней переходит и на общие приближённые, предельные решения. Так, если

ограничиться точностью до 0,5%, то предельное общее решение может быть построено в четвёртом приближении.

Действительный корень заданного уравнения (57), в соответствии с рисунком (4) и вычисленным значением корня в центральной системе координат (68), равен

$$Z_1 = a_1 + Z_{01} = a_1 + \sqrt[4]{m_4} = a_1 + \sqrt[4]{2(3a_{02})^2} = a_1 + \sqrt[4]{2} \sqrt{|3a_{02}|} = 15,94 \quad (77)$$

Комплексно сопряжённые корни

$$Z_{2,3} = X_{2,3} \pm iY \quad (78)$$

строим отдельно для действительной и мнимой частей.

Действительная часть, в соответствии с рис.4 и другими (68,71,72,73) промежуточными результатами, может быть записана формулой

$$X_{2,3} = a_1 - \frac{1}{2} Z_{01} = a_1 - \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \sqrt{|3a_{02}|} = 10,028 \quad (79)$$

Мнимая часть корней вычисляется по его найденной действительной части (79) из уравнения (53), проекции фигуры образующей функции на плоскость аргумента, (68,71,74)

$$iY = \sqrt{-(3X_{2,3} + 3a_{02})} = i \sqrt{\frac{3}{4} \sqrt{2(3a_{02})^2} + 3a_{02}} = i \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} + 1 * \text{sign}(a_{02})\right) |3a_{02}|} = i0,817 \quad (80)$$

Выразив инвариант (a_{02}) через физические элементы макета, формулы общего предельного решения (77,79,80) можно использовать для проведения корректировки математической модели описываемого заданным (57) уравнением процесса.

На рисунке 5а представлена фигура модели заданного уравнения (57) в собственной системе координат. Там же (рис.5с) высказано требование к новой (синтезируемой) функции – иметь все три корня действительными (на поясе a_{03} фигуры, рис.4,5) и отрицательными.

Заданное преобразование выполняем в два этапа – линейное (по горизонтали, оставаясь в заданной плоскости $Z = X + iY$ аргумента и

плоскости A_3O_X пространства) отображение в положение рис.5в; и, во-вторых, – нелинейное смещение по вертикали (оставаясь в плоскости A_3O_X) из положения рис.5в в новое положение рис.5с. Можно рассматривать и другие пути преобразования.

Линейное отображение осуществляем функцией

$$V = q_0Z + q_1Z^0 \quad (81)$$

Получаем уравнение-образ

$$B_3(V) = V^3 - 3g_1V^2 + 3g_2V - g_3 = 0 \quad (82)$$

и его коэффициенты

$$\begin{aligned} g_3 &= q_1^3 + 3a_1q_1^2 + 3a_2q_1 + a_3 \\ g_2 &= q_1^2 + 2a_1q_1 + a_2 \\ g_1 &= q_1 + a_1 \end{aligned} \quad (83)$$

выраженными через параметр (q_1) отображения и коэффициенты (58) заданного (57) уравнения.

Параметр отображения выбираем так, чтобы первый коэффициент уравнения-образа оказался равным (например)

$$g_1 = -2a_1 \quad (84)$$

Т.е. (83) $q_1 = -3a_1$, а корни синтезируемой модели приблизительно вдвое больше по модулю чем у оригинала (57).

Промежуточная математическая модель принимает вид (82,83,84)

$$B_3(V) = V^3 + (6a_1)V^2 + (9a_1^2 + 3a_2)V + (9a_1a_2 - a_3) \quad (85)$$

все значения которой, согласно требованиям, уменьшаем на величину (a_{03}) третьего инварианта линейного отображения уравнения оригинала (57)

$$\begin{aligned} C_3(V) &= B_3(V) - a_{03} = V^3 - 3c_1V^2 + 3c_2V - c_3 = \\ &= V^3 + (6a_1)V^2 + (9a_1^2 + 3a_2)V + (2a_1^3 - 12a_1a_2 + 2a_3) \end{aligned} \quad (86)$$

получив тем самым выражение новой математической модели и общие формулы перерасчёта коэффициентов функции-оригинала (57) в коэффициенты функции-образа (86)

$$\begin{aligned}
3c_1 &= -6a_1 = -72 = m_1 \\
3c_2 &= 9a_1^2 + 3a_2 = 1717 = m_{11} \\
c_3 &= 2a_1^3 - 12a_1a_2 + 2a_3 = -13560 = m_{111}
\end{aligned} \tag{87}$$

Таким образом, окончательно обновлённое уравнение и его образующая функция принимает вид

$$C_3(V) = V^3 - (-72)V^2 + 1717V - (-13560) = 0 \tag{88}$$

Численные, близкие к точным значениям корней проще и быстрее находить через повторные отображения, начиная с отображения на плоскость четвёртого порядка (у Лобачевского, квадрирования начинались с плоскости второго порядка. Лобачевский не знал метода отображений, поэтому не мог перейти на плоскость более высокого порядка, не мог доказать существование предела квадрирования, ни построить общее решение, но он предвосхитил общую идею численного решения. В настоящей работе, как и в других работах автора, строятся только общие решения уравнений – решения в коэффициентах. Численные решения получают подстановкой значений коэффициентов и только для того, чтобы оценить истинность общих решений.) Предложенная последовательность решений включает в себя 4-е, 16-е, 64-е, 256-е и т.д. приближения (степени четырёх).

Моменты для вычисления четвёртого приближения берём из таблиц работ автора

$$\begin{aligned}
m_4 &= m_1^4 - 4m_1^2m_{11} + 2m_{11}^2 + 4m_1m_{111} \\
m_{44} &= m_{11}^4 - 4m_1m_{11}^2m_{111} + 2m_1^2m_{111}^2 + 4m_{11}m_{111}^2 \\
m_{444} &= m_{111}^4
\end{aligned} \tag{89}$$

Моменты для вычисления последующего приближения строятся очередной заменой подстрочных индексов предыдущего приближения

$$\begin{aligned}
m_{16} &= m_4^4 - 4m_4^2m_{44} + 2m_{44}^2 + 4m_4m_{444} \\
m_{1616} &= m_{44}^4 - 4m_4m_{44}^2m_{444} + \dots \\
\text{.....} & \\
m_{64} &= m_{16}^4 - 4m_{16}^2m_{1616} + 2m_{1616}^2 + 4m_{16}m_{161616} \\
m_{6464} &= m_{1616}^4 - \dots
\end{aligned} \tag{90}$$

по ним же вычисляются и численно.

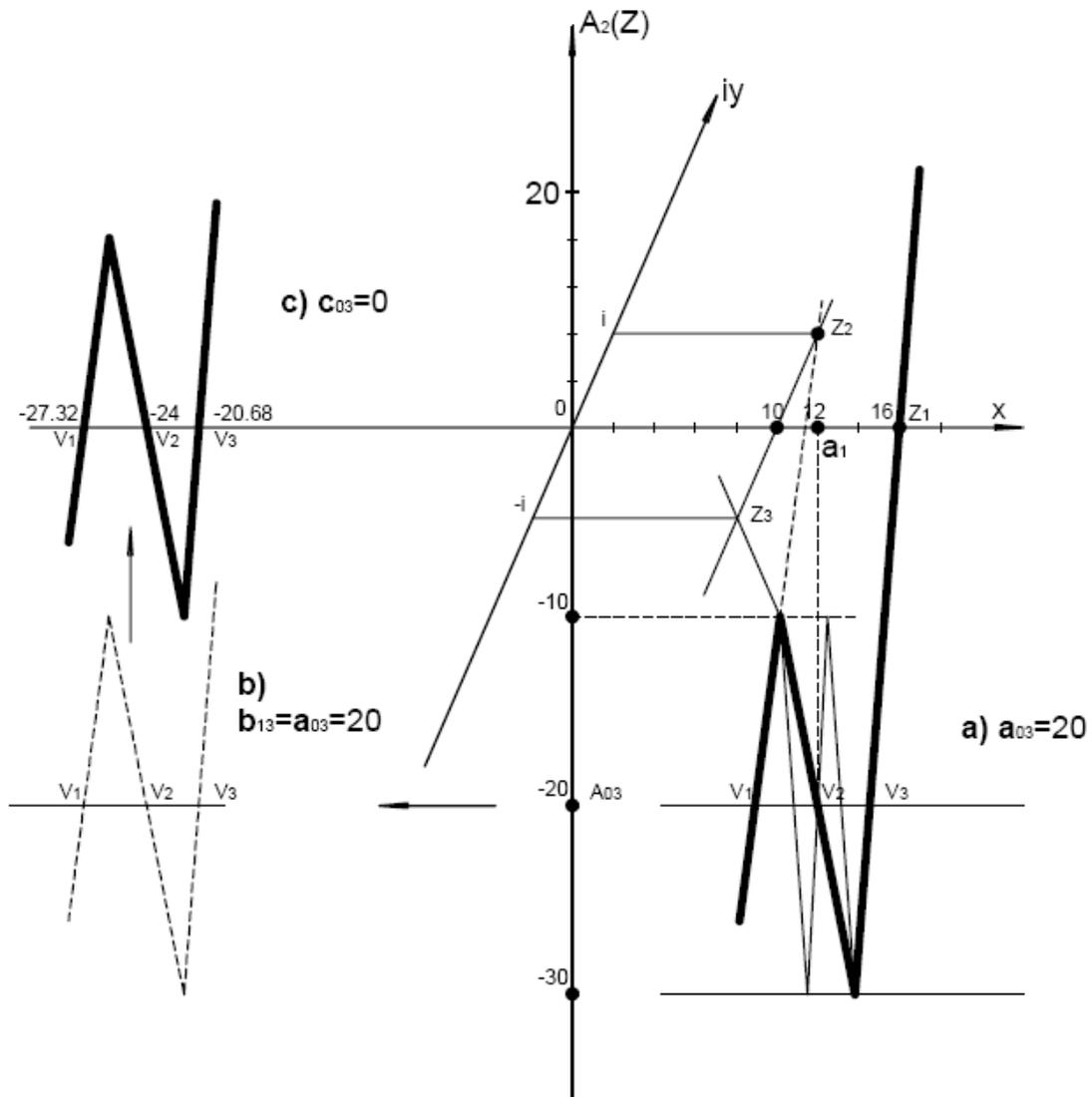


Рис. 5. Заданная функция третьего порядка и ее синтезируемый образ.

- Заданное положение
- Промежуточное положение
- Новое положение

При использовании ёмких вычислительных средств, можно идти и более мелкими шагами Лобачевского. Путь более длинный, но ещё проще программирование и более наглядней динамика приближений

$$\begin{aligned}
 m_2 &= m_1^2 - 2m_{11} \\
 m_{22} &= m_{11}^2 - 2m_1m_{111} \\
 m_{222} &= m_{111}^2 \\
 \\
 m_4 &= m_2^2 - 2m_{22} \\
 m_{44} &= m_{22}^2 - 2m_2m_{222} \\
 m_{444} &= m_{222}^2
 \end{aligned} \tag{91}$$

$$\begin{aligned}
 m_8 &= m_4^2 - 2m_{44} \\
 m_{88} &= m_{44}^2 - 2m_4m_{444} \\
 m_{888} &= m_{444}^2
 \end{aligned}$$

..... И т.д.

Численное решение построенной функции (88) оказывается значительно проще в силу особых условий её создания.

Так, средний (Z_2) корень совпадает с центром тяжести фигуры и, следовательно, равен первому коэффициенту (87)

$$Z_2 = c_1 = -24 \tag{92}$$

частное от деления синтезированной функции (86) на решение (92) представляет собой уравнение второго порядка

$$Z^2 - 2c_1Z + 3c_2 - 2c_1^2 = 0 \tag{93}$$

и равный нулю остаток

$$c_{03} = 2c_1^3 - 3c_1c_2 + c_3 = 0 \tag{94}$$

что позволяет вычислить два оставшихся корня новой математической модели (88,87,93)

$$Z_{1,3} = c_1 \pm \sqrt{3c_1^2 - 3c_2} = 24 \pm \sqrt{11} = 24 \pm 3,32 \tag{95}$$

Корни и другие характерные точки фигуры обновлённой модели точно соответствуют заложенным требованиям, в чём можно убедиться, делая контрольные вычисления по формулам выносных линий (рис.4,5) фигуры образующей функции.

Вычисление значений номиналов физических элементов макета соответствующих обновлённой функции производится по-прежнему на основе численного представления (88) последней. Принципиальная схема построения макета - образа и уравнение связи элементов нового макета те же, что и у макета-оригинала. Изменяются только номиналы комплектующих, поэтому выражения коэффициентов моделей через элементы макетов тоже неизменны.

Предположим, что для макета-оригинала уравнения связи и выражения для коэффициентов имеют вид и соответственно (57) значения

$$\begin{aligned}
 L_1 - 2M_1 &= 0 \\
 3a_1 &= R_1 + L_1 + C_1 + M_1 = 36 \\
 3a_2 &= R_1L_1 + R_1C_1 + M_1^2 = 421 \\
 a_3 &= R_1L_1C_1 = 1616
 \end{aligned}
 \tag{96}$$

тогда для вновь синтезируемого макета (88) имеем соответственно систему

$$\begin{aligned}
 L_2 - 2M_2 &= 0 \\
 3c_1 &= R_2 + L_2 + C_2 + M_2 = -72 \\
 3c_2 &= R_2L_2 + R_2C_2 + M_2^2 = 1717 \\
 c_3 &= R_2L_2C_2 = -13560
 \end{aligned}
 \tag{97}$$

Обратим внимание ещё раз на тот факт, что система уравнений (96) макета-оригинала получена в результате описания принципиальной схемы проектируемого устройства и предназначена для вычисления численных значений коэффициентов и связи физических элементов модели-оригинала по заданным номиналам элементов макета.

Система уравнений (97) макета-образа получена (построена) как инвариант преобразования оригинала и предназначена для вычисления численных значений номиналов элементов макета-образа по известным численным значениям коэффициентов модели - образа.

Решение систем алгебраических уравнений представляет собой самостоятельный предмет, рассматриваемый в специальной работе автора.

3. Функции четвертого и пятого порядков

Действительная функция четвертого порядка над плоскостью комплексной переменной представляется системой

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_{04}(Z) &= X^4 + 6a_{02}X^2 - 4a_{03}X + a_{04} + (iY)^2[6X^2 + 6a_{02} + (iY)^2] \\ i \operatorname{Im} A_{04}(Z) &= (iY)[X^3 + 3a_{02}X - a_{03} + (iY)^2 X] = 0 \end{aligned} \quad (98)$$

Здесь имеется в виду, что функция размещена в своей центральной системе координат ($a_1 = 0$).

Функция представляет собой линейчатую пространственную фигуру показанную на рис.б.

Основной кривой фигуры является плоская парабола четвертого порядка

$$\begin{aligned} Y &= 0 \\ \operatorname{Re} A_{04}(Z) &= X^4 + 6a_{02}X^2 - 4a_{03}X + a_{04} \end{aligned} \quad (99)$$

Парабола лежит в плоскости $A_4 0X$ системы координат (плоскость листа рисунка) и в точках сечения с плоскостью аргумента определяет действительные корни образуемого уравнения. На рисунке парабола вычерчена более плотной линией и обозначена буквами $A - A'$.

Линии $B - B$ и $B' - B'$ фигуры, по аналогии со средними линиями фигур образующих функций второго и третьего порядков, построены как геометрические места середин всевозможных пар участков корнеобразующих кривых $A - A'$ и $C - C'$. Аналитически, линии B получаются исключением из выражений системы (98) неравной нулю мнимой части переменной

$$\begin{aligned} Y &\neq 0 \\ A_{04}(Z) &= -\frac{1}{X^2}[4X^6 - 12a_{02}X^4 + (a_{04} - 9a_{02}^2)X^2 + a_{03}^2] \end{aligned} \quad (100)$$

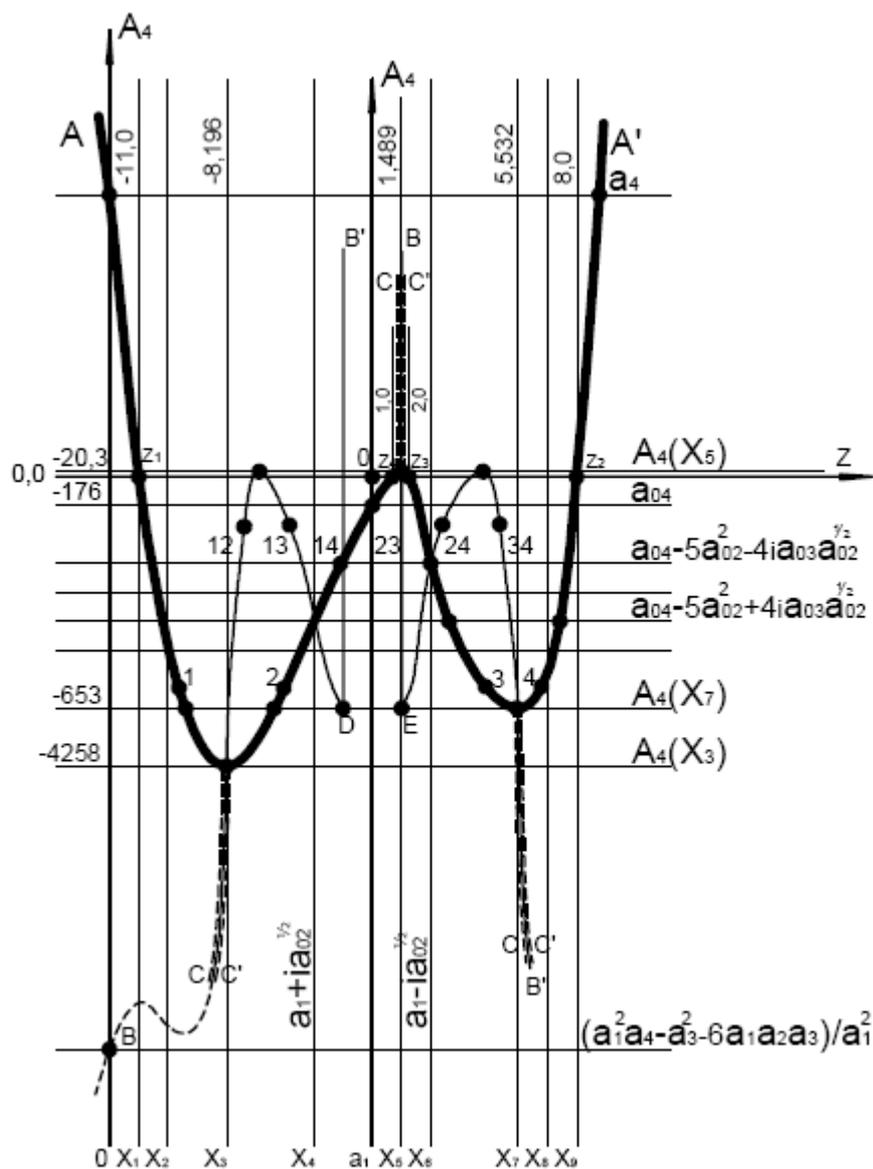


Рис. 6. фигура функции четвертого порядка

Из построения и полученной формулы (100) кривой следует, что она чётносимметрична и имеет разрыв на вертикали центра тяжести фигуры. Причём, на совмещённом рисунке кривых ($A-A'$) и (B) разрыв кривой (B) расширяется в интервал (DE), где каждая из половин кривой (B) продолжается из точки разрыва сопряжённой

части кривой. Линии $B-B$ и $B-B'$ могут быть представлены произведением сопряжённых парабол третьего порядка. Кривые (B) лежат в плоскости $A_4O X$ (листа рисунка) и вычерчены более тонкими линиями.

Исключением действительной части (X) переменной Z из системы (98) функции могут быть получены кривые $C-C'$ фигуры. Кривые $C-C'$ лежат в полуплоскостях нормальных к плоскости $A_4O X$ и изогнутых отходящими ветвями линий B являющихся осевыми линиями парабол $C-C$. Линии $C-C'$, условно, изображены штриховыми отрезками вдоль отходящих ветвей линий B , определяющих действительные части комплексных корней образуемых уравнений. В случаях, когда действительная часть (X) комплексного корня найдена, мнимая его часть определяется из уравнения системы (98) образующей функции, в периферийной системе координат

$$(iY)^2 = -\frac{X^3 - 3a_1X^2 + 3a_2X - a_3}{X - a_1} \quad (101)$$

Уравнение (98) – это проекция парабол C на плоскость аргумента.

На рисунке (6) не показано, однако следует иметь в виду, что миди – линия, проходящая через внутренний экстремум линии A , на рисунке 6 – это линия 23, как кривая третьего порядка, пересечет линию A' , на рисунке 6 – это линия 4, как кривую четвертого порядка, образуя тем самым недостающие многоугольники корней.

Фигуры функции четвёртого порядка отличаются друг от друга знаком смещения внутреннего экстремума кривой $A-A'$ знаком разности ординат нижних (рис.7) её экстремумов. Координаты точек перегиба и инварианта (a_{04}) определяются достаточно простыми выражениями приведёнными на выносных линиях рисунка фигуры функции.

Вычисление абсцисс (X_3, X_5, X_7) экстремумов образующей функции (98) производим с нужной точностью формулами предельного решения уравнений (см. в Интернете работу автора “Решение алгебраических уравнений высоких степеней”). Решению, в данном случае, подлежит уравнение третьей степени

$$Z^3 - m_1Z^2 + m_{11}Z - m_{111} = 0 \quad (102)$$

соответствующее производной исследуемой (98) функции. Здесь нужно учитывать, что корни (Z_1, Z_2, Z_3) найденные предельным методом размещены в убывающем порядке по модулю

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt[3]{m_v} \\ Z_2 &= \sqrt[3]{m_{vv}/m_v} \\ Z_3 &= \sqrt[3]{m_{vvv}/m_{vv}} \end{aligned} \quad (103)$$

и индексы их не совпадают с индексами абсцисс экстремумов (X_3, X_5, X_7) рис.6.

Рассмотрим пример уравнения четвёртой степени

$$Z^4 - 95Z^2 + 270Z - 176 = 0 \quad (104)$$

Уравнение задано в центральной системе координат $(a_1 = 0)$. Следовательно, коэффициенты заданного уравнения являются его инвариантами линейного отображения (см. в Интернете работу автора “Отображение алгебраических функций”)

$$\begin{aligned} n_{011} &= 6a_{02} = -95 \\ n_{0111} &= 4a_{03} = -270 \\ n_{01111} &= -176 \end{aligned} \quad (105)$$

Уравнение для вычисления абсцисс экстремумов (102) функции образующей заданное (104) уравнение, находим как производную последнего

$$Z^3 - 47,5Z + 67,5 = 0 \quad (106)$$

где центральные моменты соответственно равны

$$\begin{aligned} m_{011} &= -47,5 \\ m_{0111} &= -67,5 \end{aligned} \quad (107)$$

а корни, в четвёртом приближении, имеют значение (103)

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \sqrt[4]{m_{04}} = \sqrt[4]{2m_{011}^2} = -8,196 \\
Z_2 &= \sqrt[4]{\frac{m_{044}}{m_{04}}} = \sqrt[4]{\frac{(m_{011}^4 + 4m_{011}m_{0111}^2)}{2m_{011}^2}} = 5,532 \\
Z_3 &= \sqrt[4]{\frac{m_{0444}}{m_{044}}} = \sqrt[4]{\frac{m_{0111}^4}{(m_{011}^4 + 4m_{011}m_{0111}^2)}} = 1,489
\end{aligned} \tag{108}$$

В соответствии с обозначениями на рисунке (6) образующей функции, принимаем абсциссы её экстремумов равными

$$\begin{aligned}
X_3 &= Z_1 = -8,196 \\
X_5 &= Z_3 = 1,489 \\
X_7 &= Z_2 = 5,532
\end{aligned} \tag{109}$$

полагая точность их, по результатам подстановки (109) достаточной.

По найденным значениям абсцисс вычисляются ординаты экстремумов функции образующей заданное (104) уравнение

$$\begin{aligned}
A_4(X_3) &= -4258 \\
A_4(X_5) &= 20,3 \\
A_4(X_7) &= -653
\end{aligned} \tag{110}$$

Сравнивая ординаты внутреннего экстремума ($A_4 = 20,3$) и инварианта (105) четвёртого порядка ($a_{04} = -176$), на рисунок (6) фигуры образующей функции наносится след (Z) плоскости аргумента, совпадающий с действительной осью (X) этой плоскости. Ось ординат пространства, в соответствии с формулой (104) заданного уравнения, это вертикаль проходящая через точку пересечения ветви (2) линии $A - A'$ фигуры функции с горизонталью a_{04} . Т.е., вертикаль $a_1 = 0$.

После нанесения на рис.6 осей системы отсчёта и числовых значений координат экстремумов образующей заданное уравнение функции (104) видно, что она имеет четыре действительных корня, из которых один отрицателен.

Численные значения корней заданного (104) уравнения тоже вычисляем предельным методом и тоже, сразу, в четвёртом приближении.

Выписываем и подставляем моменты отображения на плоскость четвёртого порядка имея в виду, что оригинал находится в центральной системе координат, т.е. $n_1 = 0$ (105)

$$\begin{aligned}
n_4 &= 2n_{011}^2 - 4n_{01111} = 2(-95) - 4(-176) = 17346 \\
n_{44} &= n_{011}^4 + 6n_{01111}^2 - 4n_{011}^2 n_{01111} + 4n_{01111}^2 n_{011} = 6029 * 10^4 \\
n_{444} &= n_{01111}^4 - 4n_{011} n_{01111}^2 n_{01111} + 2n_{011}^2 n_{01111}^2 - 4n_{01111}^3 = 101978 * 10^4 \\
n_{4444} &= n_{01111}^4 = 95951 * 10^4
\end{aligned} \tag{111}$$

Вычисляем корни заданного (104) уравнения

$$\begin{aligned}
Z_1(4) &= \sqrt[4]{n_4} = \sqrt[4]{17346} = -11,5(-11) \\
Z_2(4) &= \sqrt[4]{n_{44}/n_4} = 7,7(8) \\
Z_3(4) &= \sqrt[4]{n_{444}/n_{44}} = 2,03(2) \\
Z_4(4) &= \sqrt[4]{n_{4444}/n_{444}} = 0,985(1)
\end{aligned} \tag{112}$$

проверяем их подстановкой, уточняем, при необходимости повторным отображением или подбором и принимаем окончательно [указано в скобках (112)] для них значения.

Результаты вычислений сведены в рисунок (7) фигуры функции образующей заданное (104) уравнение в собственной системе координат. Следствием анализа фигуры математической модели, расположения на ней рабочих точек может появиться желание представить функцию в виде и расположенной так, как это показано на рисунке (8в). Фигура симметрична относительно вертикали (a_1) первого коэффициента. Средняя линия, определяющая основания парных корней, гладкая. Все корни действительны и отрицательны.

Определяющими являются два требования – чётная симметричность относительно центральной вертикали и отрицательность корней. Первое требование реализуется приравниванием нулю инварианта третьего порядка функции-образа. Второе – выбором соответствующей величины и знака первого коэффициента функции-образа или, просто, выбором значения наименьшего по модулю корня (V_4) уравнения-образа.

Два требования. Значит функция отображения должна иметь два свободных параметра, например, функция второго порядка

$$V_2 = q_0 Z^2 + q_1 Z^1 + q_2 Z^0 \tag{113}$$

Функция-образ заданного оригинала (104) имеет вид

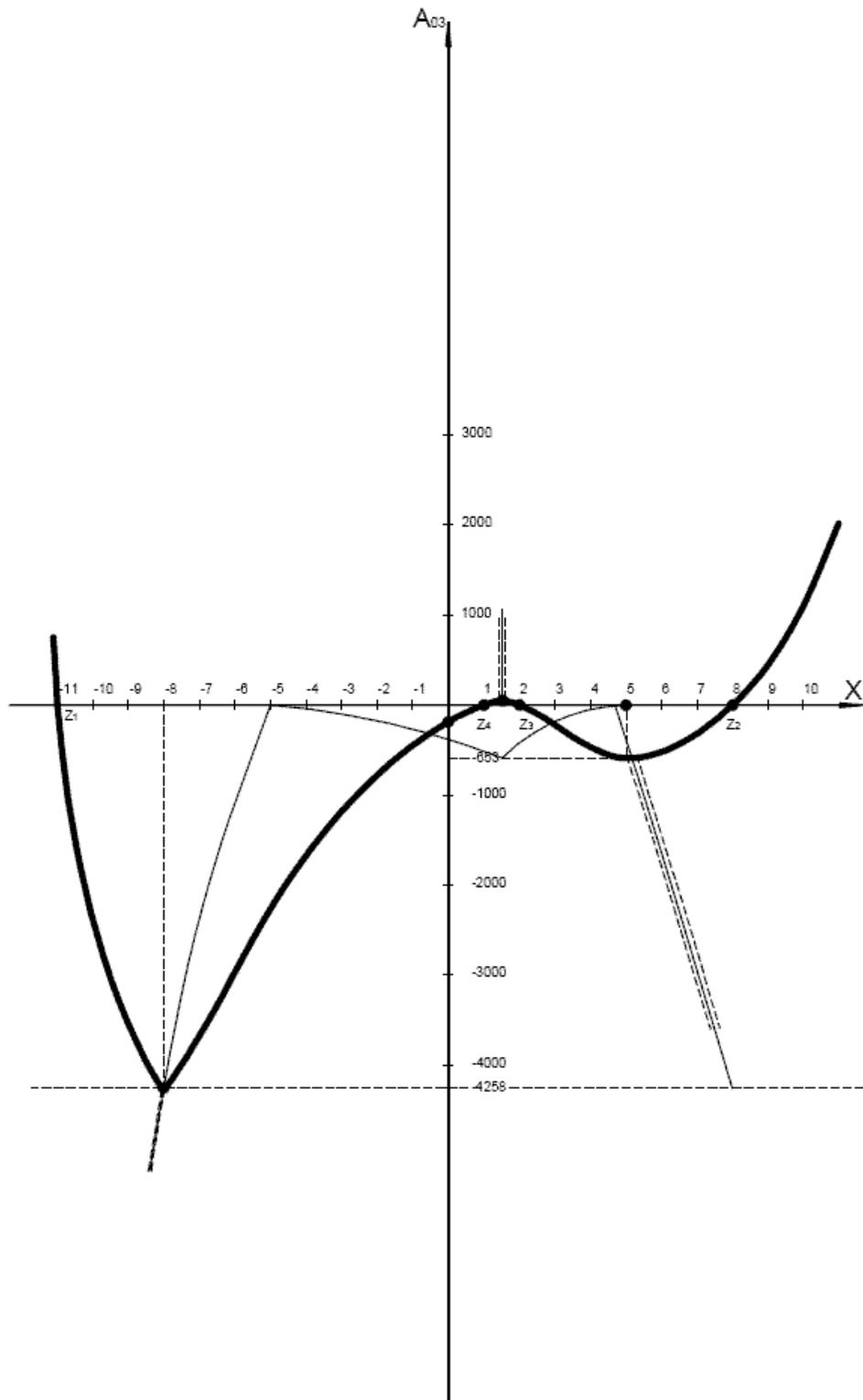


Рис. 7. Фигура образующей функции заданного управления

$$B_{24}(V_2) = V_2^4 - 4b_{21}V_2^3 + 6b_{12}V_2^2 - 4b_{23}V_2 + b_{24} \quad (114)$$

а её коэффициенты, через моменты (n) функции-оригинала и параметры (q) отображения выражаются формулами (См. в Интернете работу автора “Отображение алгебраических функций”).

$$\begin{aligned} 4b_{21} &= (V_{21} + \dots)_4^1 = [(q_0 Z_1^2 + q_1 Z_1^1 + q_2 Z_1^0) + \dots]_4^1 = (n_2 q_0 + \dots)_3 = n_2 + n_1 q_1 + n_0 q_2 \\ 6b_{22} &= (V_{21} V_{22} + \dots)_6^1 = (n_{22} q_{00} + \dots)_6 = n_{22} + n_{21} q_1 + n_{20} q_2 + \dots \\ 4b_{23} &= (V_{21} V_{22} V_{23} + \dots)_4^1 = (n_{222} q_{000} + \dots)_{10} = n_{222} + n_{221} q_1 + n_{220} q_2 + n_{220} q_1^2 + \dots \\ b_{24} &= (n_{2222} q_{0000} + \dots)_{15} = n_{2222} + n_{2221} q_1 + n_{2220} q_2 + n_{2211} q_1^2 + \dots \end{aligned} \quad (115)$$

Согласно требованиям к синтезируемой (114) функции, её третий инвариант должен равняться нулю

$$b_{023} = 2b_{21}^2 - 3b_{21}b_{22} + b_{23} = 0 \quad (116)$$

а первый коэффициент должен быть отрицательным и таким, чтобы все корни функции-образа были тоже отрицательными. Т.е. - параметрическая задача. Наугад, можно положить первый коэффициент (b_{21}) равным, например,

$$b_{21} = -180 \quad (117)$$

что приводит к построению системы уравнений (116,117) относительно параметров (q_1, q_2) отображения определяющих, в конечном счёте, численно, коэффициенты (115) функции-образа (114).

Второе из требований к обновлению математической модели могло быть сформировано заданием значения ближайшего к нулю корня образа. Например,

$$V_{24} = -125 \quad (118)$$

Этому корню функции-образа соответствует минимальный по модулю корень ($Z_1 = 1$) (112) функции-оригинала, а объединяет корни в одну формулу функция отображения (113) (при $q_0 = 1$)

$$-125 = 1 + q_1 + q_2 \quad (119)$$

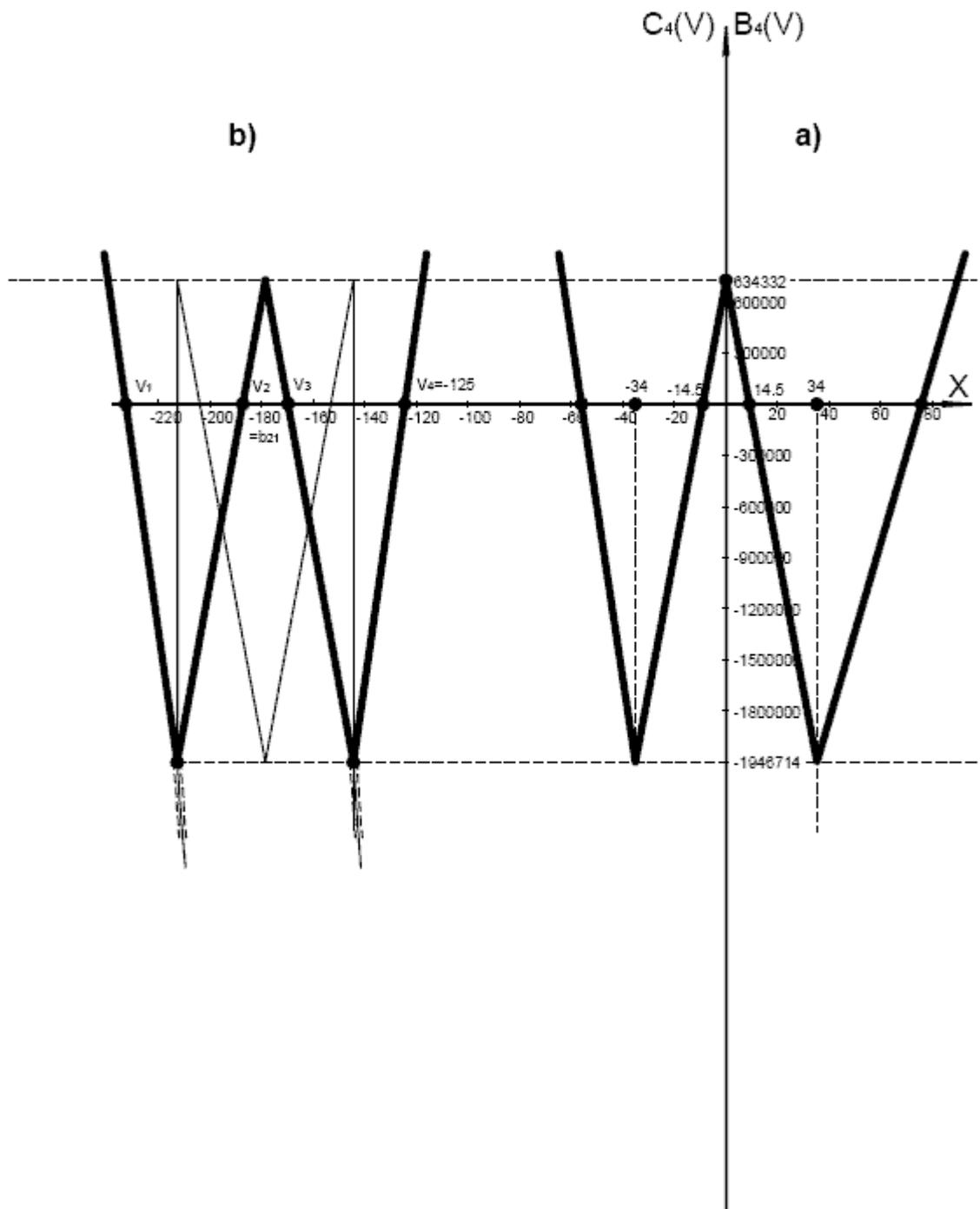


Рис. 8. Желательный вид и расположение функции математической модели (104)
 а) промежуточный б) окончательный

которая и будет дополнять уравнение инварианта (116) до полной системы. Решение системы (115,116,119) позволяет вычислить величины параметров (q_1, q_2) отображения, а затем и коэффициенты (115) обновлённой модели.

На рисунке (8) отображение показано двухступенчатым (8а,8в). Заданная функция (104) (рис.7) сначала симметрирована и приведена в центральную систему координат (рис.8а). Т.е. положено, что в системе коэффициентов (115) функции-образа равны нулю первый и третий коэффициенты.

$$\begin{aligned} b_{021} &= 0 \\ b_{023} &= 0 \end{aligned} \quad (120)$$

Появившийся нулевой индекс в обозначении коэффициентов означает, что функция расположена в центральной системе координат.

В соответствии с заданием (104,105) и таблицами моментов (См. в Интернете работу автора “Симметричные алгебраические моменты”) раскрываем первое из равенств системы (120,115)

$$2b_{021} = n_2 + n_1 q_1 + n_0 q_2 = -2(-95) + 4q_2 = 0 \quad (121)$$

и находим численное значение второго параметра (q_2) функции отображения (113)

$$q_2 = -47,5 \quad (122)$$

Аналогично, раскрываем второе равенство системы (115, 120)

$$\begin{aligned} 4b_{023} = n_{222} + n_{221}q_1 + n_{220}q_2 + n_{220}q_1^2 + n_{210}q_1q_2 + n_{200}q_2^2 + n_{111}q_1^3 + n_{110}q_1^2q_2 + \\ + n_{100}q_1q_2^2 + n_{000}q_2^3 = -270q_1^3 + 9729q_1^2 - 51300q_1 + 72900 = 0 \end{aligned} \quad (123)$$

получаем уравнение, предельное решение которого, в четвёртом приближении, даёт три возможных значения для первого параметра отображения

$$q_{11.2.3} = 29,96; 3,304; 2,736$$

Выбираем для параметра среднее значение ($q_1 = 3,304$), так как ему соответствуют наименьшие величины коэффициентов (b_{22} и b_{24}) функции-образа, вычисляемые по формулам системы (115)

$$\begin{aligned} 6b_{022} &= (n_{22}q_{00} + \dots) = -3225 \\ b_{024} &= (n_{2222}q_{0000} + \dots) = 634322 \end{aligned} \quad (124)$$

Итак, симметричный, центрально размещённый образ (рис.8а) заданного уравнения (104) определяется биквадратной формой

$$B_{24}(V_2) = V_2^4 - 3225V_2^2 + 634322 \quad (125)$$

Корни и координаты экстремумов построенной функции вычислены и нанесены на рисунок фигуры (рис.8а) функции, позволяющей наглядно произвести завершающий этап преобразования – линейное отображение в периферийную (рис.8в) систему координат так, чтобы все корни функции (рис.8а) оказались отрицательными.

Пусть принято, что первому коэффициенту синтезируемой функции следует быть равным ($b_{21} = -180$) (117). В этом случае, в случае когда первый коэффициент функции-образа определён, линейное отображение как таковое можно не производить. Все остальные коэффициенты функции-образа определяются из формул инвариантов линейного отображения (См. в Интернете работу автора “Отображение алгебраических функций”) (117,121,123,124)

$$\begin{aligned} b_{22} &= b_{21}^2 + b_{022} = 31863 \\ b_{23} &= -2b_{21}^3 + 3b_{21}b_{022} - b_{023} = -5541480 \\ b_{24} &= -3b_{21}^4 - 6b_{21}^2b_{022} + 4b_{21}b_{023} + b_{024} = 945807132 \end{aligned} \quad (126)$$

Таким образом, окончательно, обновлённая функция математической модели (104) принимает вид

$$B_{24}(V) = V^4 - 4(-180)V^3 + 6(31863)V^2 - 4(-5541480)V + 945807132 \quad (127)$$

4. Анализ функции математической модели пятого порядка

$$A_5(Z) = Z^5 - 5a_1Z^4 + 10a_2Z^3 - 10a_3Z^2 + 5a_4Z - a_5 \quad (130)$$

также основан на представлении её системой из действительной и приравненной нулю мнимой частей

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_5(Z) &= A_5(X) + 10(iY)^2 A_3(X) + 5(iY)^4 A_1(X) \\ i \operatorname{Im} A_5(Z) &= (iY)[(iY)^4 + 10(iY)^2 A_2(X) + 5A_4(X)] = 0 \end{aligned} \quad (131)$$

где символами A_i обозначены операторы целых рациональных функций в биномиальной знакопеременной форме, причём - $A_4 = A_5'$, $A_3 = A_5''$, $A_2 = A_5'''$, $A_1 = A_5''''$.

По-прежнему, первое из выражений системы (131) представляет собственно функцию, а второе – условие действительности заданной (130) функции. Геометрически, второе из выражений (131) представляет собой проекцию первого на плоскость аргумента пространства. Второе выражение (уравнение) системы (131) взаимосвязывает действительный и мнимый параметры аргумента функции (130) и позволяет вычислить другой, если известен один из них.

В своём общем виде, пространственная линейчатая фигура действительной функции пятого порядка представлена на рисунке (9).

Фигура функции пятого порядка, как и все предыдущие (и последующие) состоит из трёх разновидностей кривых. Это, во-первых, плоская действительная кривая $A_5(X)$ от действительного аргумента, лежащая в действительной плоскости ($A_5 O X$) пространства (плоскость листа рисунка). На рисунке (9) кривая вычерчена плотной линией и обозначена буквами $A-A$. В сечении фигуры плоскостью аргумента линия $A-A$ определяет действительные корни образуемого уравнения. Следует отметить, что точки линии $A-A$ не являются корнями образуемых уравнений и имеют размерность функции. Корнями являются точки плоскости аргумента имеющие размерность аргумента.

Второй разновидностью кривых фигуры функции (131) являются линии, точки которых определяют середины корней образуемых уравнений. Причём, как середины действительных, так и

середины комплексных корней. На рисунке характерные участки линий средин и линий действительных корней ($A-A$) обозначены поясняющими индексами. Линия средин, также как и линия действительных корней, лежит в действительной плоскости ($A_5 O X$) пространства, в плоскости листа рисунка. На рисунке линии средин обозначены буквами B и вычерчены тонкими линиями.

Если построение линии ($A-A$) действительных корней функции осуществляется по контрольным точкам, то линии B функции построены как линии средин корней образуемых функцией

уравнений.

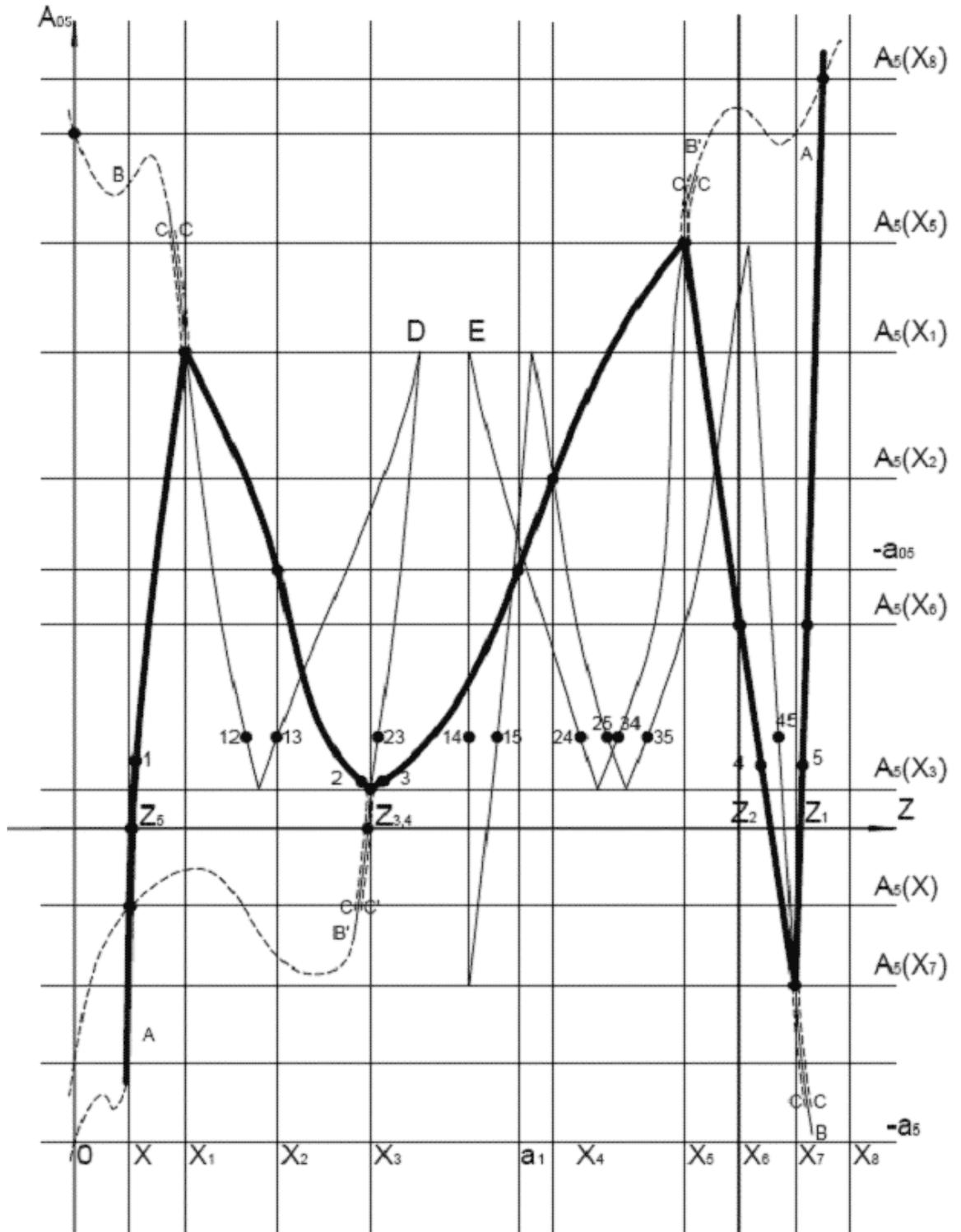


Рис.9. Общий вид функции пятого порядка

Линий (B) средин корней у функции пятого порядка две. Одна ($B - B$) имеет шесть экстремумов и, соответственно, является функцией седьмого порядка. Вторая ($B' - B'$) имеет два экстремума и является функцией третьего порядка. Линия ($B' - B'$) средин, третьего порядка, своими отходящими ветвями (23 и 34) пересекается с отходящими ветвями (1 и 5) линии ($A - A$) действительных корней, как с более крутыми линиями пятого порядка. Благодаря этим пересечениям получается полный спектр многоугольников корней образуемых уравнений.

Линии средин имеют характерные разрывы. Характерность разрывов линий заключается в том, что линий просто не существует в целом интервале ($D - E$) изменения аргумента (рис.9). Линия B терпит разрыв между своими ветвями 13 и 14, а линия B' - между ветвями 23 и 24.

Линии B и B' в своих продолжениях за точками экстремумов линии A определяют середины комплексно сопряжённых корней образуемых уравнений, т.к. определяют действительные части (X) комплексных корней. Мнимые части этих же корней определяют линии $C - C$.

Линии $C - C$ представляют собой параболы лежащие в изогнутых по отходящим ветвям линий B и B' , нормальных к плоскости $A_5 0X$ полуплоскостях. Параболы $C - C$ своими вершинами касаются точек экстремумов линий $A - A$. Причём, точки экстремумов линий $A - A$ и вершин парабол линий $C - C$ принадлежит линиям $A - A$.

Линии ($A - A$) определяющие действительные корни и линии (B, B') определяющие середины корней образуемых (131) уравнений, как линии лежащие в одной плоскости ($A_5 0X$), имеют своей проекцией на плоскости аргумента пространства действительную ось (X). Линии $C - C$ проектируются в параболы или эллипсы, аналитически определяемые уравнением анализируемой системы (131). Поэтому, это уравнение позволяет определять мнимую часть (Y) корней образуемых функцией (131) уравнений по найденной действительной (X) части.

Проведённое описание фигуры относится в своей мере к функциям любого порядка. Описание и построение – в большей части умоглядно и нуждается в экспериментальной проверке и подтверждении.

Рассмотрим в качестве примера графическое решение уравнения пятой степени

$$A_5(Z) = Z^5 - 63Z^3 - 72Z^2 + 890Z + 2100 = 0 \quad (132)$$

основываясь на обобщенный рисунок фигуры образующей функции (рис.9).

Первый коэффициент заданного (132) уравнения равен нулю ($a_1 = 0$). Это означает, что образующая уравнение функция и, соответственно, само уравнение (132) расположены в своей центральной системе координат. Т.е. ось ординат пространства (рис.9) совпадает с вертикалью ($X = a_1, Y = 0, A_5 = \text{var}$), и все коэффициенты заданного уравнения (132) суть инварианты линейного отображения.

Выписываем инварианты уравнения

$$\begin{aligned} 10a_{02} &= -63 & a_{02} &= -6,3 \\ 10a_{03} &= 72 & a_{03} &= 7,2 \\ 5a_{04} &= 890 & a_{04} &= 178 \\ a_{05} &= -2100 \end{aligned} \quad (133)$$

а подставляя значения пятого инварианта на выносную линию фигуры функции (рис.9), находим, что секущая плоскость аргумента, в которой лежит заданное уравнение (132), расположена ниже центра тяжести фигуры (точка в пересечении линий a_1 и $-a_{05}$) на 2100 единиц. Для уточнения места расположения секущей плоскости вычисляем координаты точек экстремумов линии $A-A$ образующей заданное уравнение функции, ориентируясь на общий вид функции (рис.9).

Абсциссы точек экстремумов вычисляем как корни уравнения четвёртой степени

$$\begin{aligned} A'_5(Z) = A_4(Z) &= Z^4 + 6a_{02}Z^2 - 4a_{03}Z + a = Z^4 + 6(-6,3)Z^2 - 4(7,2)Z + 178 = \\ &= Z^4 + (-37,8)Z^2 - 28,8Z + 178 = Z^4 + n_{011}Z^2 - n_{0111}Z + n_{01111} = 0 \end{aligned} \quad (134)$$

полученного дифференцированием образующей функции заданного уравнения (132). Корни вычисляем предельным методом, разбивая построенное уравнение (132) на два подуравнения второй степени, отображёнными на плоскость четвёртого порядка

$$\begin{aligned} Z_4^2 - n_4Z_4 + n_{44} &= 0 \\ n_4Z_4^2 - n_{44}Z_4 + n_{4444} &= 0 \end{aligned} \quad (135)$$

Заимствуя формулы для уравнения образа из работы автора “Решение алгебраических уравнений” и подставляя численные значения моментов оригинала (134), находим

$$\begin{aligned}
 n_4 &= 2n_{011}^2 - 4n_{01111} = 2(-37,8)^2 - 4*178 = 2145,68 \\
 n_{44} &= n_{011}^4 - 4n_{011}^2 n_{01111} + 6n_{01111}^2 + 4n_{011} n_{0111}^2 = 1088942,337 \\
 n_{444} &= n_{01111}^4 - 4n_{011} n_{01111}^2 n_{01111} + 2n_{011}^2 n_{01111}^2 - 4n_{01111}^3 = 90994912,2 \\
 n_{4444} &= n_{01111}^4 = 1003875856
 \end{aligned} \tag{136}$$

и вычисляем абсциссы экстремумов (135) в четвёртом приближении

$$\begin{aligned}
 Z_{1,2}(4) &= \pm 6,146; \pm 5,357 \\
 Z_{3,4}(4) &= \pm 2,997; \pm 1,546
 \end{aligned} \tag{137}$$

а затем и в шестнадцатом

$$\begin{aligned}
 Z_{1,2} &= \pm 6,030; \pm 4,985 \\
 Z_{3,4} &= \pm 3,058; \pm 1,900
 \end{aligned} \tag{138}$$

Здесь отброшены, попутно полученные мнимые значения корней (134), так как в соответствии с (рис.9) обобщённым рисунком фигуры образующей функции абсциссы экстремумов могут принимать только действительные значения.

Для выбора величины, а также определения знака корня Z_1 (138), следует воспользоваться приближением однозначно определяющим знак. Таким приближением является любое нечётное приближение, например, третье (134)

$$\text{sign}Z_1(3) = \text{sign}\sqrt[3]{3n_{011}} = + \tag{139}$$

Знаки остальных корней (138) выбираются из условия равенства нулю первого коэффициента заданного уравнения (134) или также, как и первого (Z_1) корня. Знак и характер корня инвариантны приближению (и отображению).

Итак, абсциссы экстремумов линии $A-A$ фигуры образующей заданное уравнение (132) функции принимаем равными (рис.9)

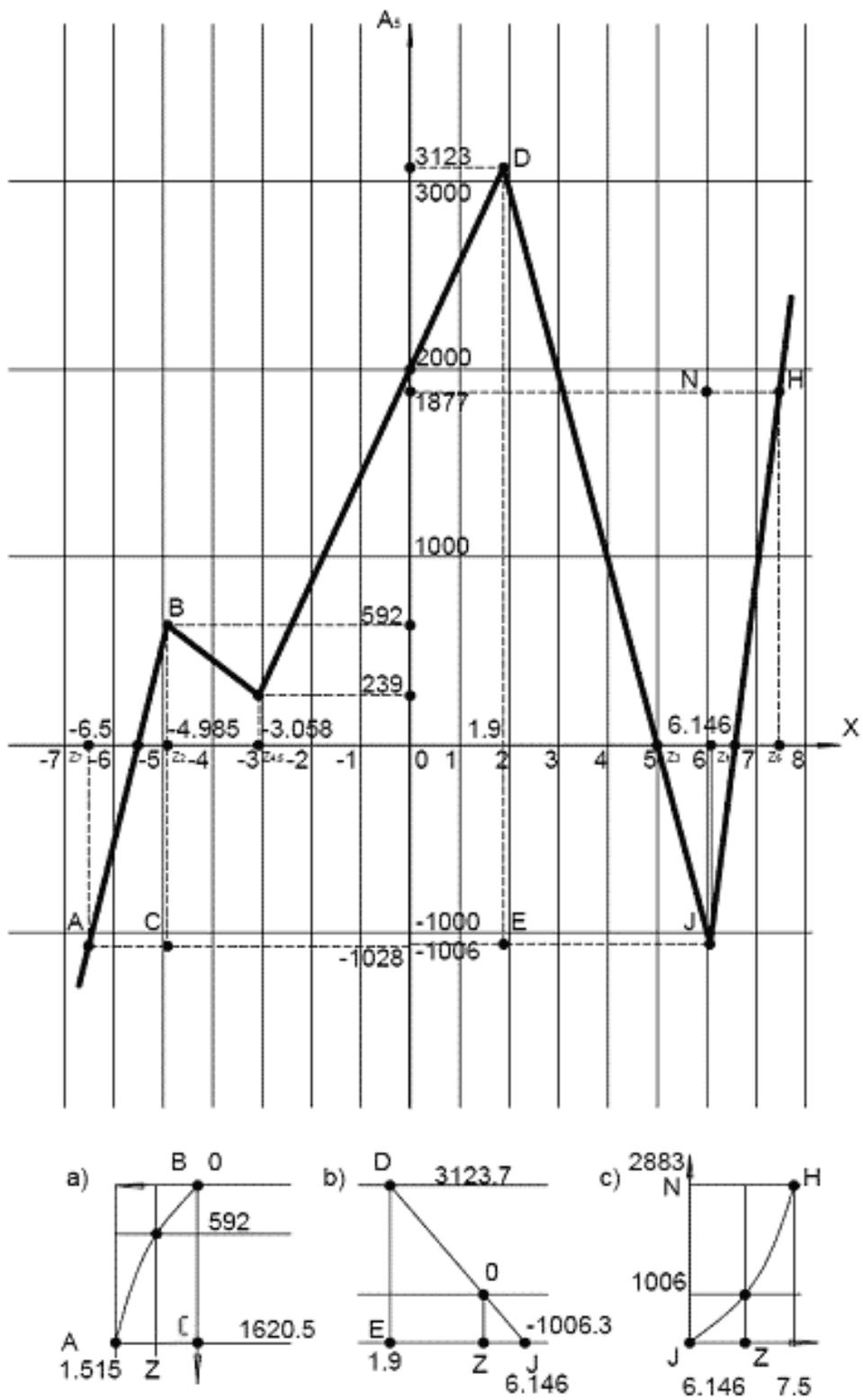


Рис.10. Образующая функция заданного (132) уравнения

$$\begin{aligned}
Z_1 = X_7 &= 6,03 \\
Z_2 = X_1 &= -4,985 \\
Z_3 = X_3 &= -3,058 \\
Z_4 = X_5 &= 1,9
\end{aligned}
\tag{140}$$

а ординаты, соответственно, имеют значения (132)

$$\begin{aligned}
A_5(X_1) &= 592 \\
A_5(X_3) &= 239 \\
A_5(X_5) &= 3123 \\
A_5(X_7) &= -1006
\end{aligned}
\tag{141}$$

Добавим к полученным точкам экстремумов две произвольные точки на отходящих ветвях линии $A-A$. Например, с абсциссами $Z_6 = 7,5$; $Z_7 = -6,5$ и ординатами, соответственно,

$$\begin{aligned}
A_5(Z_6) &= -1028 \\
A_5(Z_7) &= 1877
\end{aligned}
\tag{142}$$

Наносим точки экстремумов (141) и контрольные точки (142) на координатную сетку, соединяем их прямыми и получаем линию $A-A$ образующей функции заданного уравнения (132) в своей собственной системе отсчёта (рис.10). При необходимости могут быть относительно просто вычислены и нанесены точки перегибов функции и точки линий лежащие на одном уровне с точками перегибов и экстремумов. Однако, и приведённого построения достаточно, чтобы производить численную оценку корней заданного уравнения (132). На подрисунках (10а,в,с) произведены дополнительные построения, позволяющие графически найти значения действительных корней

$$\begin{aligned}
Z &= -6,16 \\
Z &= 5,10 \\
Z &= 6,95
\end{aligned}
\tag{143}$$

а затем комплексных.

Действительную часть (X) корней находим из условий их сопряжённости и равенства нулю первого коэффициента заданного уравнения (132)

$$2X = Z_3 + Z_4 = -Z_1 - Z_2 - Z_5 = -6 \quad (144)$$

Мнимую часть (iY) вычисляем из уравнения системы (131) определяющего проекцию фигуры образующей функции на плоскость аргумента

$$iY = \pm \sqrt{-5A_2 \pm \sqrt{25A_2^2 - 5A_4}} = \pm i \quad (145)$$

по известной (144) действительной части.

Сравнивая найденные графически значения корней заданного уравнения (132) с их истинным значением, приведенным в скобках

$$\begin{aligned} Z_1 &= 6,95(7) \\ Z_2 &= -6,16(-6) \\ Z_3 &= 5,1(5) \\ Z_{4,5} &= 3 \pm i(3 \pm i) \end{aligned} \quad (146)$$

можно утверждать, что построенная фигура функции пятого порядка соответствует действительности. В дальнейшем подобного рода проверок производить не следует. Фигуры функций стоились впервые, поэтому необходимо было убедиться в правильности применяемых закономерностей построения. Но это только один, единственный раз.

После того, как построена частная фигура заданной функции (уравнения), порядок и объем работ по ее дальнейшему исследованию и синтезу остаются такими же, как и в предыдущих, рассмотренных случаях. Это – построение и анализ общих решений, компоновка новых требований, синтез обновленной функции и вычисление номиналов физических элементов обновленного макета.

Литература.

1. «Симметричные алгебраические моменты» - 2003
2. «Отображение алгебраических функций» - 2003
3. «Решение алгебраических уравнений высоких степеней» – 2003
4. «Общее предельное решение алгебраических уравнений» - 2005

Все работы размещены в Интернете на сайте Компании
Безопасность по адресу

<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>

E-mail: office@bezopasnost.ru

Корчагин Игорь Фёдорович

115191, г. Москва, ул. 3-ая Рощинская д.6

тел. 234-3311, 232-0040, 737-9268

P.S.

В случае заинтересованности, Компания проведет исследования частных функций и уравнений в свете работ автора, а также примет участие в разработке алгоритмов и программ решения уравнений и вычисления корней действительных и комплексных чисел.