И.Ф. КОРЧАГИН

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Москва
ФИЗМАТКНИГА
2005

УДК 512
К66

Корчагин И. Ф. Алгебраические уравнения. — М.: Физматкнига, 2005. — 160.
ISBN 5-89155-139-X.

В работе излагаются основы теории алгебраических уравнений. Приводятся методы предельного (приближенного) общего решения уравнений, практически любых степеней. При этом точность решений может выбираться сколь угодно высокой. Построенные решения просты и позволяют производить как численные вычисления корней, так и исследование поведения корней в функции физических параметров описываемых уравнениями процессов.

Книга предназначена для студентов, аспирантов, инженеров и научных работников физико-технических и математических специальностей.

ISBN 5-89155-139-X

Памяти незабываемой супруги,
Ташназаровой Гульнаре Оразовне
посвящается

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Алгебраические функции и уравнения

1.1. Алгебраические функции

Алгебраическими функциями называются функции, независимое переменное которых подвергается воздействию только алгебраических операций. Операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень.

Алгебраические функции — самые распространенные, самые применяемые функции. Через ряды Тейлора, правда, приближенно, в ограниченной области, к алгебраическим функциям могут быть сведены, практически, любые математические функции. К алгебраическим функциям сводится большая часть всех задач прикладных наук и самой математики. Однако, из разновидностей алгебраических функций известна всего лишь одна — это полиномиальная функция

$$\mathrm{Q}_{\upsilon}(Z)=q_0 Z^{\upsilon}+q_1 Z^{\upsilon-1}+\ldots+q_{\upsilon-2} Z^2+q_{\upsilon-1} Z+q_{\upsilon}= \qquad (1)$$

где целое положительное число υ определяет порядок величины функции относительно переменной Z.

Рассматриваются также дробно-рациональные функции, построенные как отношение полиномиальных и алгебраические функции многих переменных, удовлетворяющие приведенному выше определению. Других алгебраических функций нам неизвестно.

Если в качестве аргумента алгебраической функции взять комплексную величину $(Z=X+iY)$, то, раскрывая приведённую запись (1), функцию можно представить в двух других формах написания:

$$=X^{\upsilon}+X^{\upsilon-1}Q_1(iY)+X^{\upsilon-2}Q_2(iY)+\ \ldots\ +Q_{\upsilon}(iY)= \qquad (1.1)$$

$$=(iY)^{\upsilon}+(iY)^{\upsilon-1}Q_1(X)+(iY)^{\upsilon-2}\ Q_2(X)+\ldots+Q_{\upsilon}(X)= \qquad (1.2)$$

т.е. соответственно, в разложениях по степеням параметров X и iY переменного. Здесь, через Q_{υ} обозначены операторы полиномиальной функции (1) , в канонической форме записи послених

$$\begin{aligned}&Q_1(\ )=(\ )^1+q_1\\&Q_2(\ )=(\ )^2+q_1(\ )^1+q_2\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\qquad(2)$$

и так далее.

Из первой формы представления (1.1) функции комплексного переменного следует, что коэффициенты ее — комплексные величины. Из второй формы (1.2) следует, что и сама функция (1) — величина комплексная. Таким образом алгебраическая функция комплексного переменного, в общем случае представляет собой четырехмерную конструкцию. Функцию эту (1), так как она определена и существует над каждой точкой плоскости аргумента, «принято» называть поверхностью. «Принято», потому что графически и умозрительно четырехмерная конструкция непредставима.

Не обращая внимания на комплексность аргумента и функции, разместим их на плоскости. Так на плоскости рисунка (рис. 1*a*) размещены две линейные функции комплексного переменного

$$\begin{aligned}Q_{12}(Z)&=Z+Z_2\\Q_{11}(Z)&=Z+Z_1\end{aligned}\qquad(3)$$

На втором рисунке (рис. 1*b*) размещена функция второго порядка

$$Q_2(Z)=(Z+Z_1)(Z+Z_2)=Z^2+(Z_1+Z_2)Z+Z_1Z_2\qquad(4)$$

равная произведению первых двух.

Буквами Z_1 и Z_2 на рисунках и в формулах обозначены корни функций — точки оси абсцисс, в которых функция принимает нулевое значение.

Заметим, что здесь и везде далее, порядковый индекс единица присваивается корню с наибольшим модулем. Индекс два — наибольшему из оставшихся и т.д.

В случае, если б на рисунке (рис. 1*a*) было размещено υ линейных функций, то на рисунке (рис. 1*b*) была бы построена функция υ-того порядка

$$Q_{\upsilon}(Z)=(Z+Z_1)(Z+Z_2)\ldots(Z+Z_{\upsilon})=Z^{\upsilon}+q_1Z^{\upsilon-1}+q_2Z^{\upsilon-2}+\ldots+q_{\upsilon} \tag{5}$$

коэффициенты которой, раскрывая произведение (5), могли бы быть представлены формулами

$$\begin{aligned} q_1 &= Z_1+Z_2+Z_3+\ldots+Z_{\upsilon} \\ q_2 &= Z_1Z_2+Z_1Z_3+\ldots+Z_{\upsilon-1}Z_{\upsilon} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{\upsilon} &= Z_1Z_2\ldots Z_{\upsilon} \end{aligned} \tag{6}$$

Прежде всего, как это видно из приведенных формул, коэффициенты представляют собой многомерные, непрерывные, однородные, со степенью однородности соответствующей порядку коэффициента, функции.

Коэффициенты являются, также, симметричными функциями своих аргументов. Симметричными относительно подстрочных индексов, которые можно циклически изменить, например, прибавляя к каждому из них, одновременно, одно и то же число, не меняя при этом значения коэффициента.

Закономерность построения приведенных формул (6) коэффициентов, будем рассматривать как сумму сочетаний корней из общего их количества по числу соответствующему порядку величины коэффициента.

В формировании (6) коэффициентов можно усмотреть и интегро-дифференциальную закономерность, в соответствии с которой каждый предыдущий коэффициент является производной от последующего, а последующий — интегралом от предыдущего. Это закономерность формирования коэффициентов разложения функций в ряд Тейлора (английский математик Тейлор Брук, 1685–1731). Полиномы, таким образом, и сама алгебраическая функция, могут быть определены как конечные ряды Тейлора.

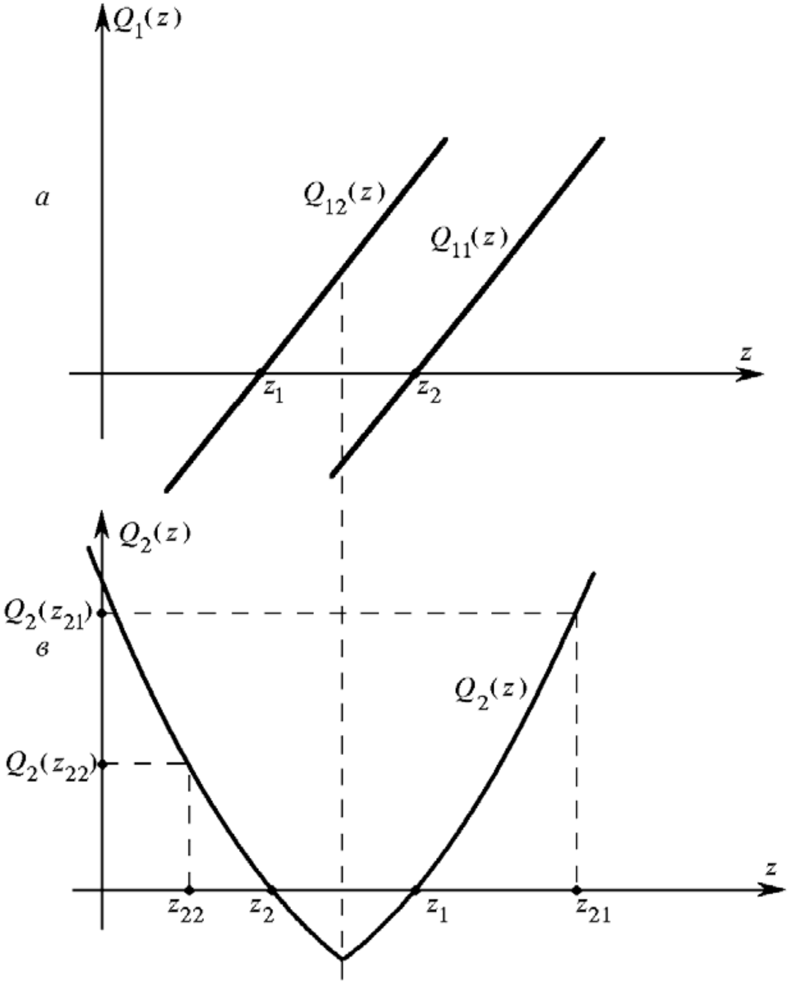


Рис. 1. *Комплексные функции на плоскости*

Формулы коэффициентов (q) алгебраической функции (6) открыты французским математиком Виет Франсуа (1540–1603). Введя буквенные обозначения в математику для постоянных величин, Виет Франсуа, по существу, открыл алгебру, за что и был наречен ее «отцом».

В соответствии с закономерностями формирования функций (5) и коэффициентов (6) можно утверждать, что количество коэффициентов функции (1) равно количеству ее корней, а количество корней функции равно порядку её величины (υ).

Действительно, количество групп сочетаний, а каждая из них и есть коэффициент, из υ корней равно количеству корней υ (по одному, по два, три ... и до υ).

Сформулировано, таким образом тройственное свойство алгебраических функций, в соответствии с которым количества корней, коэффициентов и порядок функции равны между собой.

Форму (5) представления функции в виде произведения линейных сомножителей мы называем ее решением.

Решение (5) иллюстрирует фундаментальное утверждение известное под название «основной теоремы алгебры». Теорема впервые доказана немецким математиком Гауссом К.Ф. (1777–1855), которую он включил в свою докторскую диссертацию (1799).

Из однозначности определения коэффициентов (6) алгебраической функции через свои корни вытекает однозначность, единственность самой функции. Единственность в том смысле, что произвольно выбранные υ точек плоскости аргумента могут быть корнями только одной, единственной функции. Не существует другой функции υ-того порядка, которая имела бы эти же υ точек своими корнями.

Подставив поочередно в заданную функцию ее корни, можно получить систему равенств

$$\begin{aligned}
&q_1 Z_1^{\upsilon-1} + q_2 Z_1^{\upsilon-2} + \ldots + q_\upsilon = -Z_1^\upsilon \\
&q_1 Z_2^{\upsilon-1} + q_2 Z_2^{\upsilon-2} + \ldots + q_\upsilon = -Z_2^\upsilon \\
&\ldots.. \\
&q_1 Z_\upsilon^{\upsilon-1} + q_2 Z_\upsilon^{\upsilon-2} + \ldots + q_\upsilon = -Z_\upsilon^\upsilon
\end{aligned} \qquad (7)$$

которая представляет собой систему линейных уравнений относительно коэффициентов этой функции. Как неоднородная, система имеет единственное решение и утверждает высказанный тезис о единственности функции, имеющей корнями заданные υ точек плоскости.

Полученное утверждение может быть распространено и на пространственно расположенные точки. Действительно. Пусть над плоскостью комплексного переменного (Z) размещено пространство величин υ-того порядка. А в пространстве произвольно заданы υ точек. Точки заданы своими координатами, т.е. некоторой ординатой $Q_\upsilon(Z_\sigma)$ и ее проекцией на плоскость аргумента Z_σ. Здесь сигма (σ) принимает значения чисел натурального ряда от единицы до υ.

Подставляя поочередно и соответственно значения ординат и аргумента в пока неопределенную функцию υ-того порядка (1), получим систему линейных уравнений относительно коэффициентов (1)

$$\begin{array}{l} q_1 Z_1^{\upsilon-1} + q_2 Z_1^{\upsilon-2} + \ldots + q_\upsilon = -Q_\upsilon(Z_1) - Z_1^\upsilon \\ q_1 Z_2^{\upsilon-1} + q_2 Z_2^{\upsilon-2} + \ldots + q_\upsilon = -Q_\upsilon(Z_2) - Z_2^\upsilon \\ \ldots\ldots \\ q_1 Z_\upsilon^{\upsilon-1} + q_2 Z_\upsilon^{\upsilon-2} + \ldots + q_\upsilon = -Q_\upsilon(Z_\upsilon) - Z_\upsilon^\upsilon \end{array} \qquad (8)$$

Система имеет единственное решение, так как неоднородна. И, следовательно, определяет единственную функцию (1), на теле которой размещаются υ заданных пространственных точек $[Q_\upsilon(Z_1; Z_2; \ldots Z_6)]$, где $\sigma = 1, 2, 3 \ldots \upsilon$.

После того, как коэффициенты (q) функции (1) определены, а мы «позабыли», что такое точки $Z_1; Z_2; \ldots Z_\upsilon$. Система уравнений (8) определит не корни функции (1), не точки, лежащие в плоскости аргумента или каком-либо другом плоском сечении, а пространственно рассыпанные точки, лежащие на «теле» функции (1). Корнем функции (1) точка Z_σ станет только тогда, когда обратится в ноль соответствующее значение ее ординаты. Когда $Q_\upsilon(Z_\sigma) = 0$.

Итак, нами доказано, что алгебраическая функция υ-того порядка определяется и единственным образом произвольным набором υ точек пространства, через которые она должна пройти.

Так, например, парабола третьего порядка будет определена и единственным образом, если будут заранее заданы координаты точек ее экстремумов и перегиба или любые другие, разные, произвольные три точки ее будущей фигуры.

Определитель систем уравнений (7, 8) относительно коэффициентов

$$D=\begin{vmatrix} Z_1^{\upsilon-1} Z_1^{\upsilon-2} \ldots Z_1\, 1 \\ Z_2^{\upsilon-1} Z_2^{\upsilon-2} \ldots Z_2\, 1 \\ \ldots. \\ Z_\upsilon^{\upsilon-1} Z_\upsilon^{\upsilon-2} \ldots Z_\upsilon\, 1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

его можно представить и в форме функции коэффициентов (q), одновременно, определяет так называемый дискриминант корней функции (1).

Дискриминант играет роль распределителя корней по характеру.

Значение дискриминанта определяет пространственное расположение экстремумов функции (1). В частности, если дискриминант равен нулю $(D=0)$, один из экстремумов функции лежит на оси абсцисс пространства. Функция имеет два действительных, кратных корня. Чуть вверх, к положительным значениям функции и корни превращаются в комплексно сопряженные. Вниз, к отрицательным значениям — корни превращаются в те же, сопряженные, но действительные.

В структуре корня дискриминант определяет дополнительную, альтернативную его часть.

Так, например, в случае функции второго порядка

$$Q_2(Z)=Z^2+q_1Z+q_2=Z^2-6Z+8 \tag{10}$$

с корнями

$$Z_{1,2}=\frac{-q_1\pm\sqrt{q_1^2-4q_2}}{2}=4;2 \tag{11}$$

дискриминантом выступает подкоренное выражение решения (11)

$$q_1^2 - 4q_2 \tag{12}$$

Определитель же (9) системы коэффициентов для функции (10)

$$\begin{aligned} q_1 Z_1 + q_2 &= - Z_1^2 \\ q_1 Z_2 + q_2 &= - Z_2^2 \end{aligned} \tag{13}$$

является той самой дополнительной, альтернативной частью корней, о которой шла речь выше, и квадрат его совпадает с дискриминантом (12)

$$D_1 = \begin{vmatrix} Z_1 & 1 \\ Z_2 & 1 \end{vmatrix} = Z_1 - Z_2 = \pm \sqrt{q_1^2 - 4q_2} \tag{14}$$

Приведенное равенство (14) будет выведено позже, когда речь пойдет о моментах. Сейчас же оно может быть легко проверено подстановкой (6) корней вместо коэффициентов.

Продолжая исследование заданной (10) функции второго порядка, вычисляем ее коэффициенты (13)

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{\begin{vmatrix} Z_1 & 1 \\ Z_2 & 1 \end{vmatrix}}{D_1} = Z_1 + Z_2 = - 6 \\ q_2 &= \frac{\begin{vmatrix} Z_1 & - Z_1^2 \\ Z_2 & - Z_2^2 \end{vmatrix}}{D_1} = Z_1 \; Z_2 = 8 \end{aligned} \tag{15}$$

Произвольно выбираем два значения аргумента (рис. 1*b*) функции (10)

$$\begin{aligned} Z_{21} &= 6 \\ Z_{22} &= 1 \end{aligned} \tag{16}$$

Вычисляем соответствующие значения функции (10)

$$\begin{aligned} Q_2(Z_{21}) &= 8 \\ Q_2(Z_{22}) &= 3 \end{aligned} \qquad (17)$$

Последними равенствами (16, 17) заданы две произвольные точки пространства (рис. 1*b*). Подставим значения координат этих точек в систему уравнений (8) для коэффициентов

$$\begin{aligned} q_1 Z_{21} + q_2 &= Q_2(Z_{21}) - Z_{21}^2 \\ q_1 Z_{22} + q_2 &= Q_2(Z_{22}) - Z_{22}^2 \end{aligned} \qquad (18)$$

$$\begin{aligned} q_1 \cdot 6 + q_2 &= 8 - 6^2 \\ q_1 \cdot 1 + q_2 &= 3 - 1^2 \end{aligned} \qquad (19)$$

вычисляем единственное значение последних

$$\begin{aligned} q_1 &= -6 \\ q_2 &= 8 \end{aligned} \qquad (20)$$

и соответственно единственную функцию (20, 10), которая проходит через заданные (16, 17) точки пространства (рис. 1*b*).

1.2. Действительные, физически реализуемые функции

Синтезируемые в процессе изучения, описания или созидания каких-либо устройств алгебраические функции представляют собой математическое воссоздание этих объектов, их математическую модель.

Функции эти, так как они описывают объективно существующие или воплощаемые объекты, принимают только действительные значения, являются, как мы будем говорить, физически реализуемыми функциями. Функции принимающие комплексные значения физически воплощать мы не умеем и относим к физически нереализуемым. Физическая реализуемость, действительность — принципиально необходимое свойство функций, которыми занимается практика. Только такие функции рассматриваются, в основном, в дальнейшем.

Опыт показывает, что аргументом физически реализуемой, действительной функции могут быть как действительные, так и комплексные величины. Примером чему является электрические устройства содержащие реактивность. Поэтому, для общности, в дальнейшем рассматриваются действительные функции комплексного аргумента.

Итак, определим физически реализуемую функцию, как математически действительную функцию комплексного переменного.

Из действительности физически реализуемой функции вытекает два других ее важных свойства — попарная сопряженность комплексных корней и действительность коэффициентов. Причем, все три свойства равносильны, т.е. из наличия одного из них другие вытекают как следствие.

Пусть, например, задана функция комплексного переменного

$$Q_\upsilon(Z)=Z^\upsilon -+ q_1 Z^{\upsilon-1} +\ldots+q_\upsilon = \qquad (21)$$

и известно, что она действительна.

Тогда, представив ее в форме решения

$$=(Z-Z_1)(Z-Z_2)\ldots(Z-Z_\upsilon) \qquad (22)$$

видно, что действительной заданная (21) функция может быть только тогда, когда для каждого комплексного множителя

$$(Z-Z_1)=[(X-X_1)+i(Y-Y_1)] \qquad (23)$$

в произведении (22) найдется ему сопряженный, парный

$$(\overline{Z-Z_1})=[(X-X_1)-i(Y-Y_1)] \qquad (24)$$

Построим функцию, сопряженную заданной

$$\overline{Q}_\upsilon(Z)=Z^\upsilon+\overline{q}_1 Z^{\upsilon-1}+\ldots+\overline{q}_\upsilon \qquad (25)$$

Но, по условию, заданная функция действительна, следовательно совпадает, равна себе сопряженной

$$Q_{\upsilon}(Z)=\overline{Q_{\upsilon}}(Z)=Z^{\upsilon}+q_1Z^{\upsilon-1}+\ldots+q_{\upsilon}=Z^0+\overline{q}_1Z^{\upsilon-1}+\ldots+\overline{q}_{\upsilon} \quad (26)$$

что возможно только в случае, когда соответствующие коэффициенты функций попарно равны $\left(q_{\upsilon}=\overline{q}_{\upsilon}\right)$ и следовательно действительны.

Пусть известно, что у заданной (21) функции комплексные корни попарно сопряжены. Тогда из решения (22) функции следует, что она действительна, а из равенства с себе сопряженной (26) следует действительность коэффициентов.

В случае, если известно, что коэффициенты заданной (21) функции действительны, из равенства (26) с себе сопряженной следует действительность функции, а из решения (22) следует попарная сопряженность комплексных корней.

Доказано второе тройственное свойство алгебраических функций — алгебраическая функция действительна, комплексные корни попарно сопряжены, а коэффициенты действительны только одновременно.

Аналитически, действительная функция комплексного переменного может быть записана системой, построенной из формы (1.2) разложения комплексной функции (2, 1) по степеням мнимого аргумента

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}Q_{\upsilon} &= -I\left(X,Y^2\right) \\ i\operatorname{Im}Q_{\upsilon} &= H(X,Y)=0 \end{aligned} \quad (27)$$

Эта система состоит из действительной части $\left(\operatorname{Re}Q_{\upsilon}\right)$, рассматриваемой комплексной функции (21) и отсутствующей, равной нулю мнимой ее части — $\operatorname{Im}Q_{\upsilon}$.

Например, соответствующая комплексной функции второго порядка

$$Q_2(Z)=Z_2+q_1Z+q_2 \quad (28)$$

действительная функция комплексного переменного будет записана системой

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}Q_2(Z) &= X^2+q_1Z+q_2+(iY)^2 \\ i\operatorname{Im}Q_2(Z) &= (iY)(2X+q_1)=0 \end{aligned} \quad (29)$$

Первое из выражений системы (29) представляет собой действительную функцию двух действительных аргументов. Второе — уравнение связи этих аргументов пространственной фигуры функции (29).

В отличие от четырехмерной фигуры, определяемой комплексной функцией (28), действительная функция (29) трехмерна и состоит из двух изогнутых по параболам линий (рис. 2). Одна парабола (АА) лежит в действительной плоскости $(\mathrm{Re}\,Q_2, 0, X)$ комплексного пространства, и такая же другая (ВВ) в комплексной, нормальной к действительной плоскости $(\mathrm{Re}\,Q_2, 0, X)$, на расстоянии $X=-\frac{q_1}{2}$ от центра координат. Вершины парабол соприкасаются. Через точку касания проходит вертикаль, являющаяся осью симметрии пространственной линейчатой фигуры функции (29).

В любом сечении фигуры действительной функции (29) плоскостями $Q_2(Z)=\mathrm{const}$ находится по две точки проколов линиями фигуры (рис. 2). Эти проколы определяют точки корней, образуемых в соответствующих сечениях уравнений. *Функцию, в связи с этим, будем называть образующей (уравнения) функцией.*

Наряду с действительной функцией (29) комплексного переменного можно рассматривать и физически противоположную ей — (чисто) мнимую функцию комплексного переменного

$$\begin{aligned} &Q_2(Z)=X^2+q_1X+q_2+(iY)^2=0 \\ &i\,\mathrm{Im}\,Q_2(Z)=(iY)(2X+q_1) \end{aligned} \qquad (30)$$

комплексную функцию с отсутствующей, равной нулю, действительной частью.

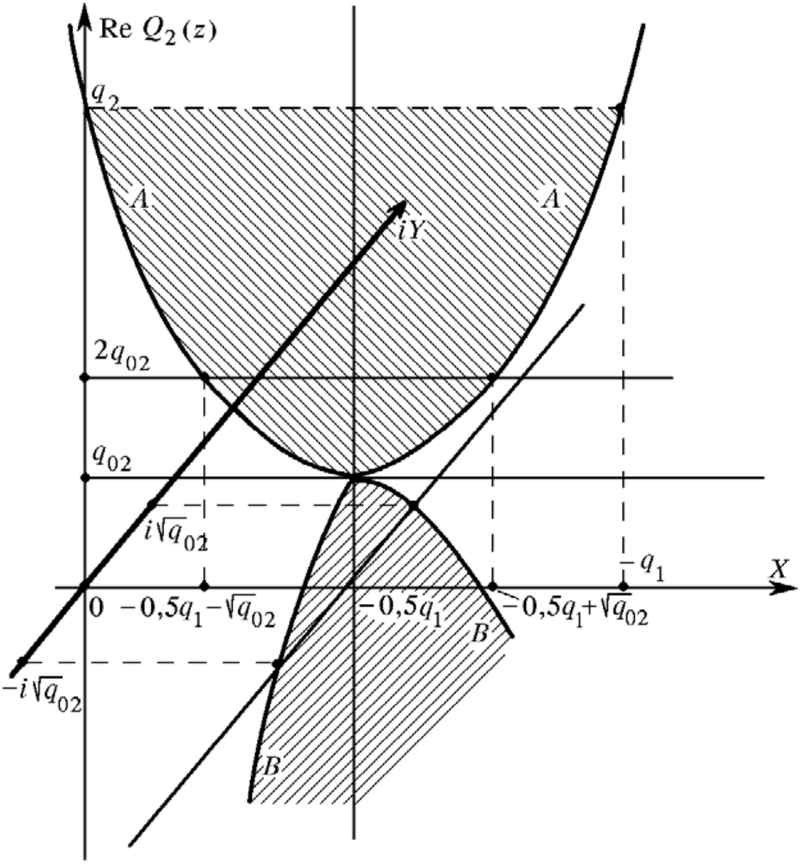


Рис. 2. *Действительная функция второго порядка комплексного переменного*

Графически, это тоже линейчатая, образующая уравнения фигура. Проекция этой фигуры на плоскость аргумента в соответствии с уравнением (30)

$$iY = \pm\sqrt{X^2 + q_1 X + q_2} \tag{31}$$

представляет собой две пары гипербол с мнимо осью X при положительном дискриминанте трехчлена (31) и с мнимой осью iY при отрицательном дискриминанте.

Можно, наконец, рассматривать и комплексную функцию комплексного переменного (28), которая запишется как система двух функций

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}Q_2(Z)=X^2+q_1X+q_2+(iY)^2\\&i\,\mathrm{Im}Q_2(Z)=(iY)(2X+q_1)\end{aligned}\qquad(32)$$

соответственно не равных нулю мнимой и действительной частей комплексной функции (28). В своих трехмерных комплексных пространствах в ортами $(i_1, 1_1, 1_2)$ и $(i_2, 1_1, 1_2)$ каждая из функций (32) представляет собой поверхность. Пересечение же поверхностей имеет место в непредставимом четырехмерном пространстве с ортами $(i_1, i_2, 1_1, 1_2)$. Результатом пересечения является двухветьевая линейчатая фигура (рис. 2). Двухветьевая и линейчатая потому, что в любом сечении фигуры плоскостью $Q_2=\mathrm{const}$ параллельной плоскости аргумента, существует в силу основной теоремы алгебры, только две точки проколов определяемых уравнением

$$Q_2(Z)=Z^2+q_1Z+q_2=\mathrm{const}$$

Рассмотрим еще график функции третьего порядка. Графики алгебраических действительных функций комплексного аргумента (второго, третьего, четвертого и пятого порядков) разработаны и представлены автором в статье «Анализ и синтез математических моделей физических устройств и процессов» [4].

Аналитически будем рассматривать функцию в центральной системе координат (первый коэффициент равен нулю)

$$Q_3(Z)=Z_3+3q_{02}Z-q_{03}$$

Это позволяет упростить выкладки. Построение же фигуры функции, для общности, будет проводиться в периферийной системе, т.е. со сдвигом центра тяжести фигуры на величину первого коэффициента — a_1 (рис. 3).

Аналогично функции второго порядка, действительная функция третьего порядка, в параметрах переменной, записывается системой из двух формул

$$\begin{aligned}&\mathrm{Re}\,Q_3(Z)=X^3+3(iY)^2\,X-q_{03}\\&i\,\mathrm{Im}\,Q_3(Z)=(iY)\left[(iY)^2+3x^2+3q_{02}\right]=0\end{aligned}\tag{33}$$

Фигура графика функции состоит из четырёх ветвей (рис. 3).

Ветвь $A-A'$ фигуры

$$\begin{aligned}&Y=0\\&\mathrm{Re}\,Q_3(Z)=X^3+3q_{02}X-q_{03}\end{aligned}$$

полученная из совместного решения формул системы (33) определяет действительные корни образуемых в горизонтальных сечениях уравнений. Кривая лежит в плоскости $Q_{03}\,0\,X$, плоскость листа, и нанесена более плотной линией.

Ветвь $B-B'$ фигуры

$$\begin{aligned}&Y\neq0\\&-\mathrm{Re}\,Q_3(Z)=(2X)^3+3q_{02}(2X)+q_{03}\end{aligned}$$

полученная из совместного решения формул системы (33), по форме — вдвое сжатая в поперечнике кривая $A-A'$. Ветвь определяет середины корней образуемых уравнений. Причём корней как комплексных так и действительных. Кривая $B-B'$, как и кривая $A-A'$ лежит в плоскости $(Q_{03}\,0\,X)$ листа рисунка и нанесена более тонкой линией.

Ветви $C-C'$ фигуры, проекции которых на плоскость аргумента записываются уравнением (33)

$$\begin{aligned}&Y\neq0\\&0=(iY)^2+3X^2+3q_{02}\end{aligned}$$

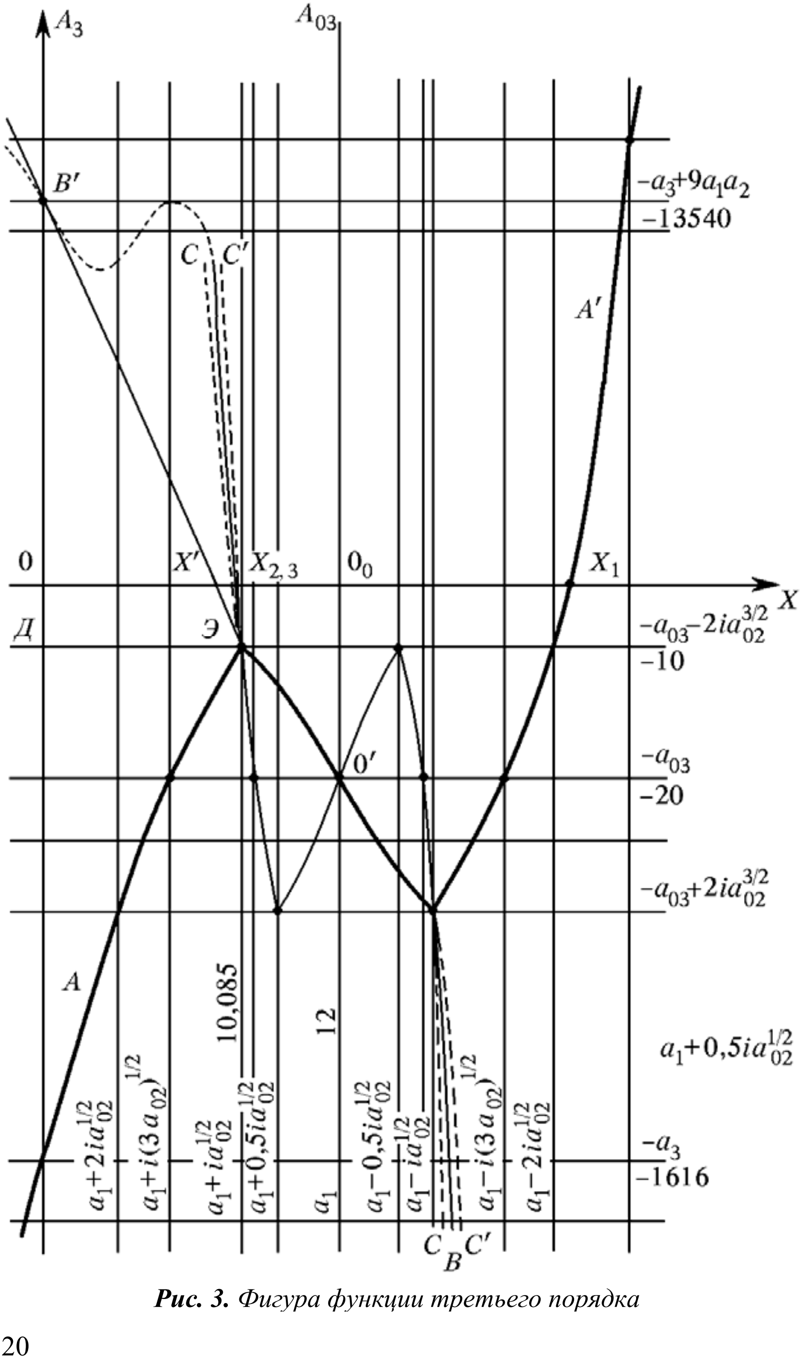


Рис. 3. *Фигура функции третьего порядка*

и представляют собой пространственные параболы второго порядка, лежащие в изогнутой плоскости нормальной к плоскости $(Q_3\,0\,X)$ листа. Вершины парабол $C-C'$ соприкасаются с точками экстремумов ветви $A-A'$. Осевыми линиями парабол являются отходящие ветви кривой $B-B'$. Параболы $C-C'$ определяют комплексные корни образуемых функцией (33) уравнений.

Для функции третьего порядка, из анализа двух её производных достаточно просто определяются координаты точек экстремумов и перегиба. Дополняя эти точки точками пересечения оси ординат линиями фигуры функции (33), проставляем их координаты на выносных линиях (рис. 3). Полученная сетка известных координатных линий позволяет произвести оценку знаков и величин корней любого из частно образованных функцией (33) уравнений. При необходимости, построенная сетка может быть дополнена промежуточными линиями и превращена в вычислительную сетку.

Рассмотрим числовой пример уравнения третьей степени и его образующей функции, подтверждающий правильность сделанного построения

$$Q_3(Z)=Z^3-36Z^2+421Z-1616=0 \tag{34}$$

Выписываем коэффициенты заданного уравнения (34)

$$3a_1=q_1=36$$
$$3a_2=q_2=421$$
$$a_3=q_3=1616$$

Вычисляем коэффициенты уравнения в центральной системе координат

$$a_{02}=-\left(\frac{q_1}{3}\right)^2+\frac{q_2}{3}=-\frac{11}{3}$$

$$a_{03}=2\left(\frac{q_1}{3}\right)^3-3\left(\frac{q_1}{3}\right)\left(\frac{q_2}{3}\right)+q_3=20$$

ориентируясь на знаки первого коэффициента (q_1) и коэффициента третьего порядка (q_{03}), заключаем, что центр собственной системы отсчёта образующей функции заданного уравнения (34) находится во втором квадранте плоскости $Q_{03}, 0', q_{03}$.

Двигаясь по оси (q_{03}) в направлении оси ординат системы отсчёта образующей функции заданного уравнения, вычисляем ординаты экстремума (Э) линии $A - A'$ фигуры образующей функции

$$-(q_{03}) - 2i(q_{02})^{\frac{3}{2}} = -10$$

и точки (B') пересечения линии $B - B'$ с осью ординат

$$-q_3 + 9q_1q_2 = 13540$$

Сопоставляя полученные значения величин ординат, заключаем, что действительный корень (X_1) заданного уравнения (34) положителен, комплексные — имеют положительную действительную часть $(X_{2,3})$.

С целью более точного вычисления величин корней определяем абсциссу экстремума (Э) (34) линии $A - A'$

$$q_1 + iq_{02}^{\frac{1}{2}} = 10{,}085$$

Из аппроксимирующих треугольников $B'ДЭ$ и $B'OX'$ приближённо определяем действительную часть комплексно сопряжённых корней заданного уравнения

$$X' = \frac{ДЭ \cdot OB'}{B'Д} = \frac{10{,}085 \cdot 13540}{13550} = 10{,}07756$$

Мнимую часть корней определяем из уравнения системы (33) образующей функции, но в периферийной системе координат, по найденному значению действительной части корней

$$(iY)=\sqrt{-3(X')^2+6a_1(X')-3a_2}=\sqrt{-0{,}0873}=i0{,}295$$

Действительный корень Z_1 заданного уравнения (34) получаем из формулы для его первого коэффициента по найденным комплексно сопряжённым корням Z_2 и Z_3

$$Z_1=q_1-Z_2-Z_3=36-(10{,}07756+i0{,}295)-(10{,}07756-i0{,}295)=15{,}84$$

Для сравнения и оценки корректности рисунка фигуры (рис. 3) отметим, что истинно, корни заданного (34) уравнения соответственно равны

$$Z_1=16,\ Z_{2,3}=10\pm i$$

т.е. построенная фигура функции третьего порядка соответствует действительности, в каждом из ее сечений плоскостью $Q_3(Z)=const$ находится три прокола определяющих корни образованного функцией уравнения третьей степени.

Если обобщить выводы проведенного анализа фигур функций второго и третьего порядков, то можно заключить, что *функция υ-того порядка (21) графически представляет собой υ-линейчатую пространственную фигуру [5].* В любом сечении фигуры плоскостью $Q_\upsilon=const$ параллельной плоскости аргумента имеется υ проколов, определяющих расположение корней образуемого функцией уравнения υ-той степени

$$Q_\upsilon(Z)=Z^\upsilon+q_1Z^{\upsilon-1}+\ldots+q^\upsilon=\mathrm{const}$$

Алгебраическое уравнение, таким образом, определяется как любое фиксированное значение полиномиальной функции.

В случае, если в качестве секущей плоскости выступает плоскость аргумента $(Q_\upsilon=0)$, уравнение (34) принимает каноническую форму

$$Q_\upsilon(Z)=Z^\upsilon+q_1Z^{\upsilon-1}+\ldots+q_\upsilon=0 \tag{35}$$

корни которого рассеяны по плоскости аргумента пространства, определенного коэффициентами образующей функцией.

В своей совокупности корни уравнения определяют решение уравнения. *Уравнение — это точечная функция*. Полный антипод какой бы то ни было непрерывности. Функция существующая только в точках корней и несуществующая ни в какой, сколь угодно малой окрестности этих точек. Записывается решение одной или несколькими формулами, некоторые из которых могут быть многозначными. *Уравнение, в этой связи, может рассматриваться как аналитическая форма записи точек на плоскости.*

1.3. Формы представления алгебраических функций

Ранее уже была представлена каноническая форма (35) уравнения. Каноническая форма является наиболее обобщенной и отвлеченной. Коэффициенты формы не несут смысловой нагрузки.

Наиболее физичной формой полиномиальной функции является знакопеременная, биномиальная.

1.3.1. Биномиальная форма функций и уравнений

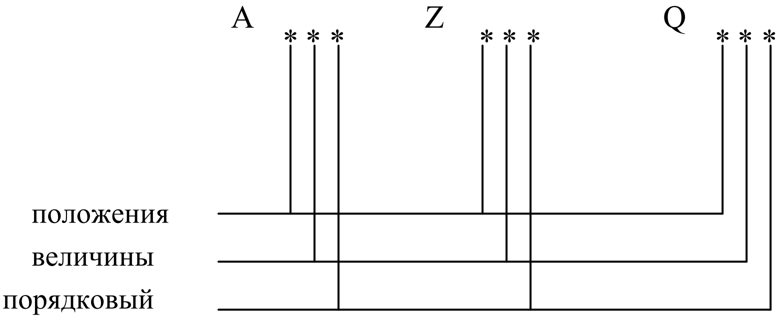
Основной отличительной особенностью биномиальной формы полинома

$$A_\upsilon(Z)=Z^\upsilon-C_\upsilon^1 a_1 Z^{\upsilon-1}+C_\upsilon^2 a_2 Z^{\upsilon-2}+\ldots+(-1)^\upsilon C_\upsilon^\upsilon a_\upsilon=\text{const} \qquad (36)$$

является наличие около буквенного коэффициента (a_υ) числового множителя (C_υ). Роль множителя выполняет биномиальное число, равное количеству сочетаний из числа корней функции (36) по числу, соответствующему порядку величины коэффициента. Физически, это число определяет количество слагаемых, из которых состоит коэффициент.

Другой отличительной особенностью биномиальной формы является ее знакопеременность. В такой форме первый коэффициент (a_1) уравнения определяет геометрический и физический центр тяжести точек корней на плоскости, центр тяжести многоугольника корней уравнения. Причем, во всех возможных сечениях образующей функции плоскостями $A_\upsilon(Z)=const$. Первый коэффициент (a_1), таким образом, является центром («осью») тяжести всей фигуры образующей функции. Стержнем, в опоре на который фигура образующей функции и любая ее часть между сечениями остаются в равновесном состоянии.

Буквенные символы формул алгебраических функций, в общем случае могут различаться по трем качественным признакам. Для обозначения этих признаков вводится три подстрочных, цифровых индекса



Порядковый индекс — номер обозначенного символом параметра по порядку. Если не требуется, то опускается.

Индекс величины — означает порядок измеряемых величин параметра относительно величины аргумента. Индекс не изменяется при перемещении функций внутри заданного пространства, что имеет место при линейном ее отображении. Индекс изменяется при перемещении в пространство другого измерения аргумента, что имеет место при нелинейном отображении функций. Для заданного уравнения или функции, если не оговорено противного, порядок измерения величин на плотности аргумента принимается первым (индекс единица) и, если этого не требует контекст (индекс) может опускаться.

Индекс положения — отражает изменение расположения функции внутри заданного пространства. Такая ситуация возникает при отображениях в собственное пространство. Индекс не изменяется при отображениях в другое пространство. Индекс положения, в отличие от других индексов, может принимать нулевое значение. Индекс «единица» приписывается функции расположенной в заданном, периферийном положении. Индекс «ноль» приписывается функции занимающей центральное положение, когда центр отсчета размещается в центре тяжести корней и соответственно равен нулю первый коэффициент $(a_1=0)$. Индексы — 2, 3... отражают новое периферийное положение образующей функции.

К аналитическим свойствам алгебраических функций в биномиальной форме относится совпадение функции со своим разложением в ряд Тейлора. Если выписать подряд несколько функций

$$\begin{aligned} &A_1(Z)=Z-a_1 \\ &A_2(Z)=Z^2-2a_1Z+a_2 \\ &A_3(Z)=Z^3-3a_1Z^2+3a_2Z-a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (37)$$

То налицо их интегро-дифференциальная связь, в соответствии с которой каждая предыдущая функция является как будем говорить, «целой производной» от последующей, а каждая последующая — интегралом от предыдущей.

Функциями и уравнениями в биномиальной форме удобно пользоваться при исследовании самих функций, так как в этой форме, такие важные характеристики образуемых функцией уравнений как инварианты и дискриминанты, в общей своей, буквенной форме записываются более просто (без дробных множителей).

1.3.2. Знакопеременная каноническая форма

Функция в знакопеременной канонической форме имеет вид

$$R_\upsilon(Z)=Z^\upsilon-r_1Z^{\upsilon-1}+r_{11}Z^{\upsilon-2}-r_{111}Z^{\upsilon-3}+\ldots+r_{111} \qquad (38)$$

где индексы коэффициентов собираются из единиц. Единиц в индексе столько, каков порядок величины коэффициента. Так последний, свободный, коэффициент функции υ-того порядка содержит в индексе υ единиц. Раскрытые формулы Виета (6), записи коэффициентов через корни функции, дополняются, теперь, сокращенной формой записи коэффициентов

$$r_1 = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_\upsilon = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_{\frac{1}{\upsilon}}$$

$$r_{11} = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + \ldots + Z_{\upsilon-1} Z_\upsilon = \left(Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right)_{\frac{2}{\upsilon}} \tag{39}$$

$$r_{111} = Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots + Z_{\upsilon-2} Z_{\upsilon-1} Z_\upsilon = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_{\frac{3}{\upsilon}}$$

…………………

Коэффициенты канонической знакопеременной формы называются теперь «симметричными моментами». «Симметричными», так как они не зависят от циклической перестановки цифр индекса. «Моментами», так как форма зависимости коэффициентов от корней подходит под определение сумм моментов точечных масс. Слагаемые сумм коэффициентов называются частными моментами, а частный момент, индексы которого представляют последовательность цифр натурального ряда, начиная с единицы, называется головным частным моментом. Головной частный момент пишется в скобках сокращенной формы записи суммы. За скобкой проставляется подстрочный индекс равный количеству сочетаний из общего числа корней функции по числу порядка коэффициента или числу сомножителей в головном частном моменте. Цифры подстрочного индекса в обозначении симметричного момента — это степени соответствующих корней сомножителей головного частного момента.

Для обозначения симметричных моментов функций первых пяти порядков употребляются закрепленные, «свои» буквы. Моменты уравнения второй степени обозначаются буквой «d», третьей — «m», четвертой — «n», пятой — «p».

$$\begin{aligned}
&D_2(Z) = Z^2 - d_1 Z + d_{11} \\
&M_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111} \\
&N_4(Z) = Z^4 - n_1 Z^3 + n_{11} Z^2 - n_{111} Z + n_{1111} \\
&P_5(Z) = Z^5 - p_1 Z^4 + p_{11} Z^3 - p_{111} Z^3 + p_{1111} Z - p_{11111}
\end{aligned} \tag{40}$$

Функция обозначается соответствующей прописной буквой с подстрочным индексом, равным ее порядку величины. Симметричные моменты, в обозначении индекса которых употребляются только единицы, называются единичными и считаются известными, если не оговорено противоположное.

Форма функций с коэффициентами — моментами является операционной. *Симметричные моменты это аппарат, предназначенный (в частности) для построения отображений функций.*

1.3.3. Уравнение в относительных единицах

Поделив уравнение на свободный коэффициент, получим выражение в относительных единицах

$$\text{æ}^{\upsilon} + \alpha_1 \text{æ}^{\upsilon\text{-}1} + \alpha_2\ \text{æ}^{\upsilon\text{-}2} + ... + \alpha_{\upsilon-1}\ \text{æ}+1 = 0 \qquad (41)$$

В качестве нормирующего множителя может быть выбрана и другая постоянная, а коэффициентам уравнения (41) в относительных единицах может быть придана другая форма (биномиальная, момент).

Форма в относительных единицах является наиболее отвлеченной. Отпадает условность, связанная с размерностью коэффициентов. Функции можно свободно сравнивать, подвергая их воздействию различных операций. В относительной форме могут исследоваться качественные характеристики отдельных уравнений.

На рисунке 4 в представлена комплексная числовая плоскость, карта, снятая с числовой сферы (рис. 4*а*). Начало координат плоскости совпадает с южным полюсом сферы

Экватор сферы на плоскости представляет единичная окружность. Северный полюс сферы на плоскости растянут в окружность двойного диаметра, представляющую геометрическое место бесконечно удаленных точек плоскости. За этим кругом точек плоскости нет.

Концентрические окружности на карте представляют широты числовой сферы — места чисел постоянного модуля. Диаметры окружностей карты представляют долготы числовой сферы — места чисел постоянного аргумента. Точки сферы, расположенные на концах дуг, проходящих через точку «единица» сферы являются обратными. Противоположные точки размещены аналогично на дугах, проходящих через центр отсчета.

Корни уравнения (41) в относительных единицах разместятся на числовой плоскости (рис. 4*b*) только по разные стороны линии единичного круга, так как произведение корней уравнения, равное свободному коэффициенту, равно единице. Предположим, что точки корней уравнения (41), обозначенные на рисунке крестиками, разместились в средних широтах.

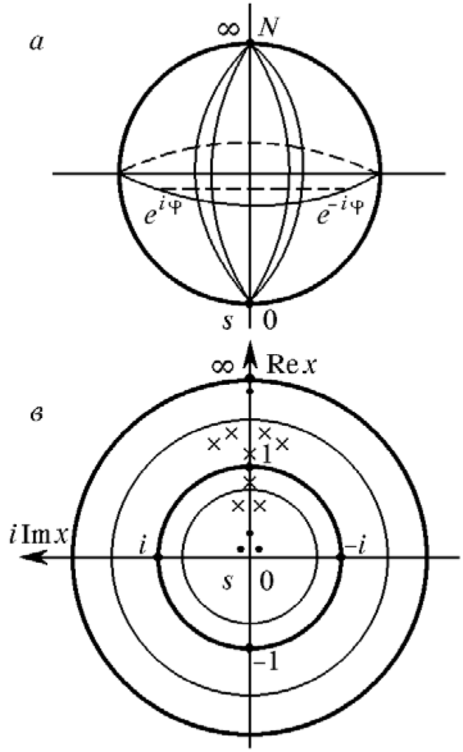


Рис. 4. Числовая сфера и её карта

Произведем замену переменного в уравнении (41) на новую æ_{υ}, связанную со старой переменной æ формулой

$$\text{æ}_{\upsilon} = \text{æ}^{\upsilon} \qquad (42)$$

Преобразование функции (уравнения), обусловленное заменой переменного, в современной математике называется отображением. А новое переменное (42) называется функцией отображения.

При рассматриваемом отображении, точки корней модули которых больше единицы, по мере возрастания степени (υ) функции отображения (42), устремятся к наружной окружности карты числовой сферы. Точки корней, модули которых меньше единицы, устремятся к центру отсчета. Т.е. при увеличении степени функции отображения корни, модули которых больше единицы, стремятся к бесконечно большим числам северного полюса сферы, и а корни модули которых меньше единицы, стремятся к бесконечно малым числам южного полюса сферы. *Уравнение — образ, мы будем говорить, естественно распадается на два подуравнения,* группы корней которых не зависят друг от друга и вычисляются каждая из своего подуравнения. Вычисление приближенно, но, очевидно, точность его зависит от выбора степени (υ) функции отображения (42) и может быть сколь угодно высокой.

2. Уравнения с действительными коэффициентами

2.1. Уравнение второй степени

Анализ уравнений ведется на основе исследования рисунков многоугольников корней уравнений, получающихся в сечениях образующих функций. Рисунки наглядно позволяют выразить коэффициенты уравнений через геометрические параметры многоугольников, дать коэффициентам физическое толкование, определить частные случаи конфигурации и размещения многоугольников, произвести предварительный анализ корней уравнения, построить общие решения.

Рассмотрим уравнение второй степени в некотором заданном (индекс 1), центральном (индекс 0) и еще раз, в некотором периферийном (индекс 2) положениях (рис. 5*а*)

$$A_{12}(Z) = Z^2 - 2a_{11}Z + a_{12} = 0 \tag{1.1}$$

$$A_{02}(Z) = Z^2 - 2a_{01}Z + a_{02} = 0 \tag{1.2}$$

$$A_{22}(Z) = Z^2 - 2a_{21}Z + a_{22} = 0 \tag{1.3}$$

Согласно формуле определения Виета первый коэффициент

$$2a_1 = Z_1 + Z_2$$

представляет собой центр тяжести корней, их действительную часть, если корни комплексно сопряженные или общую (действительную) часть, если корни парны и действительны. На рисунке (рис. 5*а*) корни представлены комплексно сопряженными, с мнимой частью — ie. Многоугольник корней уравнения представляет собой двухточечник, диполь. Для каждого из положений диполя можно записать формулы, определяющие его корни

$$\begin{matrix} Z_{11}=a_{11}-ie & Z_{01}=a_{01}-ie=-ie & Z_{21}=a_{21}-ie \\ Z_{12}=a_{11}+ie & Z_{02}=a_{01}+ie=+ie & Z_{22}=a_{21}+ie \end{matrix} \qquad (2)$$

через общую часть, основание и дополнение, полуплечо.

Из приведенных формул и рис. 5*а* видно, что первый коэффициент (1,2) уравнения не зависит от геометрических параметров многоугольника корней. Он является внешней характеристикой многоугольника корней уравнения, характеристикой определяющей удаленность центра тяжести корней от центра системы отсчета. При этом очевидно, что в центральной системе координат, когда центр отсчета размещается в центре тяжести корней, первый коэффициент уравнения равен нулю $(a_{01}=0)$.

Второй коэффициент уравнения является функцией внутреннего параметра диполя (2)

$$\begin{aligned} a_{12}&=Z_{11}Z_{12}=a_{11}^2+e^2 \\ a_{02}&=Z_{01}Z_{02}=a_{01}^2+e^2=e^2 \\ a_{22}&=Z_{21}Z_{22}=a_{21}^2+e^2 \end{aligned} \qquad (3)$$

его, остающегося неизменным, полуплеча ie. Выделяя неизменную часть полученных (3) формул, можно приравнять ее униформной функции коэффициентов разнорасположенных диполей уравнений (1)

$$a_{02}=e^2=-a_{11}^2+a_{12}=-a_{21}^2+a_{22} \qquad (4)$$

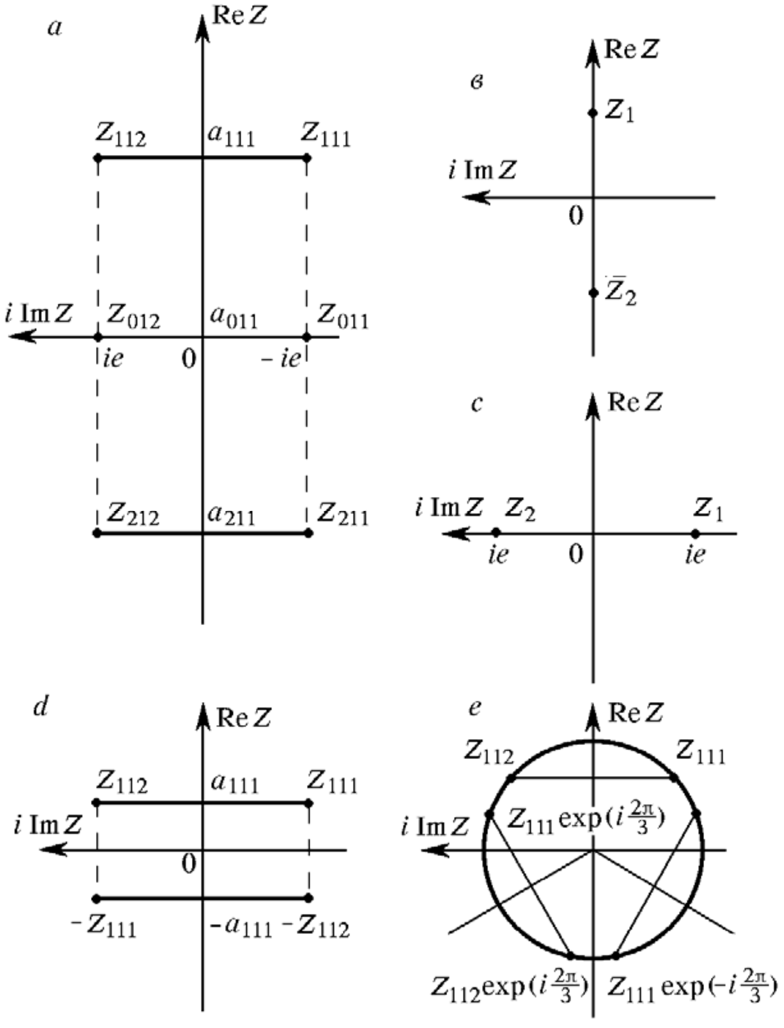


Рис. 5. *Многоугольник (диполь) корней уравнения второй степени*

Функция, сохраняющая постоянной, независимой свою величину при перемещении, называется инвариантной относительно перемещения или инвариантом перемещения. Аналитически, перемещение заданного уравнения (1) осуществляется линейной заменой переменного, т.е. линейным отображением. Полученный инвариант, таким образом, определяется как функция коэффициентов сохраняющая неизменной свою величину при линейном отображении многоугольника корней уравнения.

В рассматриваемом примере уравнения второй степени, инвариант равен (4) квадрату полуплеча диполя, равен также свободному коэффициенту уравнения размещенного в центральной системе координат. Можно утверждать, что если второй коэффициент уравнения — инвариант, то первый коэффициент равен нулю. Из формул же (4) определяющих инвариант следует и обратное утверждение: если первый коэффициент уравнения равен нулю, то второй коэффициент — инвариант линейного отображения. В более общей форме, подтверждение чему следует ниже, можно сказать — для того, чтобы коэффициенты уравнения были инвариантами необходимо и достаточно равенство нулю первого коэффициента.

Инвариант линейного отображения уравнения, который теперь всегда будем обозначать как центральный коэффициент, оказывается примечательной точкой образующей функции. Инвариант — это значение образующей функции в (над) точке центра тяжести многоугольника корней

$$a_{01} = A_2(a_1) = a_1^2 - 2a_1 \cdot a_1 + a_2 = -a_1^2 + a_2 \tag{5}$$

Уравнение второй степени в общей форме (1) в периферийной системе координат неразрешимо, так как в математике нет операции позволяющей решить квадратный трехчлен. Если же уравнение размещено в центральной системе координат, где первый его коэффициент равен нулю

$$Z^2 + a_{02} = 0 \tag{6}$$

то по форме, оно представляет собой квадратный двучлен и разрешимо с помощью известной операции извлечения корня. <u>*Решаемая форма (6) уравнения называется его резольвентой.*</u> Причем подразумевается, что через корни резольвенты могут быть найдены корни заданного уравнения.

Вычисляя корни резольвенты, находим

$$Z_{1,2} = \pm i\sqrt{a_{02}} = \pm i\sqrt{-a_1^2 + a_2} \tag{7}$$

что в центральной системе координат корни: или оба равны нулю, когда инвариант равен нулю; или оба действительны и противоположны (рис. 5*b*) (сопряжены относительно мнимой оси), когда инвариант отрицателен; или оба мнимы и противоположны (рис. 5*c*) (сопряжены относительно действительной оси) когда инвариант положителен.

Инвариант, играет роль различителя корней по характеру, их, так называемым, дискриминантом.

Инвариант и дискриминант действительно связаны между собой (6, 5 б, 14)

$$a_{02} = -a_1^2 + a_2 = -\left(\frac{Z_1 + Z_2}{2}\right)^2 - Z_1 Z_2 = -\left(\frac{Z_1 - Z_2}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} D_1^2$$

(8)

В основе решения алгебраических уравнений лежит нелинейное отображение многоугольника корней на плоскость более высокого порядка. Исторически, бессознательно, случайно, но именно этим методом были найдены общие решения уравнений второй, третьей и четвертой степеней. Методом отображения будем строить решения уравнений и более высоких степеней.

Воспользуемся рисунком 5 для предварительного, наглядного представления интересующего нас в дальнейшем стандартного отображения.

Дополним заданный диполь (Z_1, Z_2) рис. 5*d* диполем с противоположными корнями $(-Z_1, -Z_2)$. *Аналитически, полученный четырехугольник запишется уравнением четвертой степени*

$$\begin{aligned} &A_4(Z) = A_2(Z) \cdot A_2(-Z) = \\ &= \left(Z^2 - d_1 Z + d_{11}\right)\left(Z^2 + d_1 Z + d_{11}\right) \\ &= Z^4 - \left(d_1^2 - 2d_{11}\right)Z^2 + d_{11}^2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

которое в интересах дальнейшего, представлено в форме моментов, а назовем мы его симметрированным оригиналом.

Произведем замену переменного в уравнении (9) четвертой степени функцией

$$Z_2 = Z^2 \tag{10}$$

в результате получим уравнение второй степени

$$A_2(Z_2) = Z_2^2 - (d_1^2 - 2d_{11})Z_2 + d_{11}^2 = 0 \tag{11}$$

Но, построенное уравнение (11) второй степени является уравнением — образом уравнения — оригинала $A_2(Z)$, (1.1).

Образом стандартного отображения, стандартной функцией (10) с плоскости Z на плоскость Z_2. Уравнение-оригинал и уравнение-образ полученный стандартным отображением связаны между собой через уравнение симметрированного оригинала (11). *В рассматриваемом случае, оригинал дополнен только своим противоположным уравнением и называется симметрированным по второй степени.* Если уравнение-оригинал дополнить парой симметрирующих уравнений (рис. 5*e*), то получится уравнение шестой степени

$$\begin{aligned} A_6(Z) &= A_2(Z) \cdot A_2\left(Ze^{i\frac{2\pi}{3}}\right) \cdot A_2\left(Ze^{-i\frac{2\pi}{3}}\right) = \\ &= Z^6 - (d_1^3 - 3d_1d_{11})Z^3 + d_{11}^3 = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Заменив в последнем переменную функцией

$$Z_3 = Z^3 \tag{13}$$

получим уравнение-образ на плоскости третьего порядка

$$A_2(Z_3) = Z_3^2 - (d_1^3 - 3d_1d_{11})Z_3 + d_{11}^3 = 0 \tag{14}$$

Связь уравнения-оригинала с уравнением-образцом (12) теперь осуществляется через уравнение симметрированное по третьей степени.

2.2. Уравнение третьей степени

Уравнение третьей степени с действительными коэффициентами

$$A_3(Z)=Z_{11}^3-3a_{111}Z_{11}^2+3a_{112}Z_{11}-a_{113}=0 \tag{15}$$

на плоскости задания в общем случае, будем рассматривать как равнобедренный треугольник корней (рис. 6*а*). На рисунке треугольник представлен в некотором заданном положении (1), еще в одном периферийном положении (2) и в центральной системе координат (0), центр отсчета которой размещен в центре тяжести треугольника корней уравнения $(a_{111}=0)$.

Центр тяжести треугольника корней в общем случае расположен на расстоянии первого коэффициента (a_1) от начала координат, что является следствием определения первого коэффициента

$$3a_1=Z_1+Z_2+Z_3 \tag{16}$$

В случае центрального расположения треугольника корней

$$\begin{aligned} &a_1=0\\ &Z_1=X=\alpha_1 h\\ &Z_2=X+Y=\alpha_2 h+ie\\ &Z_3=X-Y=\alpha_2 h-ie \end{aligned} \tag{17}$$

где h — треть медианы и e — полуоснование треугольника, центр тяжести треугольника корней расположен в начале системы отсчета $(a_1=0)$, а медиана его делится точкой центра тяжести, в соответствии с (16, 17), в отношении ½

$$0=(\alpha_1+2\alpha_2)\cdot h \tag{18}$$

Выражаем корни уравнения через параметры треугольника корней

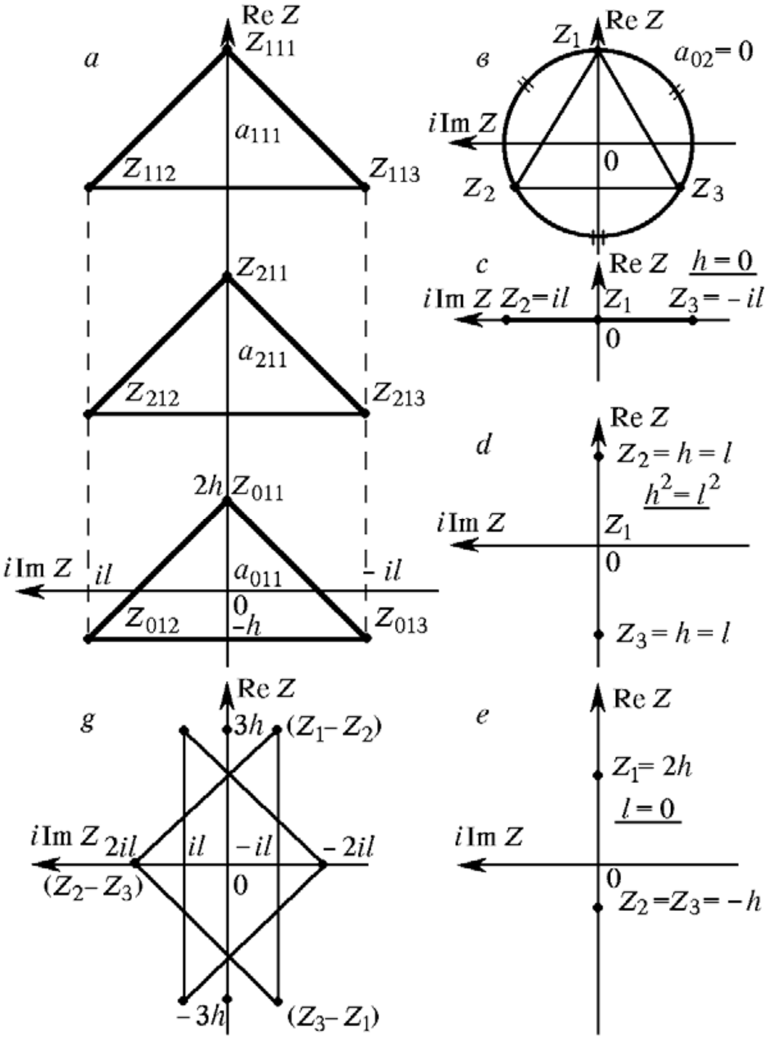


Рис. 6. *Многоугольник корней уравнения третьей степени*

$$\begin{array}{lll}
Z_{111}=a_{111}+2h & Z_{211}=a_{211}+2h & Z_{011}=a_{011}+2h \\
Z_{112}=a_{111}-h+ie & Z_{212}=a_{211}-h+ie & Z_{012}=a_{011}-h+ie \\
Z_{113}=a_{111}-h-ie & Z_{213}=a_{211}-h-ie & Z_{013}=a_{011}-h-ie
\end{array} \quad (20)$$

для различных положений треугольника на плоскости задания уравнения.

Видно, что, как и в случае уравнения второй степени, первый коэффициент уравнения третьей степени не зависит от внутренних, геометрических параметров многоугольника корней уравнения. Первый коэффициент уравнения является внешним параметром многоугольника корней или общей частью всех корней уравнения.

Вторые и третьи коэффициенты уравнения для различных положений треугольников корней

$$\begin{aligned} 3a_{112} &= \left(Z_{111}Z_{112} + \ldots\right)_3^1 = 3a_{111}^2 - 3h^2 + e^2 \\ 3a_{212} &= \left(Z_{211}Z_{212} + \ldots\right)_3^1 = 3a_{211}^2 - 3h^2 + e^2 \\ 3a_{012} &= \left(Z_{011}Z_{012} + \ldots\right)_3^1 = 3a_{011}^2 - 3h^2 + e^2 \end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned} a_{113} &= a_{111}^3 - 3a_{111}h^2 + a_{111}e^2 + 2h^3 + 2he^2 \\ a_{213} &= a_{211}^3 - 3a_{211}h^2 + a_{211}e^2 + 2h^3 + 2he^2 \\ a_{013} &= a_{011}^3 - 3a_{011}h^2 + a_{011}e^2 + 2h^3 + 2he^2 \end{aligned} \tag{22}$$

после разделения коэффициентов уравнений и параметров треугольников корней, позволяют получить формулы для вычисления центральных коэффициентов уравнения третьей степени через коэффициенты в периферии или параметры треугольника корней

$$\begin{aligned} 3a_{02} &= 3\left(-a_1^2 + a_2\right) = -3h^2 + e^2 \\ a_{03} &= 2a_1^3 - 3a_1a_2 + a_3 = 2h^3 + 2he^2 \end{aligned} \tag{23}$$

которые, как и в случае уравнения второй степени, одновременно являются инвариантами размещения и линейного отображения уравнения.

Инвариант третьего порядка, но с противоположным знаком, может быть получен и как значение образующей уравнение функции в точке центра тяжести треугольника корней

$$-a_{03} = A_3\left(Z = a_1\right) = a_1^3 - 3a_1 \cdot a_1^2 + 3a_2 \cdot a_1 - a_3 \tag{24}$$

Таково свойство алгебраической функции.

Инвариант второго порядка, в силу интегро-дифференциальной связи формул уравнений в биномиальной форме, вычисляемый как значение производной в точке $Z = a_1$ образующий функции (15), представляет собой одновременно инвариант уравнения второй степени. Это тоже свойство алгебраической функции.

В силу указанных свойств можно заключить, что инварианты расположения и линейного отображения уравнений разных степеней имеют одни и те же формулы, которые могут быть вычислены заранее

$$\begin{aligned}
&a_{01} = -A_1(z = a_1) = a_1 - a_1 = 0 \\
&a_{02} = A_2(z = a_1) = a_1^2 - 2a_1 \cdot a_1 + a_2 = -a_1^2 + a_2 \\
&a_{03} = -A_3(z = a_1) = -\left(a_1^3 - 3a_1 \cdot a_1^2 + 3a_2 a_1 - a_3\right) = 2a_1^3 - 3a_1 a_2 + a_3 \\
&a_{04} = A_4(Z - a_1) = -3a_1^4 + 6a_1^2 a_2 - 4a_1 a_3 + a_4 \\
&a_{05} = -A_5(z = a_1) = 4a_1^5 - 10a_1^3 a_2 + 10a_1^2 a_3 - 5a_1 a_4 + a_5 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{25}$$

как значения образующих уравнения функций в точках над центрами тяжести своих многоугольников корней, при этом знаки инвариантов нечетного порядка должны быть изменены на противоположные.

Основные решаемые частные случаи уравнений третьей степени, которые будем рассматривать на примере уравнения в центральной системе координат

$$Z^3 + 3a_{02} Z - a_{03} = 0 \tag{26}$$

характеризуются предельными значениями коэффициентов или геометрических параметров треугольников корней.

Так в случае первом — равенства нулю инварианта (23) второго порядка $(a_{02} = 0)$, уравнение принимает вид (23, 26)

$$Z^3 - a_{03} = 0 \tag{27}$$

корни которого равномерно распределены по центральной окружности. Многоугольник корней — равносторонний треугольник (рис. 6*b*).

В случае втором — равенства нулю инварианта (23) третьего порядка $\left(a_{03}=0\right)$ и медианы треугольника корней $\left(h=0\right)$, уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} &Z^3+3a_{02}Z=0 \\ &e^2=3a_{02} \end{aligned} \tag{28}$$

корни которого расположены на мнимой оси системы отсчета. Причем один из корней равен нулю, а два других противоположны (рис. 6*c*).

В случае третьем, когда при равенстве нулю инварианта (23) третьего порядка $\left(a_{03}=0\right)$ имеет место связь между параметрами треугольника корней

$$h^2+e^2=0$$

уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} &Z^3+3a_{03}=0 \\ &4h^2=-3a_{02} \end{aligned} \tag{29}$$

корни которого расположены на действительной оси системы отсчета. Причем, один из корней равен нулю, а два других противоположны (рис. 6*d*).

В четвертом случае, когда равно нулю основание треугольника корней $\left(e=0\right)$ (рис. 6*e*), парные корни уравнения (36) становятся равными (кратными). Треть медианы $\left(h\right)$ треугольника корней уравнения вычисляется из системы уравнений (23, 25)

$$\begin{aligned} &Z^3-3h^2Z-2h^3=0 \\ &h^2=-a_{02} \\ &h^3=\frac{a_{03}}{2} \end{aligned} \tag{30}$$

и соответственно, имеет место связь между центральными коэффициентами

$$h^6 = -a_{02}^3 = \frac{a_{03}^2}{4}$$

Если заданное уравнение расположено не в центральной системе координат, то центры тяжести частных треугольников (27–30) окажутся сдвинутыми от начала координат на величину первого коэффициента (a_1) уравнения по действительной оси системы отсчета.

В общем случае алгебраическое уравнение степени выше единицы неразрешимо напрямую, какой то одной операцией, так как в математике такой операции нет. В связи с чем для нелинейного уравнения сначала ищется частная решаемая форма, образ заданного уравнения, например, центральное расположение (5) для уравнения второй степени или образ с центрально симметричным треугольником корней (27) для уравнения третьей степени. Для решаемой формы существует корневая, неалгебраическая операция, применение которой позволяет вычислить корни уравнения (образа), а далее и корни заданного уравнения.

Исторически, поиск частных, решаемых форм оказался единственным продуктивным путем получения полных решений уравнений. Именно на этом пути, в свое время, были найдены решения уравнений второй, третьей и четвертой степеней.

Разрешая систему уравнений (23) относительно параметров треугольника корней можно получить два новых уравнения

$$\begin{aligned} &(2h)^3 + 3a_{02}(2h) - a_{03} = 0 \\ &(2ie)^6 + 2(9ha_{02})(2ie)^4 + (9a_{02})^2(2ie)^2 + 27\left(4a_{02}^3 + a_{03}^2\right) = 0 = \end{aligned} \qquad (31)$$

Первое из найденных уравнений — это уравнение медиан треугольника корней или заданное уравнение (26). Второе уравнение если его представить произведением двух уравнений третьей степени

$$\begin{aligned} &= \left[(2ie)^3 + 9a_{02}(2ie)\right]^2 + 27 \cdot D_6 = \\ &= \left[(2ie)^3 + 9a_{02}(2ie) + i\sqrt{27D_6}\right]\left[(2ie)^3 + 9a_{02}(2ie) - i\sqrt{27D_6}\right] = 0 \end{aligned}$$

(32)

представит как произведение двух сопряженных уравнений, треугольники корней которых получены из треугольника корней заданного уравнения взаимной заменой медиан на стороны, а третьих коэффициентов на дискриминант (рис. 6*g*).

Дискриминант уравнения третей степени (31, 32)

$$D_6 = 4a_{02}^3 + a_{03}^2 \tag{33}$$

более сложная функция коэффициентов чем это было в случае уравнения второй степени. Однако основной физический смысл этого параметра, как разделителя действительных и комплексных (а посредине кратных) корней, остается неизменным. По существу, у уравнения третьей степени дискриминантов два, по числу экстремумов у образующей функции, но это видно только после построения графика образующей функции.

Рассмотрим более подробно уравнение (32) сторон (рис. 6*g*), корни которого определяются как разности корней (20) заданного (15) уравнения

$$\begin{aligned} Z_1 - Z_2 &= 3h - ie \\ Z_2 - Z_3 &= 2ie \\ Z_3 - Z_4 &= -3h - ie \end{aligned} \tag{34}$$

В общем случае уравнение сторон выглядит так

$$Z^3 - 3b_1Z^2 + 3b_2Z - b_3 = 0 \, (35)$$

Корни (34) уравнения нам известны. Вычисляем его коэффициенты. Первый коэффициент

$$3b_1 = \left[\left(Z_1 - Z_2 \right) + \ldots \right]_3 = 0 \tag{36}$$

оказался равным нулю (что совпадает с записью (32). Значит уравнение сторон расположено в центральной системе координат (как показано на рис. 6*g*) и значит второй и третий коэффициенты уравнения (35) сторон — инварианты линейного отображения.

Второй и третий коэффициенты уравнения сторон (35) в силу (34, 23) равны

$$\begin{aligned} &3b_2 = 3b_{02} = 3\left(-3h^2 + e^2\right) = 9a_{02} \\ &b_3 = b_{03} = -2ie\left(9h^2 + e^2\right) \end{aligned} \tag{37}$$

Раскрывая дискриминант (33) заданного уравнения (35) через параметры треугольника корней (23) и учитывая найденное значение третьего коэффициента (37) уравнения сторон (35) можно найти, что третий инвариант уравнения сторон (35) действительно равен дискриминанту заданного уравнения

$$\begin{aligned} &D_6 = 4\left(-3h^2 + e^2\right)^3 + \left(2h^3 + 2he^2\right)^2 = \\ &= -\frac{1}{27}(2ie)^2\left(9h^2 + e^2\right)^2 = -\frac{1}{27}b_{03}^2 \end{aligned} \tag{38}$$

В приведенных выкладках обращают на себя внимание выражения через параметры треугольника корней инвариантов (23, 37) уравнений заданного (15) и его сторон (32). Выписываем их вместе

$$\begin{aligned} &3a_{02} = -3h^2 + e^2 \\ &a_{03} = 2\left(h^3 + he^2\right) \\ &b_{03} = -2i\left(9h^2 e + e^3\right) \end{aligned} \tag{39}$$

Из первого равенства можно получить

$$(3a_{02})^3 = \left(\sqrt{3}h + e\right)^3 \cdot \left(-\sqrt{3}h + e\right)^3 \tag{40}$$

а из двух вторых соответственно

$$\begin{aligned} &ib_{03} = +\left(\sqrt{3}h + e\right)^3 + \left(-\sqrt{3}h + e\right)^3 \\ &3\sqrt{3}a_{03} = \left(\sqrt{3}h + e\right)^3 - \left(-\sqrt{3}h + e\right)^3 \end{aligned} \tag{41}$$

Т.е. для заданного уравнения (15) мы можем построить резольвенту

$$Z_3^2 - ib_{03}Z_3 + (3a_{02})^3 = 0 \tag{42}$$

которую, в соответствии с вышеприведенными равенствами (33, 38) можно записать и через инварианты заданного уравнения

$$Z_3^2+\sqrt{27\left(4a_{02}^3+a_{03}^2\right)}Z_3+\left(3a_{02}\right)^3=0 \qquad (43)$$

Отметим, что найденная резольвента второй степени находится на плоскости третьего порядка. Уравнение резольвенты (5) первой степени находилось на плоскости второго порядка.

Корни резольвенты (43) второй степени и, соответственно, параметры (17) корней заданного уравнения (15) могут быть вычислены из промежуточных равенств с учетом равенств (33, 38).

Проделав перечисленные операции и подставляя найденные значения параметров треугольника корней в формулы (17) определяющие эти корни, найдем:

$$Z_1=a_1+\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}a_{03}+\sqrt{27\left(4a_{02}^3+a_{03}^2\right)}}-\sqrt[3]{3\sqrt{3}a_{03}-\sqrt{27\left(4a_{02}^3+a_{03}^2\right)}}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}$$

$$Z_{2,3}=a_1-\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}a_{03}+\sqrt{27\left(4a_{02}^3+a_{03}^2\right)}}-\sqrt[3]{3\sqrt{3}a_{03}-\sqrt{27\left(4a_{02}^3+a_{03}^2\right)}}}{2\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}\pm$$

$$\pm\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}a_{03}+\sqrt{27\left(4a_{02}^3+a_{03}^2\right)}}-\sqrt[3]{3\sqrt{3}a_{03}-\sqrt{27\left(4a_{02}^3+a_{03}^2\right)}}}{\sqrt[3]{2}}$$

(44)

Полученные формулы представляют собой общее решение уравнения третьей степени. Формулы эти найдены итальянским математиком Н. Тартальи (Опубликованы в 1545 г., по заимствованию, Кардано). Решений уравнения третьей степени существует множество. Кстати. решение Н. Тартальи не наглядно, но более просто в сравнении с приведенным. Методическим недостатком приведенного и упомянутого решения Н. Тартальи является их частность, случайность. Хотя каждое из них неосознанно представляет собой решение через отображение заданного уравнения на плоскость третьего порядка. Осознанно, направленным отображением на плоскость третьего порядка мы еще будем решать уравнение третьей степени. Однако, делаться это будет в целях освоения общих методов нелинейного отображения. Новые решения, в какой бы форме мы их не получили, обязаны свестись к уже найденному решению (44) Н. Тартальи, ибо корни заданного уравнения неизменны.

Корни в форме (44) общего решения сложны. Сложны настолько, что для практики непригодны. Формулами (44) трудно пользоваться для численного вычисления корней, еще трудней производить анализ поведения корней в функции физических параметров, входящих в коэффициенты уравнения, а именно ради этого, прежде всего, ищутся общие решения.

2.3. Уравнение четвертой степени

Уравнение четвертой степени с действительными коэффициентами

$$Z^4 - 4a_1 Z^3 3 + 6a_2 Z^2 - 4a_3 Z + a_4 = 0 \qquad (45)$$

на плоскости аргумента, в общем случае, представляется четырехугольником корней (рис. 7*a*). На рисунке, четырехугольник представлен в центральной системе координат, где первый коэффициент равен нулю $(a_{01} = 0)$; корни уравнения, через параметры четырехугольника, выражаются формулами

$$\begin{aligned} Z_1 &= h - ie_1 \\ Z_2 &= 4 + ie_1 \\ Z_3 &= -h + ie_2 \\ Z_4 &= -h - ie_2 \end{aligned} \qquad (46)$$

а центральные коэффициенты, они же инварианты линейного отображения формулами

$$\begin{aligned} 6a_{02} &= -2h^2 + e_1^2 + e_2^2 \\ 4a_{03} &= 2h\left(-e_1^2 + e_2^2\right) \\ a_{04} &= h^4 + h^2\left(e_1^2 + e_2^2\right) + e_1^2 \cdot e_2^2 \end{aligned} \qquad (47)$$

Наиболее интересные, частные, решаемые случаи уравнения (45) на основании формул инвариантов (47) — первый случай, когда равны полуоснования трапеции

$$e_1^2 = e_2^2 = e^2 \tag{48}$$

и как следствие

$$\begin{aligned} 6a_{02} &= -2h^2 + 2e^2 \\ 4a_{03} &= 0 \\ a_{04} &= \left(h^2 + e^2\right)^2 \end{aligned} \tag{49}$$

трапеция (рис. 7*a*) превращается в прямоугольник (рис. 7*b*).

Второй случай, когда равны основания и высота

$$e_1^2 = e_2^2 = h^2 = r^2 \tag{50}$$

и как следствие

$$\begin{aligned} 6a_{02} &= 0 \\ 4a_{03} &= 0 \\ a_{04} &= \left(2r^2\right)^2 \end{aligned} \tag{51}$$

четырехугольник корней уравнения (45) представляет собой квадрат (рис. 7*c*). Напомним, что выражения инвариантов через коэффициенты заданного уравнения (45) определяются ранее выведенными соотношениями (25).

К предельным частным случаям относятся случаи, когда равны нулю основания трапеций корней

$$e_1^2 = e_2^2 = 0 \tag{52}$$

при этом

$$\begin{aligned} &6a_{02} = -2h^2 \\ &4a_{03} = 0 \\ &a_{04} = h^4 \end{aligned} \tag{53}$$

а корни действительны, противоположны и попарно кратны (53) (рис. 7*d*), или равна нулю высота трапеции корней

$$h = 0 \tag{54}$$

при этом

$$\begin{aligned} &6a_{02} = e_1^2 + e_2^2 \\ &4a_{03} = 0 \\ &a_{04} = e_1^2 \cdot e_2^2 \end{aligned} \tag{55}$$

а корни попарно противоположны и мнимы (рис. 7*e*).

Для уравнения четвертой степени довольно просто выглядит и строится резольвента. Оказывается, что корнями резольвенты уравнения (45) являются середины сторон и диагоналей четырехугольника его корней (рис. 7*g*)

$$\begin{aligned} &h_1 = 0{,}5(Z_1 + Z_2) \\ &h_2 = 0{,}5(Z_1 + Z_3) \\ &h_3 = 0{,}5(Z_1 + Z_4) \\ &h_4 = 0{,}5(Z_2 + Z_3) \\ &h_5 = 0{,}5(Z_2 + Z_4) \\ &h_6 = 0{,}5(Z_3 + Z_4) \end{aligned} \tag{56}$$

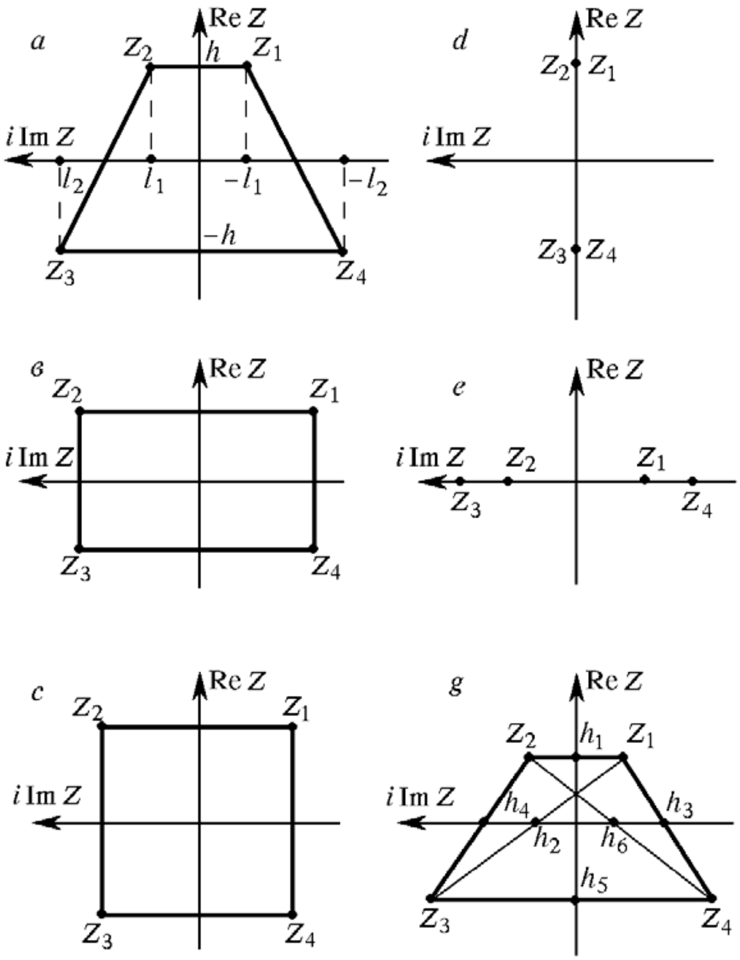


Рис. 7. *Многоугольник корней уравнения четвертой степени*

Само уравнение резольвенты можно получить, разрешая систему (47) выражений инвариантов относительно высоты (h) четырехугольника корней

$$4h^6 + 12a_{02}h^4 + \left(9a_{02}^2 - a_{04}\right)h^2 - b_{03}^2 = 0 \qquad (57)$$

В полном соответствии с рисунком (7g) полученное уравнение (57) содержит переменное только в четных степенях, так как все корни резольвенты попарно противоположны. На плоскости второго порядка уравнение резольвенты имеет третью степень.

Через найденные корни уравнения резольвенты система (56) их выражений позволяет вычислить и корни заданного (45) уравнения

$$\begin{aligned} Z_1 &= h_1 + h_2 - h_3 \\ Z_2 &= h_1 - h_2 + h_3 \\ Z_3 &= - h_1 + h_2 + h_3 \\ Z_4 &= h_1 + h_2 + h_3 \end{aligned} \qquad (58)$$

Найденное решение уравнения четвертой степени тоже частно, случайно. Впервые частные решения уравнения третьей и четвертой степеней были найдены математиками Италии в эпоху Возрождения. Однако систематизировать решения, продвинуться дальше так и не удалось. В 1824 г. норвежец Н.Х. Абель открыл тайну неуспеха. «Общего решения уравнения пятой степени и выше в известных функциях не существует».

В настоящей работе строится общее предельное решение уравнений, принципиально, любой степени.

Предельное решение приближенно. Конечная формула вычисления корня представляет собой функцию коэффициентов заданного уравнения, т.е. общее решение. Решение удобно для исследования и вычислений. Решение, конечная формула которого выбирается в зависимости от требуемой точности.

3. Отображение и разделение уравнений

3.1. Симметричные моменты

3.1.1. Определение моментов

Симметричный момент это не только таковой. Гораздо более важно, решающе более важно то, что симметричный момент это аппарат. Аппарат, позволяющий производить громоздкие буквенные преобразования.

Например. Возможно ли вручную произвести операцию?

$$n_1^5 = \left(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4\right)^5 = \tag{1}$$

т.е. выписать, а затем сгруппировать и выразить через моменты уравнения четвертой степени 1024 слагаемых. Нет. В то же время, используя аппарат симметричных моментов, эта операция, через несколько страниц, будет произведена в пять строк.

Приведенная операция (1) является одной из простейших, которые необходимо произвести при отображении функции (уравнения) четвертой степени на плоскость пятого порядка. А ведь для решения уравнения может понадобиться отображение и на плоскость 16-го, 32-го, 64-го... порядков.

Только аппарат симметричного момента позволил, в конечном счете, произвести нелинейное отображение функций и решить уравнение. В этом очевидно, следует усмотреть и основное назначение раскрываемого аппарата.

Итак, пусть нам заданы на плоскости комплексного переменного четыре точки — Z_1, Z_2, Z_3 и Z_4.

Каждую из них можно рассматривать как момент единичной массы относительно центра отсчета. Смешанным моментом можно рассматривать каждое из произведений (по два, по три, по четыре) точек. Однако особый интерес представляют совокупные, рассматриваемые нами как суммарные, моменты. Т.е. моменты вида

$$
\begin{aligned}
&n_1 = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4\\
&n_{11} = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4\\
&n_{111} = Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4\\
&n_{1111} = Z_1 Z_2 Z_3 Z_4
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

Эти моменты (n) симметричны относительно подстрочных индексов сомножителей своих слагаемых. Моменты (n) независимы, инвариантны циклической перестановке индексов сомножителей своих слагаемых. Эти моменты представляют собой суммы полных количеств сочетаний (по одному, по два, три и четыре) из общего количества точек (четыре). Эти моменты точек плоскости, построенные как суммы их всевозможных сочетаний, называются симметричными моментами.

Симметричные моменты, как это следует из сравнения с формулами Виета, совпадают с коэффициентами алгебраических функций. *Симметричные моменты это коэффициенты алгебраических функций (в канонической, знакопеременной форме последних).*

Коэффициенты алгебраических функций — это симметричные моменты. Таково свойство алгебраических функций.

Как аппарат, симметричные моменты должны предполагать наличие некоторого набора разрешенных действий, некоторой алгебры симметричных моментов. Такими действиями оказываются — сложение, вычитание, умножение и деление, т.е. алгебраические действия, а результатом применения этих действий является новый симметричный момент.

Известно, что результатом сложения (вычитания) алгебраических функций является алгебраическая функция

$$
\begin{aligned}
&N_4(Z) \pm R_4(Z) =\\
&= \left(Z^4 - n_1 Z^3 + n_{11} Z^2 - n_{111} Z + n_{1111}\right) \pm \left(Z^4 - r_1 Z^3 + r_{11} Z^2 - r_{111} Z + r_{1111}\right) =\\
&= Z^4 - (n_1 \pm r_1) Z^3 + (n_{11} \pm r_{11}) Z^2 - (n_{111} \pm r_{111}) Z + (n_{1111} \pm r_{1111})
\end{aligned}
$$

(3)

следовательно, *суммы (разности) симметричных моментов являются симметричными моментами. Точно так же можно пока-*

зать, что симметричными моментами являются их произведения и частные.

Для удобства оперирования моментами, помимо их полной (2), вводится сокращенная форма записи

$$
\begin{aligned}
n_1 &= Z\left(_1 + \ldots\right)_4^1 \\
n_{11} &= \left(Z_1 Z_2 + \ldots\right)_6^1 \\
n_{111} &= \left(Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots\right)_4^1 \\
n_{1111} &= \left(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + \ldots\right)_1^1
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

распространяющаяся и на более сложные моменты, которые могут получиться в результате применения алгебраических действий, например

$$
\begin{aligned}
n_{311} &= Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + Z_1^1 Z_2^3 Z_3^1 + Z_1^1 Z_2^1 Z_3^3 + \\
&+ Z_1^3 Z_2^1 Z_4^1 + Z_1^1 Z_2^3 Z_4^1 + Z_1^1 Z_2^1 Z_4^3 + \\
&+ Z_1^3 Z_3^1 Z_4^1 + Z_1^1 Z_3^3 Z_4^1 + Z_1^1 Z_3^1 Z_4^3 + \\
&+ Z_2^3 Z_3^1 Z_4^1 + Z_2^1 Z_3^3 Z_4^1 + Z_2^1 Z_3^1 Z_4^3 = \\
&= \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

С целью обеспечения технологичности последующих операций в записи моментов устанавливается определенный порядок.

Так, индексы (311) в обозначении $\left(n_{311}\right)$ момента повторяют цифры показателей степеней сомножителей головного частного момента полной его записи (5). Сумма индексов определяет порядок величины момента. Количество индексов определяет количество сомножителей частного момента. Буква, обозначающая момент, указывает на общее количество точек корней рассматриваемой функции (уравнения).

Надстрочные индексы (311) частного головного момента $\left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1\right)$ указывают на степени сомножителей момента и пишутся в строго убывающем порядке. Подстрочные индексы (123) головного частного момента представляют собой номера по порядку сомножителей головного частного момента и пишутся строго в порядке следования чисел натурального ряда, начиная с единицы. Порядок записи частных моментов в полной записи (5) симметричного момента рассматривается как сумма сочетаний (подстрочных индексов) перестановок (надстрочных индексов).

Сокращенная запись симметричного момента представляет собой замкнутый в скобки головной частный момент полной записи, за которым стоит знак продолжения суммирования. Подстрочный заскобочный индекс сокращенной записи симметричного момента означает количество сочетаний по числу корней (точек) входящих в частный момент из общего числа корней (точек) функции (уравнения). Надстрочный заскобочный индекс сокращенной записи означает количество перестановок с повторениями из цифр верхних индексов частного момента.

В соответствии с приведенными правилами и определениями все частные моменты симметричного момента должны иметь один порядок величины, определяемый суммой степеней сомножителей. Общее количество частных моментов в симметричном моменте определяется произведением надстрочного и подстрочного заскобочных индексов сокращенной записи.

Симметричный момент можно представлять в форме раскрытой по одному из заскобочных индексов (по верхнему или нижнему)

$$\begin{aligned} n_{311} &= \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + \dots\right)_4^3 = \\ &= \left[\left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + Z_1^1 Z_2^3 Z_3^1 + Z_1^1 Z_2^1 Z_3^3\right) + \dots\right]_4^1 = \\ &= \left[\left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + Z_1^3 Z_2^1 Z_4^1 + Z_1^3 Z_3^1 Z_4^2 + Z_2^3 Z_3^1 Z_4^1\right) + \dots\right]_1^3 \end{aligned} \qquad (6)$$

В форме раскрытой по верхнему индексу слагаемые содержат общий множитель, что позволяет производить преобразование моментов.

Симметричные моменты, в обозначении которых используются только единицы $\left(n_1, n_{11}, n_{111}, m_{11}, p_{1111}\right)$ *и т.п., называются единичными и считаются заданными, известными.*

Симметричные моменты, в обозначении которых используется другая, но только одна цифра $\left(n_2, n_{22}, m_{22}, p_{2222}\right)$ *и т.п. называются кратными или стандартными.*

Симметричные моменты, в обозначении которых используются разные цифры, называются смешанными.

В порядке отклонения от канонической формы записи, будем допускать в начале обозначения моментов применение цифры «0» (ноль) $\left(n_{01}, n_{011}, m_{0222}, m_{021}, p_{032}\right)$ и т.п. для обозначения моментов функций (уравнений), размещенных в своих центральных системах координат.

3.1.2. Свойства симметричных моментов

Особенностью сложения и вычитания симметричных моментов является то, что эти операции выполняются для моментов однопорядковых величин. Моменты разных порядков взаимному сложению (вычитанию) не подлежат. Однако если моменты разных порядков предварительно домножить (разделить) выравнивающими постоянными (третьими моментами), то получившиеся симметричные моменты одного порядка можно складывать (вычитать).

Операции умножения (деления) симметричных моментов на постоянное допустимы вследствие того, что моменты представляют собой однородные функции своих переменных. Все переменные преобразовываются одинаково и одновременно, а сами многомерные функции симметричных моментов преобразовываются конформно.

Отметим важное для дальнейшего «общее следствие» определения сумм, разности, произведений и частных. А именно: *если задана симметричность* μ *из* $(\mu+1)$ *частных моментов суммы, разности, произведения или частного, то симметричен и* $(\mu+1)$ *частный момент*.

Произведение симметричных моментов рассмотрим на примере моментов первого $\left(n_1\right)$ и второго $\left(n_{11}\right)$ порядков четырёхточечника

$$n_1 n_{11} = \left(z_1 + z_2 + z_3 + z_4\right)\left(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4\right) =$$

(7)

Как это видно, произведение может содержат слагаемые только третьего порядка величины реализуемые однокорневыми, двух- или трехкорневыми симметричными моментами, т.е. ничего не может быть другого, кроме

$$=\alpha_1\left(z_1^3+\ldots\right)_4^1+\alpha_2\left(z_1^2z_2^1+\ldots\right)_6^2+\alpha_3\left(z_1z_2z_3+\ldots\right)_4^1= \quad (8)$$

Остается только лишь выяснить значение числовых множителей около симметричных моментов произведения (8), что делается по результатам анализа произведения (8) моментов в раскрытой, полной форме их записи. Так, видно, что множитель α_1 около момента (n_3) равен нулю, так как головной частный момент его $\left(z_1^3\right)$ произведением (7) не формируется. Множитель α_2 равен единице, так как головной частный момент $\left(z_1^2z_2\right)$ произведением (7) формируется один раз. Множитель α_3 равен трем, головное слагаемое $\left(z_1z_2z_3\right)$ момента $\left(n_{111}\right)$ произведением (7) формируется три раза

$$=\left(z_1^2z_2^1+\ldots\right)_6^2+3\left(z_1^2z_2^1z_3^1+\ldots\right)_4^1=n_{21}+3n_{111} \quad (9)$$

В правильности полученного результата убеждаемся после проверки постоянства количества частных моментов в заданном произведении (7) и итоговом его выражении (9)

$$6\cdot4=6\cdot2+3\cdot4\cdot1=24$$

Вычисление коэффициентов разложения (α) произведения может быть осуществлено и систематизированным, общим методом.

Действительно, корни уравнения могут быть выбраны произвольно, и при любом их наборе произведение моментов (7) и его выражения (8,9) должны выполняться. Но тогда, набрав необходимое количество групп корней и подставив их поочерёдно в выражения произведения (7,8,), можно построить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов и решить её.

В качестве примера, рассмотрим произведение моментов более простого, трёхкорневого уравнения.

$$m_1 m_{11} = (Z_1 + Z_2 + Z_3)(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3) = \qquad (7.1)$$

его, аналогично предыдущему построенное, разложение

$$=\alpha_1\left(Z_1^3 + \ldots\right)_3 + \alpha_2\left(Z_1^2 Z_1^1 + \ldots\right)_3^2 + \alpha_3\left(Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots\right)_1 = \qquad (8.1)$$

и, аналогично предыдущему, методом подбора, вычисленные коэффициенты произведения

$$=0\left(Z_1^3 + \ldots\right)_3 + 1\left(Z_1^2 Z_1^1 + \ldots\right)_3^2 + 3\left(Z_1 Z_2 Z_2 + \ldots\right)_1 \qquad (9.1)$$

т.е., фиксируем, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 3.$

Найдём теперь коэффициенты произведения общим методом. Назначаем три тройки корней (попроще)

$$Z_{1,2,3} = 1,1,1,\ Z_{1,2,3} = 1,1,0,\ Z_{1,2,3} = 1,0,0,$$

Подставляем тройки поочерёдно в выражения произведения (7.1; 8.1) и выписываем получившуюся систему

$$\begin{aligned} 9 &= 3\alpha_1 + 6\alpha_2 + \alpha_3 \\ 2 &= 2\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 0 &= \alpha_1 \end{aligned}$$

решение которой, $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 3$, подтверждает сказанное выше.

Из формул (7), (9) рассматривавшегося примера можно получить выражение смешанного момента через единичные

$$n_{21} = n_1 n_{11} - 3n_{111} \qquad (10)$$

Выражение этого, и вообще любого смешанного или кратного момента через единичные, единственно, ибо, в противном случае, имеет место связь между произвольными коэффициентами уравнения, что невозможно.

По существу, так же, как произведение, раскрывается степень симметричного момента. Например, степень

$$n_1^5 = \left(z_1 + z_2 + z_3 + z_4\right)^5 = \tag{11}$$

может представлять собой только сумму одно-, двух-, трех- и четырехкорневых симметричных моментов пятого порядка

$$n_{5000},\ n_{4100},\ n_{3200},\ n_{3110},\ n_{2210},\ n_{2111}$$

Т.е., заданная степень должна иметь вид

$$= \alpha_1 n_{5000} + \alpha_2 n_{4100} + \alpha_3 n_{3200} + \alpha_4 n_{3110} + \alpha_5 n_{2210} + \alpha_6 n_{2111} = \tag{12}$$

где числовые множители около моментов являются полиномиальными коэффициентами и вычисляются формулами [1]

$$\alpha_1 = \frac{5!}{5!},\ \alpha_2 = \frac{5!}{4!\cdot 1!},\ \alpha_3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!},\ \alpha_4 = \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!},\ \alpha_5 = \frac{5!}{2!\cdot 2''\cdot 1!},\ \alpha_1 = \frac{5!}{2!} \tag{13}$$

Окончательное выражение степени (11)

$$\begin{aligned} &= \left(z_1^5 + \ldots\right)_4 + 5\left(z_1^4 z_2^1 + \ldots\right)_6^2 + 10\left(z_1^3 z_2^2 + \ldots\right)_6^2 + 20\left(z_1^3 z_2^1 z_3^1 + \ldots\right)_4^3 + \\ &+ 30\left(z_1^2 z_2^2 z_3^1 + \ldots\right)_4^3 + 60\left(z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^1 + \ldots\right)_1^4 \end{aligned} \tag{14}$$

которое, однако, подлежит обязательной проверке на постоянство количества частных моментов в полной (11) и результирующей (14) формах:

$$4^5 = 4 + 5\cdot 6\cdot 2 + 10\cdot 6\cdot 2 + 20\cdot 4 + 30\cdot 4\cdot 3 + 6\cdot 1\cdot 4 = 1024$$

Под делением симметричного момента понимается возможность представления его в форме суммы произведения некоторых частного с делителем и остатка.

Делению подлежат только сложные симметричные моменты, такие как смешанные и кратные. У единичных моментов делителей нет. Это элементарные моменты. В качестве делителей рассматриваются единичные, стандартные моменты, хотя могут быть и смешанные моменты.

Рассмотрим деление момента n_{21}, полученного ранее в результате умножения (7):

$$n_{21} = \left(z_1^2 z_2^1 + \ldots\right)_6^2 = \qquad (15)$$

Во-первых, делимый момент раскрывается по верхнему заскобочному индексу

$$= \left[\left(z_1^2 z_2^1 + z_1^1 z_2^2 + \ldots\right)\right]_6^1 = \qquad (16)$$

В этой форме у раскрытых слагаемых есть общий множитель, который и выносится за внутреннюю скобку

$$= \left[z_1 z_2 \left(z_1 + z_2\right) + \ldots\right]_6^1 = \qquad (17)$$

В полученной форме по нижнему заскобочному индексу строятся и суммируются сочетания вынесенного общего множителя $\left(z_1 z_2\right)$. В скобках же осталось «постоянное» — сумма $\left(z_1 + z_2\right)$, подстрочные индексы которой соответствуют вынесенному общему множителю $\left(z_1 z_2\right)$.

Дополнением необходимого количества нужных слагаемых во внутренней скобке формируется симметричный момент. Там же, дополненные частные моменты и вычитаются

$$= \left[z_1 z_2 \left(z_1 + z_2 + z_2 + z_4 - z_3 - z_4\right) + \ldots\right]_6^1 = \qquad (18)$$

Раскрывая внутренние и наружные скобки, формируем симметричный момент в форме разности

$$= \left[z_1 z_2 \left(z_1 + z_2 + z_2 + z_4\right) + \ldots\right]_6^1 - \left[Z_1 Z_2 \left(Z_3 + Z_4\right) + \ldots\right]_6^1 = \qquad (19)$$

Уменьшаемое полученной разности, без дополнительных комментариев, может быть представлено в виде

$$\left(z_1z_2\cdot n_1+\ldots\right)_6^1=n_1\cdot\left(z_1z_2+\ldots\right)_6^1=n_1n_{11} \tag{20}$$

Вычитаемое, в силу «общего следствия», является симметричным моментом. С другой стороны, как это видно, оно представляет собой сумму двенадцати трехкорневых частных моментов третьего порядка или, соответственно, трех моментов n_{111}, содержащих по четыре частных момента

$$\left[z_1z_2\left(z_3+z_4\right)+\ldots\right]_6^1=\frac{2\cdot 6}{4}\left(z_1z_2z_3+\ldots\right)_4^1=3n_{111} \tag{21}$$

Итак, окончательно, делимый момент (15) представляется в форме разности произведения (20) делителя (n_{11}), сформированного из вынесенного общего множителя $\left(z_1z_2\right)$, на частное n_1 и остатка $\left(3n_{111}\right)$ (21)

$$=n_1n_{11}-3n_{111} \tag{22}$$

Однако, законченным вычисление можно считать только после проверки начальной (15) и конечной (22) формул на постоянство количества частных моментов

$$2\cdot 6=4\cdot 6-3\cdot 4=12$$

Полученный результат деления не обусловлен наложением каких бы то ни было условий на моменты, поэтому является общим. Т.е. *любой сложный симметричный момент может быть представлен разностью произведения симметричных моментов (уменьшаемого) и симметричного момента (вычитаемого).*

В рассмотренном примере (15) результат (22) оказался выраженным через единичные моменты. В общем же случае в результате могут оказаться и сложные симметричные моменты. Применяя к ним повторно и необходимое число раз обозначенное выше «общее следствие», *любой сложный симметричный момент, в конце концов, может быть представлен алгебраической функцией единичных моментов. Факт такого представления называется* *сходимостью*. Таким образом, *любой симметричный момент сходится и единственным образом*, как это было показано ранее. Процесс преобразования сложного момента в алгебраическую функцию единичных называется вычислением момента.

Рассмотрим вычисление еще одного сложного симметричного момента

$$n_{32} = \left(z_1^3 z_2^2 + \ldots\right)_6^2 = \qquad (23)$$

Опять, сначала раскрываем момент по верхнему заскобочному индексу

$$= \left[\left(z_1^3 z_2^2 + z_1^2 z_2^3\right) + \ldots\right]_6^1 = \qquad (24)$$

Из возможных конфигураций общего множителя головного момента

$$z_1 z_2,\ z_1^2 z_2^2,\ z_1^2 z_2^1,\ z_1^2,\ z_1$$

выбирать следует ту, которая собирается в симметричный момент при оставшихся (24) заскобочных индексах. В рассматриваемом случае — множители $z_1 z_2$ или $z_1^2 z_2^2$. И вообще, можно показать, что выносимым общим множителем должен быть частный момент симметричного стандартного.

Выносим множитель $z_1^2 z_2^2$, после чего внутренняя скобка момента остается более «легкой»

$$= \left[z_1^2 z_2^2 \left(n_1 - z_3 - z_4\right)_2 + \ldots\right]_6^1 = \qquad (25)$$

Здесь около внутренней скобки проставлен новый подстрочный индекс, соответствующий количеству вычитаемых слагаемых внутри скобок

$$= n_1 n_{22} - \left(z_1^2 z_2^2 z_3^1 + \ldots\right)_3^4 = n_1 n_{22} - n_{221} \cdot \frac{2\cdot 6}{3\cdot 4} \qquad (26)$$

Здесь сформированный смешанный симметричный (n_{221}), как это видно после подстановки его заскобочных индексов, содержит количество частных моментов, равное числу вычитаемых в предыдущей форме (25) момента. Т.е. все вычитаемые (25) вошли в состав вновь сформированного (n_{221}) одного момента.

3.1.3. Вычисление симметричных моментов

Основным правилом вычисления симметричных моментов является последовательность. Т.е., вычисление строго по порядку возрастания, так как каждый последующий момент вычисляется через (с использованием) предыдущего.

Моменты — это коэффициенты полиномиальных функций или образуемых ими уравнений, поэтому особое внимание обращаем на запись уравнений. Уравнения, моменты которых ниже вычисляются, предполагаются изначально записанными в канонической, знакопеременной, симметричной форме.

Так, уравнение второй степени имеет вид

$$D_2 = d_{00}z^1z^1 - d_{10}z^1z^0 + d_{11}z^0z^0 = \tag{27}$$

и может быть представлено в краткой форме записи

$$= \left(d_{00}z^{11} + \ldots\right)_3 \tag{28}$$

слагаемых в полной записи уравнения и вычисляется как число сочетаний с повторениями [1] из общего числа различных индексов (0 и 1 — два), встречающихся в записи, по числу подстрочных или надстрочных мест (0 и 0 — два или 1 и 1 — два) в обозначении момента или степени переменной.

Вычисляем симметричные моменты двух точек плоскости (или корней уравнения второй степени)

$$d_0 = \left(z_1^0 + \ldots\right)_2^1 = z_1^0 + z_2^0 = 1 + 1 = 2$$

$$d_{00} = \left(z_1^0\, z_2^0 + \ldots\right)_1^1 = z_1^0\ z_2^0 = 1$$

$$d_1 = \left(z_1^1 + \ldots \right)_2^1 = z_1^1 + z_2^1 = d_1$$

$$d_{10} = \left(z_1^1 z_2^0 + \ldots \right)_1^2 = z_1^1 z_2^0 + z_1^0 z_2^1 = d_1$$

$$d_{11} = \left(z_1^1 z_2^1 + \ldots \right)_1^1 = z_1^1 z_2^1 = d_{11}$$

$$d_2 = \left(z_1^2 + \ldots \right)_2^1 = \left[z_1 \left(z_1^1 + z_2^1 - z_2^1 \right)_1 + \ldots \right]_2^1 =$$
$$= \left(z_1^1 d_1 + \ldots \right)_2^1 - \left[z_1^1 \left(z_2^1 \right)_1 + \ldots \right]_2^1 = d_1^2 - 2d_{11}$$

$$d_{20} = \left(z_1^0 z_0^2 + \ldots \right)_1^2 = z_1^2 + z_2^2 = d_2$$

$$d_{21} = \left(z_1^2 z_2^1 + \ldots \right)_1^2 = \left[z_1^1 z_2^1 \left(z_1^1 + z_2^1 + \ldots \right)_1 + \ldots \right]_1 = d_1 d_{11}$$

$$d_{22} = \left(z_1^2 z_2^2 + \ldots \right)_1^1 = \left[z_1^1 z_2^1 \right]^2 = d_{11}^2$$

$$d_3 = \left(z_1^3 + \ldots \right)_2^1 = \left[z_1^2 \left(d_1 - z_2^1 \right)_1 + \ldots \right]_2^1 = d_1 d_2 - \left[z_1^2 \left(z_2^1 \right)_1 + \ldots \right]_2^1 =$$
$$= d_1 d_2 - \left(z_1^2 z_2^1 + \ldots \right)_1^2 = d_1^3 - 3d_1 d_{11}$$

В предпоследнем равенстве после анализа изменен порядок суммирования в вычитаемом симметричном моменте. После чего, на основании предыдущих результатов, получено окончательное выражение.

$$d_{30} = \left(z_1^3 z_2^0 + \ldots \right)_1^2 = z_1^3 z_2^0 + z_1^0 z_2^3 = d_3$$

$$d_{31} = \left(z_1^3 z_2^1 + \ldots \right)_1^2 = \left[z_1 z_2 \left(z_1^2 + z_2^2 \right) + \ldots \right]_1^1 = d_2 d_{11} = d_1^2 d_{11} - 2d_{11}^2$$

$$d_{32} = \left(z_1^3 z_2^2 + \ldots \right)_1^2 = \left[z_1^2 z_2^2 \left(z_1^1 + z_2^1 \right) + \ldots \right]_1^1 = d_1 d_{22} = d_1 d_{11}^2$$

$$d_{33} = \left(z_1^3 z_2^3 + \ldots \right)_1^1 = \left(z_1 z_2 \right)^3 = d_{11}^3$$

$$d_4 = \left(z_1^4 + \ldots \right)_2^1 = \left[z_1^3 \left(d_1 - z_2 \right)_1 + \ldots \right]_2^1 = d_1 d_3 - \left(z_1^3 z_2^1 + \ldots \right)_1^2 =$$
$$= d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2$$

$$d_{40} = \left(z_1^4 z_2^0 + \ldots \right)_1^2 = z_1^4 + z_2^4 = d_4$$

$$d_{41} = \left(z_1^4 z_2^1 + \ldots \right)_1^2 = \left[z_1 z_2 \left(z_1^3 + z_2^3 \right)_1 + \ldots \right]_1^1 = d_3 d_{11} = d_1^3 d_{11} - 3d_1 d_{11}^2$$

$$d_{42} = \left(z_1^4 z_2^2 + \ldots \right)_1^2 = \left[z_1^2 z_2^2 \left(z_1^2 + z_2^2 \right) + \ldots \right]_1^1 = d_2 d_{22} = d_1^2 d_{11}^2 - 2d_{11}^3$$

$$d_{43} = \left(z_1^4 z_2^3 + \ldots \right)_1^2 = \left[z_1^3 z_2^3 \left(z_1 + z_2 \right) + \ldots \right]_1 = d_1 d_{33} = d_1 d_{11}^3$$

$$d_{44} = \left(z_1^4 z_2^4 + \ldots \right)_1^2 = d_{11}^4$$

$$d_5 = \left(z_1^5 + \ldots \right)_2^1 = \left[z_1^4 \left(d_1 + z_2 \right)_1 + \ldots \right]_2 = d_1 d_4 - d_{41} =$$
$$= d_1 \left(d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2 \right) - \left(d_1^3 d_{11} - 3d_1 d_{11}^2 \right) =$$
$$= d_1^5 - 5d_1^3 d_{11} + 5d_1 d_{11}^2$$

$$d_{50} = \left(z_1^5 z_2^0 + \ldots \right)_1^2 = \left(z_1^5 + \ldots \right)_2^1 = d_5$$

$$d_{51} = \left(z_1^5 z_2^1 + \ldots \right)_1^2 = \left[z_1^1 z_2^1 \left(z_1^4 + z_2^4 \right)_1 + \ldots \right]_1 =$$
$$= \left(d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2 \right) d_{11} = d_1^4 d_{11} - 4d_1^2 d_{11}^2 + 2d_{11}^3$$

$$d_{52} = \left(z_1^5 z_2^2 + \ldots \right)_1^2 = \left[z_1^2 z_2^2 \left(z_1^3 + z_2^3 \right) + \ldots \right]_1 = d_3 d_{22} =$$
$$= \left(d_1^3 - 3d_1 d_{11} \right) d_{11}^2 = d_1^3 d_{11}^2 - 3d_1 d_{11}^3$$

$$d_{53} = \left(z_1^5 z_2^3 + ... \right)_1^2 = \left[z_1^3 z_2^3 \left(z_1^2 + z_2^2 \right) + ... \right]_1 = d_2 d_{33} =$$

$$= \left(d_1^2 - 2d_{11} \right) d_{11}^3 = d_1^2 d_{11}^3 - 2d_{11}^4$$

$$d_{54} = \left(z_1^5 z_2^4 + ... \right)_1^2 = z_1^4 z_2^4 \left(z_1 + z_2 \right) = d_1 d_{44} = d_1 d_{11}^4$$

$$d_{55} = \left(z_1^5 z_2^5 + ... \right)_1^1 = d_{11}^5$$

Моменты трех точек (или корней уравнения третьей степени)

$$m_0 = \left(z_1^0 + ... \right)_3^1 = 3$$

$$m_{00} = \left(z_1^0 z_2^0 + ... \right)_3^1 = 3$$

$$m_{000} = \left(z_1^0 z_2^0 z_3^0 + ... \right)_1^1 = 1$$

$$m_1 = \left(z_1^1 + ... \right)_3^1 = m_1$$

$$m_{10} = \left(z_1^1 z_2^0 + ... \right)_3^2 = m_1 \frac{6}{3} = 2m_1$$

$$m_{100} = \left(z_1^1 z_2^0 z_3^0 + ... \right)_1^3 = \left(z_1 + ... \right)_3^1 = m_1$$

$$m_{11} = \left(z_1 z_2 ... \right)_3^1 = m_{11}$$

$$m_{110} = \left(z_1^1 z_2^1 z_3^0 + ... \right)_1^3 = \left(z_1 z_2 + ... \right)_3^1 = m_{11}$$

$$m_{111} = \left(z_1^1 z_2^1 z_3^1 + ... \right)_1^1 = m_{111}$$

$$m_2 = \left(z_1^2 + \ldots\right)_3^1 = \left[z_1\left(m_1 - z_2 - z_3\right)_2 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_1^2 - \left(z_1^1 z_2^1 + \ldots\right)_3^1 \frac{6}{3} = m_1^2 - 2m_{11}$$

$$m_{20} = \left(z_1^2 z_2^0 + \ldots\right)_3^2 = \left(z_1^2 + \ldots\right)\frac{2\cdot 3}{3} = 2m_2$$

$$m_{200} = \left(z_1^2 z_2^0 z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(z_1^2 + \ldots\right)_1^3 \frac{1\cdot 3}{3} = m_2$$

$$m_{21} = \left(z_1^2 z_2^1 + \ldots\right)_3^2 = \left[z_1 z_2\left(z_1 + z_2 + z_3 - z_3\right)_1 + \ldots\right]_3^1 = m_1 m_{11} - 3m_{111}$$

$$m_{210} = \left(z_1^2 z_2^1 z_3^0 + \ldots\right)_1^6 = \left(z_1^2 z_2^1 + \ldots\right)_3^2 = m_{21} = m_1 m_{11} - 3m_{111}$$

$$m_{211} = \left(z_1^2 z_2^1 z_3^1 + \ldots\right)_1^3 = \left[z_1 z_2 z_3\left(z_1 + z_2 + z_3\right)_1^1 + \ldots\right]_3^1 = m_1 m_{111}$$

$$m_{22} = \left(z_1^2 z_2^2 + \ldots\right)_3^1 = \left[z_1 z_2\left(m_{11} - z_1 z_3 - z_2 z_3\right)_2 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_{11}^2 - \left(z_1^2 z_2^1 z_3^1 + \ldots\right)_1^3 \frac{2\cdot 3}{3} = m_{11}^2 - 2m_{211} = m_{11}^2 - 2m_1 m_{111}$$

$$m_{220} = \left(z_1^2 z_2^2 z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(z_1^2 z_2^2\right)_3^1 = m_{22}$$

$$m_{221} = \left(z_1^2 z_2^2 z_3^1 + \ldots\right)_1^3 = \left[z_1 z_2 z_3\left(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3 + \ldots\right)\right]_1^1 = m_{11} m_{111}$$

$$m_{222} = \left(z_1^2 z_2^2 z_3^2 + \ldots\right)_1^1 == m_{111}^2$$

Моменты четырех точек (или корней уравнения четвертой степени)

$$n_0 = \left(z_1^0 + \ldots\right)_4^1 = 4$$

$$n_{00} = \left(z_1^0 \, z_2^0 \; + \ldots \right)_6^1 = 6$$

$$n_{000} = \left(z_1^0 \, z_2^0 \, z_3^0 \; + \ldots \right)_4^1 = 4$$

$$n_{0000} = \left(z_1^0 \, z_2^0 \, z_3^0 z_4^0 \; + \ldots \right)_1^1 = 1$$

$$n_1 = \left(z_1 \; + \ldots \right)_1^4 = n_1$$

$$n_{10} = \left(z_1^1 \, z_2^0 \; + \ldots \right)_6^2 = \left(z_1^1 \; + \ldots \right)_4^1 \frac{2 \cdot 6}{4} = 3n_1$$

$$n_{100} = \left(z_1^1 \, z_2^0 z_3^0 \; + \ldots \right)_4^3 = \left(z_1^1 \; + \ldots \right)_4^1 \frac{3 \cdot 4}{4} = 3n_1$$

$$n_{1000} = \left(z_1^1 \, z_2^0 z_3^0 z_4^0 \; + \ldots \right)_1^4 = \left(z_1^1 + \ldots \right)_4^1 = n_1$$

$$n_{11} = \left(z_1^1 z_2^1 \ldots \right)_6^1 = n_{11}$$

$$n_{110} = \left(z_1^1 \, z_2^1 z_3^0 \; + \ldots \right)_4^3 = \left(z_1^1 z_2^1 \; + \ldots \right)_6^1 \frac{3 \cdot 4}{6} = 2n_{11}$$

$$n_{1100} = \left(z_1^1 \, z_2^1 z_3^0 z_4^0 \; + \ldots \right)_1^6 = \left(z_1^1 z_2^1 \; + \ldots \right)_6^1 = n_{11}$$

$$n_{111} = \left(z_1^1 \, z_2^1 z_3^1 \; + \ldots \right)_4^1 = n_{111}$$

$$n_{1110} = \left(z_1^1 \, z_2^1 z_3^1 z_4^0 \; + \ldots \right)_1^4 = \left(z_1^1 z_2^1 z_3^1 \; + \ldots \right)_4^1 = n_{111}$$

$$n_{1111} = \left(z_1^1 \, z_2^1 z_3^1 z_4^1 \; + \ldots \right)_1^1 = n_{1111}$$

$$n_2 = \left(z_1^2 + \dots\right)_4^1 = \left[z_1\left(n_1 - z_2 - z_3 - z_4\right)_3 + \dots\right]_4^1 =$$

$$= n_1^2 - \left(z_1 z_2 + \dots\right)_6^1 \frac{3\cdot 4}{6} = n_1^2 - 2n_{11}$$

$$n_{20} = \left(z_1^2\, z_2^0 + \dots\right)_6^2 = \left[z_1^2 + \dots\right]_4^1 \frac{2\cdot 6}{4} = 3n_2$$

$$n_{200} = \left(z_1^2\, z_2^0 z_3^0 + \dots\right)_4^3 = \left(z_1^2 + \dots\right)_4^1 \frac{3\cdot 4}{4} = 3n_2$$

$$n_{2000} = \left(z_1^2\, z_2^0 z_3^0 z_4^0 + \dots\right)_1^4 = \left(z_1^2 + \dots\right)_4^1 = n_2$$

$$n_{21} = \left(z_1^2\, z_2^1 + \dots\right)_6^2 = \left[z_1 z_2\left(n_1 - z_3 - z_3\right)_2 + \dots\right]_6^1 =$$

$$= n_1 n_{11} - \left(z_1 z_2 z_3 + \dots\right)_4^1 \frac{2\cdot 6}{4} = n_1 n_{11} - 3n_{111}$$

$$n_{210} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^0 + \dots\right)_4^6 = \left(z_1^2\, z_2^1 + \dots\right)_6^2 \frac{4\cdot 6}{2\cdot 6} = 2n_{21}$$

$$n_{2100} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^0 z_4^0 + \dots\right)_1^{12} = \left(z_1^2\, z_2^1 + \dots\right)_6^2 \frac{12}{12} = n_{21}$$

$$n_{211} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 + \dots\right)_4^3 = \left[z_1 z_2 z_3\left(n_1 - z_4\right)_1 + \dots\right]_4 = n_1 n_{111} - 4n_{1111}$$

$$n_{2110} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 z_4^0 + \dots\right)_1^{12} = \left[z_1^2 z_2^1 z_3^1 + \dots\right]_4^3 \frac{12}{12} = n_{211}$$

$$n_{2111} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 z_4^1 + \dots\right)_1^4 = n_{1111}\left[z_1 + \dots\right]_4^1 = n_1 n_{1111}$$

$$n_{22} = \left(z_1^2 \, z_2^2 + \ldots \right)_6^1 = \left[z_1 z_2 \left(n_{11} - z_1 z_3 - z_3 z_4 \right)_3 + \ldots \right]_6^1 =$$

$$= n_{11}^2 - \left(z_1^2 \, z_2^1 \, z_3^1 + \ldots \right)_4^3 \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 4} - \left(z_1 z_2 z_3 z_4 + \ldots \right)_1^1 \frac{(5-4) \cdot 6}{1} =$$

$$= n_{11}^2 - 2n_{211} + 6n_{1111} = n_{11}^2 - 2n_1 n_{111} + 2n_{1111}$$

$$n_{220} = \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^0 + \ldots \right)_4^3 = \left[z_1^2 \, z_2^2 + \ldots \right]_6^1 \frac{3 \cdot 4}{6} = 2n_{22}$$

$$n_{2200} = \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^0 z_4^0 + \ldots \right)_1^6 = \left[z_1^2 \, z_2^2 + \ldots \right]_6^1 = n_{22}$$

$$n_{221} = \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^1 + \ldots \right)_4^3 = \left[z_1 z_2 z_3 \left(n_{11} - z_3 z_4 - \ldots \right)_3 + \ldots \right]_4^1 =$$

$$= n_{11} n_{111} - 3\left(z_1^2 \, z_2^1 z_3^1 z_4^1 + \ldots \right)_1^4 = n_{11} n_{111} - 3n_1 n_{1111}$$

$$n_{2210} = \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^1 z_4^0 + \ldots \right)_1^{12} = \left[z_1^2 \, z_2^2 z_3^1 + \ldots \right]_4^3 = n_{221}$$

$$n_{2211} = \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^1 z_4^1 + \ldots \right)_1^6 = n_{1111} \left[z_1 z_2 + \ldots \right]_6^1 = n_{11} n_{1111}$$

$$n_{222} = \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^2 + \ldots \right)_4^1 =$$

$$= \left[z_1 z_2 z_3 \left(n_{111} - z_1 z_2 z_4 - z_1 z_3 z_4 - z_2 z_3 z_4 \right)_3 + \ldots \right]_4^1 =$$

$$= n_{111}^2 - \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^1 z_4^1 + \ldots \right)_1^6 \frac{3 \cdot 4}{6} = n_{111}^2 - 2n_{2211} = n_{111}^2 - 2n_{11} n_{1111}$$

$$n_{2220} = \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^2 z_4^0 + \ldots \right)_1^4 = \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^2 + \ldots \right)_4^1 = n_{222}$$

$$n_{2221} = \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^2 z_4^1 + \ldots \right)_1^4 = n_{1111} n_{111}$$

$$n_{2222} = \left(z_1^2 \, z_2^2 z_3^2 z_4^2 + \ldots \right)_1^1 = n_{1111}^2$$

Моменты пяти точек (или корней уравнения пятой степени)

$$p_0 = \left(z_1^0 \; + \ldots \right)_5^1 = 5$$

$$p_{00} = \left(z_1^0 \, z_2^0 \; + \ldots \right)_{10}^1 = 10$$

$$p_{000} = \left(z_1^0 \, z_2^0 \, z_3^0 + \ldots \right)_5^1 = 10$$

$$p_{0000} = \left(z_1^0 \, z_2^0 \, z_3^0 z_4^0 \; + \ldots \right)_5^1 = 5$$

$$p_{00000} = \left(z_1^0 \, z_2^0 \, z_3^0 z_4^0 z_5^0 \; + \ldots \right)_1^1 = 1$$

$$p_1 = \left(z_1 \; + \ldots \right)_5^1 = p_1$$

$$p_{10} = \left(z_1^1 \, z_2^0 \; + \ldots \right)_{10}^2 = \left(z_1^1 \; + \ldots \right)_5^1 \frac{2 \cdot 10}{5} = 4 p_1$$

$$p_{100} = \left(z_1^1 \, z_2^0 z_3^0 \; + \ldots \right)_{10}^3 = \left(z_1^1 \; + \ldots \right)_5^1 \frac{3 \cdot 10}{5} = 6 p_1$$

$$p_{1000} = \left(z_1^1 \, z_2^0 z_3^0 z_4^0 \; + \ldots \right)_5^4 = \left(z_1^1 \; + \ldots \right)_5^1 \frac{4 \cdot 5}{5} = 4 p_1$$

$$p_{10000} = \left(z_1^1 \, z_2^0 z_3^0 z_4^0 z_5^0 \; + \ldots \right)_1^5 = \left(z_1^1 \; + \ldots \right)_5^1 = p_1$$

$$p_{11} = \left(z_1^1 z_2^1 \; + \ldots \right)_{10}^1 = p_{11}$$

$$p_{110} = \left(z_1^1 \, z_2^1 z_3^0 \; + \ldots \right)_{10}^3 = \left(z_1^1 z_2^1 \; + \ldots \right)_{10}^1 \frac{3 \cdot 10}{10} = 3 p_{11}$$

$$p_{1100} = \left(z_1^1 \, z_2^1 z_3^0 z_4^0 \; + \ldots \right)_5^6 = \left(z_1^1 z_2^1 \; + \ldots \right)_{10}^1 = 3 p_{11}$$

$$p_{11000} = \left(z_1^1 z_2^1 z_3^0 z_4^0 z_5^0 + \ldots \right)_1^{10} = \left(z_1^1 z_2^1 + \ldots \right)_{10}^1 = p_{11}$$

$$p_{111} = \left(z_1^1 z_2^1 z_3^1 + \ldots \right)_{10}^1 = p_{111}$$

$$p_{1110} = \left(z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_4^0 + \ldots \right)_5^4 = \left(z_1^1 z_2^1 z_3^1 + \ldots \right)_{10}^1 \frac{5 \cdot 4}{10} = 2 p_{111}$$

$$p_{11100} = \left(z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_4^0 z_5^0 + \ldots \right)_1^{10} = \left(z_1 z_2 z_3 + \ldots \right)_{10}^1 = p_{111}$$

$$p_{1111} = \left(z_1 z_2 z_3 z_4 + \ldots \right)_5^1 = p_{1111}$$

$$p_{11110} = \left(z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_4^1 z_5^0 + \ldots \right)_1^5 = \left(z_1 z_2 z_3 z_4 + \ldots \right)_5^1 = p_{1111}$$

$$p_2 = \left(z_1^2 + \ldots \right)_5^1 = \left[z_1 \left(p_1 - z_2 - z_3 - z_4 - z_5 \right)_4 + \ldots \right]_5^1 =$$
$$= p_1^2 - \left(z_1 z_2 + \ldots \right)_{10}^1 \frac{4 \cdot 5}{10} = p_1^2 - 2 p_{11}$$

$$p_{20} = \left(z_1^2 z_2^0 + \ldots \right)_{10}^2 = \left[z_1^2 + \ldots \right]_5^1 \frac{2 \cdot 10}{5} = 4 p_2$$

$$p_{200} = \left(z_1^2 z_2^0 z_3^0 + \ldots \right)_{10}^3 = \left(z_1^2 + \ldots \right)_5^1 \frac{3 \cdot 10}{5} = 6 p_2$$

$$p_{2000} = \left(z_1^2 z_2^0 z_3^0 z_4^0 + \ldots \right)_5^4 = \left(z_1^2 + \ldots \right)_5^1 \frac{4 \cdot 5}{5} = 4 p_2$$

$$p_{20000} = \left(z_1^2 z_2^0 z_3^0 z_4^0 z_5^0 + \ldots \right)_1^5 = \left(z_1^2 + \ldots \right)_5^1 = p_2$$

$$p_{21} = \left(z_1^2 z_2^1 + \ldots \right)_{10}^2 = \left[z_1 z_2 \left(n_1 - z_3 \ldots \right)_3 + \ldots \right]_{10}^1 =$$
$$= p_1 p_{11} - \left(z_1 z_2 z_3 + \ldots \right)_{10}^1 \frac{3 \cdot 10}{10} = p_1 p_{11} - 3 p_{111}$$

$$p_{210} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^0 + \ldots \right)_{10}^{6} = \left(z_1^2\, z_2^1 + \ldots \right)_{10}^{2} \frac{6 \cdot 10}{2 \cdot 10} = 3 p_{21}$$

$$p_{2100} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^0 z_4^0 + \ldots \right)_{5}^{12} = \left(z_1^2\, z_2^1 + \ldots \right)_{10}^{2} \frac{5 \cdot 12}{2 \cdot 10} = 3 p_{21}$$

$$p_{21000} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^0 z_4^0 z_5^0 + \ldots \right)_{1}^{20} = \left[z_1^2\, z_2^1 + \ldots \right]_{10}^{2} = p_{21}$$

$$p_{211} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 + \ldots \right)_{10}^{3} = \left[z_1 z_2 z_3 \left(p_1 - z_4 - z_5 \right)_2 + \ldots \right]_{10}^{1} =$$
$$= p_1 p_{111} - \left(z_1 z_2 z_3 z_4 + \ldots \right)_5 = p_1 p_{111} - 4 p_{1111}$$

$$p_{2110} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 z_4^0 + \ldots \right)_{5}^{12} = \left[z_1^2 z_2^1 z_3^1 + \ldots \right]_{10}^{3} \frac{5 \cdot 12}{3 \cdot 10} = 2 p_{211}$$

$$p_{21100} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 z_4^0 z_5^0 + \ldots \right)_{1}^{30} = \left[z_1^2 z_2^1 z_3^1 + \ldots \right]_{10}^{3} = p_{211}$$

$$p_{2111} = \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 z_4^1 + \ldots \right)_{5}^{4} = \left[z_1 z_2 z_3 z_4 \left(p_1 - z_5 \right)_1 + \ldots \right]_{5}^{1} =$$
$$= p_1 p_{1111} - 5 p_{11111}$$

$$p_{21110} = p_{2111}$$

$$p_{21111} = p_{11111} p_1$$

$$p_{22} = \left(z_1^2\, z_2^2 + \ldots \right)_{10}^{1} = \left[z_1 z_2 \left(p_{11} - z_1 z_3 \ldots \right)_9 + \ldots \right]_{10} =$$
$$= p_{11}^2 - \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 + \ldots \right)_{10}^{3} \frac{6 \cdot 10}{3 \cdot 10} - \left(z_1 z_2 z_3 z_4 + \ldots \right)_{5}^{1} \frac{3 \cdot 10}{5} =$$
$$= p_{11}^2 - 2 p_1 p_{111} + 2 p_{1111}$$

$$p_{220} = \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^0 + \ldots \right)_{10}^{3} = \left[z_1^2\, z_2^2 + \ldots \right]_{10}^{1} \frac{3 \cdot 10}{10} = 3 p_{22}$$

$$p_{2200} = \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^0 z_4^0 + \ldots\right)_5^6 = \left[z_1^2\, z_2^2 + \ldots\right]_{10}^1 \frac{6 \cdot 5}{10} = 3p_{22}$$

$$p_{22000} = p_{22}$$

$$\begin{aligned} p_{221} &= \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^1 + \ldots\right)_{10}^3 = \left[z_1 z_2 z_3 \left(p_{11} - z_3 z_4\right)_3 + \ldots\right]_{10}^1 = \\ &= p_{11} p_{111} - \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 z_4^1 + \ldots\right)_5^4 \frac{6 \cdot 10}{4 \cdot 5} - \left(z_1\, z_2 z_3\, z_4 z_{5+\ldots} + \ldots\right)_1^1 \frac{10}{1} = \\ &= p_{11} p_{111} - 3p_{2111} - 10p_{11111} = p_{11} p_{111} - 3p_1 p_{1111} + 5p_{11111} \end{aligned}$$

$$p_{2210} = \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^1 z_4^0 + \ldots\right)_5^{12} = \left[z_1^2\, z_2^2 z_3^1 + \ldots\right]_{10}^3 \frac{5 \cdot 12}{3 \cdot 10} = 2p_{221}$$

$$p_{22100} = p_{221}$$

$$\begin{aligned} p_{2211} &= \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^1 z_4^1 + \ldots\right)_5^6 = \left[z_1 z_2 z_3 z_4 \left(p_{11} - z_1 z_5 \ldots\right)_4 + \ldots\right]_5^1 = \\ &= p_{11} p_{1111} - \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 z_4^1 z_5^1 + \ldots\right)_1^5 \frac{4 \cdot 5}{5} = p_{11} p_{1111} - 4p_1 p_{11111} \end{aligned}$$

$$p_{22110} = p_{2211}$$

$$p_{22111} = p_{11111} p_{11}$$

$$\begin{aligned} p_{222} &= \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^2 + \ldots\right)_{10}^1 = \left[z_1 z_2 z_3 \left(p_{111} - z_1 z_2 z_4 \ldots\right)_3 + \ldots\right]_{10}^1 = \\ &= p_{111}^2 - \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^1 z_4^1 + \ldots\right)_5^6 \frac{6 \cdot 10}{5 \cdot 6} - \left(z_1^2\, z_2^1 z_3^1 z_5^1 + \ldots\right)_1^5 \frac{3 \cdot 10}{5} = \\ &= p_{111}^2 - 2p_{2211} - 6p_{21111} = p_{111}^2 - 2p_{11} p_{1111} + 2p_1 p_{11111} \end{aligned}$$

$$p_{2220} = \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^2 z_4^0 + \ldots\right)_5^4 = \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^2 + \ldots\right)_{10}^1 \frac{4 \cdot 5}{10} = 2p_{222}$$

$$p_{22200} = p_{222}$$

$$\begin{aligned} p_{2221} &= \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^2 z_4^1 + \ldots\right)_5^4 = \left[z_1 z_2 z_3 z_4 \left(p_{111} - z_1 z_2 z_5 \ldots\right)_6 + \ldots\right]_5^1 = \\ &= p_{111} p_{1111} - \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^1 z_4^1 z_5^1 + \ldots\right)_1^{10} \frac{6 \cdot 5}{10} = p_{111} p_{1111} - 3 p_{22111} = \\ &= p_{111} p_{1111} - 3 p_{11} p_{1111} \end{aligned}$$

$$p_{22210} = p_{2221}$$

$$p_{22211} = p_{11111} p_{111}$$

$$\begin{aligned} p_{2222} &= \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^2 z_4^2 + \ldots\right)_5^1 = \left[z_1 z_2 z_3 z_4 \left(p_{1111} - z_1 z_2 z_3 z_5 \ldots\right)_4 + \ldots\right]_5^1 = \\ &= p_{1111}^2 - \left(z_1^2\, z_2^2 z_3^2 z_4^1 z_5^1 + \ldots\right)_1^{10} \frac{4 \cdot 5}{10} = \\ &= p_{1111}^2 - 2 p_{22211} = p_{1111}^2 - 2 p_{11111} p_{111} \end{aligned}$$

$$p_{222200} = p_{2222}$$

$$p_{22221} = p_{11111} p_{1111}$$

$$p_{22222} = p_{11111}^2$$

3.2. Отображение функций и уравнений

3.2.1. Определение отображений

Отображение функций, уравнений — это преобразования, обусловленные заменой независимого переменного.

На сегодняшний день известно линейное отображение. Отображение линейными функциями, трактуемое как перенос в пространство нового аргумента, разворот около оси и масштабное (конформное) изменение размеров объекта. Рассматриваемое ниже нелинейное отображение, в дополнение к сказанному, позволяет видоизменить объект, произвольно и направленно придать ему новые, требуемые качественные характеристики. Нелинейное отображение позволяет изменять, неподвластные линейному отображению, инварианты объектов.

Ниже, *для наглядности, когда будем говорить об отображении функций, будем иметь в виду пространственную фигуру функции, а говоря об отображении уравнении, будем иметь в виду плоский многоугольник его корней*, т.е. след частного сечения фигуры функции на плоскости, параллельной плоскости аргумента или самой плоскости аргумента.

Отображения рациональных алгебраических функций комплексного переменного

$$R_{\upsilon}(Z) = Z^{\upsilon} - r_1 Z^{\upsilon-1} + r_{11} Z^{\upsilon-2} - \ldots + (-1)^{\upsilon} r_{111} \ldots \qquad (34)$$

рассматриваются на основе использования аппарата «симметричных моментов» [3].

Представленная *алгебраическая функция (34) обладает примечательным и необходимым для отображения свойством — она полностью определена своими корнями, причем, единственным образом, однозначно*.

Действительно, если известны корни функции (34) — Z_1, Z_2, ... Z_{υ}, то известна и сама функция (34), так как она, в силу основной теоремы алгебры, представима произведением известных линейных сомножителей

$$R_{\upsilon}(Z) = (Z - Z_1)(Z - Z_2)\ldots(Z - Z_{\upsilon}) \qquad (35)$$

своим рещением.

Пусть, например, отображение заданной функции-оригинала (34) осуществляется тоже рациональной функцией

$$V_{\mu} = Z^{\mu} + q_1 Z^{\mu-1} + \ldots + q_{\mu} \qquad (36)$$

Это означает, что каждой точке (Z) плоскости аргумента функции-оригинала (34) ставятся в однозначное соответствие точки плоскости аргумента (V_{μ}) функции-образа. Причём, наряду с прочими точками, функцией отображения (36) «переносятся» и точки нулей функции-оригинала, соответственно, в точки — $V_{\mu 1}$, $V_{\mu 2}$, ... $V_{\mu \upsilon}$, как мы полагаем, корней функции-образа.

Опираясь на известные свойства рациональных алгебраических функций воссоздаем, функцию-образ по точкам ее корней, а раскрывая определяющее произведение (35) линейных сомножителей, представляем функцию-образ в канонической знакопеременной форме

$$R_{\mu \upsilon}\left(V_{\mu}\right)=V_{\mu}^{\upsilon}-\left(V_{\mu 1}+V_{\mu 2}+\ldots+V_{\mu \upsilon}\right)V_{\mu}^{\upsilon-1}+\ldots+(-1)\left(V_{\mu 1}V_{\mu 2}V_{\mu \upsilon}\right) \quad (37)$$

Одним из основных требований предъявляемых к функции (36) отображения является обеспечение возможности построения коэффициентов функции-образа (37) через коэффициенты заданной функции оригинала (34). Ниже, в качестве функций отображения используются только алгебраические функции, применение которых обеспечивает не только сходимость но и единственность такого представления.

Графически, заданная рациональная функция (34) представляет собой υ-линейчатую пространственную фигуру, в каждом сечении которой плоскостями $R_{\upsilon}(Z)=\mathrm{const}$, в соответствии с основной теоремой алгебры, содержится υ точек проколов, определяющих корни функции (34). Отображением функцией (36) фигура оригинала может быть «перемещена» и «переориентирована» относительно центра отсчёта, если предположить что начала координат пространств оригинала и образа совмещены. Отображением функцией (36) фигура оригинала может быть достаточно произвольно деформирована, например, до «превращения» функции-образа в симметричную или степенную функцию

$$R_{\mu \upsilon}\left(V_{\mu}\right)=V_{\mu}^{\upsilon} \quad (38)$$

Реализация каждого из требований наложенных на функцию-образ обеспечивается выбором соответствующего значения одного из произвольных коэффициентов (q) функции отображения (36). *Коэффициенты $\underline{(q)}$ функции отображения (36) будем называть поэтому, также, параметрами отобраияжен*. Требования к функции-образу записываются в форме выражений связи между коэффициентами, в частности, в форме равенств коэффициентов константам.

Например, для размещения функции-образа (37) в центральной системе координат, требуется равенство нулю первого её коэффициента

$$V_{\mu 1} + V_{\mu 2} + \ldots + V_{\mu \upsilon} = \qquad (39)$$

Раскрываем образы нулей в соответствии с функцией отображения (36) и вычисляем первый коэффициент

$$\begin{aligned}
&= \left(Z_1^{\mu\upsilon} + q_1 Z_1^{\mu-1} + \ldots + q_\mu Z_1^0\right) + \left(Z_2^\mu + q_1 Z_2^{\mu-1} + \ldots + q_\mu Z_2^0\right) + \ldots \\
&\ldots + \left(Z_\upsilon^\mu + q_1 Z_\upsilon^{\mu-1} + \ldots + q_\mu Z_\upsilon^0\right) = \left(Z_1^\mu + \ldots\right)_\upsilon^1 + q_1\left(Z_1^{\mu-1} + \ldots\right)_\upsilon^1 + \ldots \\
&\ldots + q_\mu\left(Z_1^0 + \ldots\right)_\upsilon^1 = r_\mu + q_1 r_{\mu-1} + \ldots + q_\mu r_0 = 0
\end{aligned}$$

$$(40)$$

Здесь, через r_μ, как видим, обозначены стандартные моменты корней функции-оригинала (34).

Для выполнения требования (39) наложенного на функцию-образ достаточно одного свободного параметра (q) отображения. Пусть это будет параметр (q_1), остальные полагаем равными нулю. Функция отображения (36) при этом окажется функцией первого порядка $(\mu = 1)$.

$$V_1 = Z + q_1 \qquad (41)$$

Первый коэффициент функции-образа (37) будет равен

$$\left(V_{\mu 1} + \ldots\right)_\upsilon = r_1 + q_1 r_0 = r_1 + \upsilon q_1 \qquad (42)$$

Откуда следует, что для выполнения требования (39) наложенного на функцию-образ параметр отображения (q_1) должен иметь значение

$$q_1 = -\frac{r_1}{\upsilon} \qquad (43)$$

При наложении нескольких требований на функцию образ, параметры отображения вычисляются как корни системы, состоящей из соответствующего числа уравнений.

Подстановка найденных значений параметров отображения окончательно определяет функцию-образ со всеми заложенными в неё качественными особенностями. На этом заканчивается использование метода отображений как метода синтезирования новых функций. Дальнейшее преобразование функций-образов зависит от того, как была поставлена более общая задача.

Так, например, если задача заключается в разработке некоторого устройства или его части и нами составлена функция-оригинал, описывающая работу его макета, функция-образ, учитывающая требования, закладываемые к работе будущего устройства, представит собой более совершенную математическую модель разработки. Новый оригинал. Применение, таким образом, отображений при проектировании позволяет сместить центр тяжести исследований от стенда к рабочему столу, от неорганизованного тыка к аналитически обоснованному творчеству.

В процессе проведения исследовательских работ при обработке гипотез функция-оригинал определяет наше первое представление о явлении. Функция-образ включает в себя вновь полученные сведения и предположения, представляет собой более совершенную модель, новую функцию-оригинал [5].

В математических науках отображение, это инструмент синтеза и анализа, позволяющий видоизменить аналитические и графические формы функций. Исторически, отображение было и остается основным методом решения алгебраических уравнений. Отображение позволяет привести образ многоугольника корней уравнения к частной, решаемой форме [2].

3.2.2. Отображение линейными функциями

Рассмотрим линейное отображение функции третьего порядка

$$A_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111} = Z^3 - 3a_1 Z^2 + 3a_2 Z - a_3 \quad (44)$$

линейной функцией

$$V = q_0 Z + q_1 Z^0 \tag{45}$$

Функция-образ тоже представляет собой алгебраическую функцию третьего порядка

$$B_3(V) = V^3 - 3b_1 V^2 + 3b_2 V - b_3 \tag{46}$$

Действительно, функции-образу придаём три однозначно определённых точки корней (45)

$$\begin{aligned} V_1 &= q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0 \\ V_2 &= q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0 \\ V_3 &= q_0 Z_3 + q_1 Z_3^0 \end{aligned} \tag{47}$$

на плоскости (V) определения, из которых она и может быть воссоздана в соответствии с основной теоремой алгебры, единственным образом

$$B_3(V) = V^3 - (V_1 + \ldots)_3^1 \cdot V^2 + (V_1 V_2 + \ldots)_3^1 \cdot V - (V_1 V_2 V_3) \tag{48}$$

Вычисление коэффициентов функции-образа (48) начинаем с третьего (46, 47, 48)

$$b_3 = V_1 V_2 V_3 = (q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0)(q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0)(q_0 Z_3 + q_1 Z_3^0) = \tag{49}$$

Выписываем произведение вторых слагаемых сомножителей (49) коэффициента b_3

$$= q_1 q_1 q_1 Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots \tag{50}$$

Для удобства, полученное произведение (50) представим в форме

$$= q_{111} m_{000} + \ldots \tag{51}$$

где произведение параметров отображения заменено условным произведением индексов

$$q_1 \cdot q_1 \cdot q_1 = q_{111} \tag{52}$$

а произведение корней функции (44) соответствующим моментом

$$Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 = m_{000} \tag{53}$$

Получившийся таким образом головной момент (51) произведения функций (49) остается просуммировать сочетаниями с повторением индексов по три (три индекса и у момента и у параметра) из двух (два возможных значения индекса — 0 и 1)

$$= \left(q_{111} m_{000} + \ldots\right)_4 = q_{111} m_{000} + q_{011} m_{100} + q_{001} m_{110} + q_{000} m_{111} = \tag{54}$$

Возвращаясь в найденном (54) выражении вместо произведения индексов к произведению параметров, получим окончательное выражение третьего коэффициента (49) функции-образа (48) через параметры отображения и коэффициенты функции-оригинала

$$= q_1^3 m_{000} + q_0 q_1^2 m_{100} + q_0^2 q_1 m_{110} + q_0^3 m_{111} = \tag{55}$$

Замечания

1. Можно не переходить к произведению индексов (52) вместо произведения параметров, а выбранное произведение (50) сразу представить головным моментом коэффициента b_3 (49)

$$\left(= q_1 q_1 q_1 m_{000} + \ldots\right)_4 = \tag{56}$$

а затем вывести результат (55).

2. Головной момент (50) коэффициента b_3, может быть выбран произведением любых слагаемых, например

$$= (q_0 Z_1)(q_1 Z_2^0)(q_0 Z_3) = q_0 q_1 q_0 Z_1 Z_2^0 Z_3 = (q_{010} m_{101} + \ldots)_4 \qquad (57)$$

Здесь, головной момент (50) коэффициента b_3 выбран таковым из соображения будущего представления его в форме по убывающим степеням параметра q_1 отображения, имеющего размерность переменной функции-образа.

3. Выборка комбинаций при переходе от сокращенной записи функции (54) коэффициента b_3 осуществляется простым переносом подстрочных единиц из обозначения параметра в обозначение момента.

Второй и третий коэффициенты функции образа (46) вычисляем как, соответственно, первую и вторую производную третьего (55) коэффициента по параметру q_1

$$\begin{aligned} 3b_2 &= \frac{1}{1}(b_3)' = 3q_1^2 + 2q_0 q_1 m_1 + q_0^2 m_{11} \\ 3b_1 &= \frac{1}{2}(b_3)'' = 3q_1 + q_0 m_1 \end{aligned} \qquad (58)$$

Здесь учтено, что $m_{000} = 1$, $m_{100} = m_1$ и $m_{110} = m_{11}$. Производные (58) делённые на число соответствующее порядку производной будем называть «целыми производными» и в дальнейшем, если это не оговорено, слово «целые» иногда будем опускать.

Для проверки произведем вычисление, например, второго коэффициента функции-образа полностью

$$\begin{aligned} & 3b_2 = (V_1 V_2 + \ldots)_3^1 = \\ & = \left[(q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0)(q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0) + \ldots\right]_3^1 = \\ & = q_1 q_1 Z_1^0 Z_2^0 + \ldots = (q_{11} m_{00} + \ldots)_3^1 = \\ & = q_{11} m_{00} + q_{01} m_{10} + q_{00} m_{11} = \\ & = 3q_1^2 + 2q_0 q_1 m_1 + q_0^2 m_{11} \end{aligned} \qquad (59)$$

Можно произвести вычисление и первого коэффициента и еще раз убедиться в совпадении результатов с ранее сделанными выводами (58).

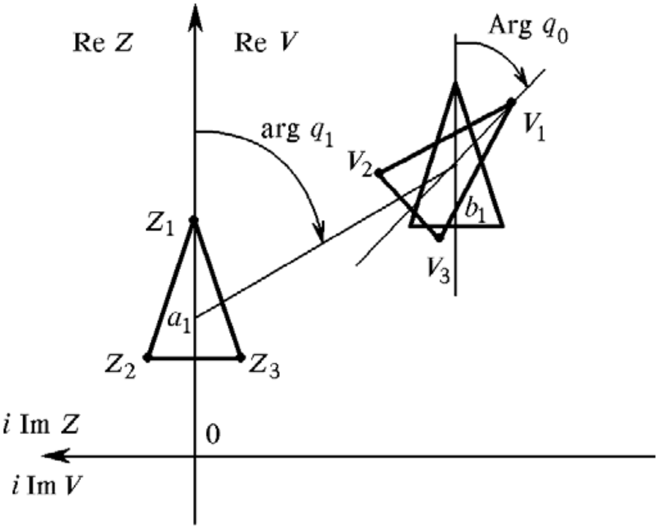


Рис. 8. *Линейное отображение. Плоскости аргумента оригинала* (Z) *и образа* (V) *совмещены*

Итак, функция-образ (46) в пространстве над плоскостью (V) комплексной переменной определена. Коэффициенты её (55, 58) выражены через коэффициенты функции-оригинала (44) и произвольные параметры (q_0, q_1) функции отображения (45). Известно, что придавая различные значения модулю параметра q_0, можно изменить масштаб треугольника корней функции-образа. Изменение аргумента q_0 — это повороты треугольника корней около своего центра тяжести. Изменение модуля параметра q_1 — это изменение расстояния до центра треугольника от центра системы отсчета. Аргумент q_1 — это аргумент центра треугольника корней (рис. 8).

Предпримем попытку представления функции образа (46) в форме куба

$$\begin{aligned} B_3(V) &= V^3 - 3b_1V^2 + 3b_2V - b_3 = \\ &= V^3 - 3b_1V^2 + 3b_1V - b_1^3 = (V - b_1)^3 \end{aligned} \qquad (60)$$

т.е. функции с трехкратным корнем (если удастся, то будет найдено решение уравнения третьей степени). Для этого необходимо, как видим, выполнение двух условий

$$\begin{aligned} b_1^2 &= b_2 \\ b_1^3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (61)$$

Функция отображения (45) содержит как раз два произвольных параметра. Однако, подстановка найденных коэффициентов (45, 58) в выражения (61) требуемой связи, вместо ожидаемой системы уравнений относительно параметров (q_0, q_1) отображения, формирует нам встречное требоване, а именно:

$$\begin{aligned} a_{02} &= -a_1^2 + a_2 = -b_1^2 + b_2 = \text{const} \\ a_{03} &= 2a_1^3 - 3a_1a_2 + a_3 = 2b_1^3 - 3b_1b_2 + b_3 = \text{const} \end{aligned} \qquad (62)$$

независимое от параметров отображения постоянство значений некоторых функций коэффициентов образа и оригинала, именуемых в связи с этим, известными нам инвариантами линейного отображения

Выдвинутое условие (61) равенства нулю инвариантов функции-образа не реализуемо ни в розницу, ни вместе. Если же инвариант, хотя бы один, равен нулю у функции-оригинала, то он равен нулю и у образа любого линейного отображения. Линейным отображением невозможно видоизменить фигуру функции-оригинала (мы не имеем в виду масштабного изменения), привести её к какой-то частной разрешаемой форме. Однако, инварианты линейного отображения разрушаемы нелинейным отображением, функцией уже второго порядка.

Отметим, что инвариантами являются коэффициенты функции, если она размещена в центральной системе координат, т.е.

там, где первый коэффициент функции равен нулю. Справедливо и обратное утверждение — если коэффициенты функции — инварианты, то первый коэффициент равен нулю.

Чтобы показать справедливость прямого утверждения, разместим функцию-образ в центральной системе координат, приравняв первый её коэффициент (58) нулю

$$3b_1 = 3q_1 + q_0 m_1 = \qquad (63)$$

Положим теперь $q_0 = 1$ и перейдем к коэффициентам в биномиальной форме

$$\begin{aligned} &3q_1 + 3a_1 = 0 \\ &q_1 = -a_1 \end{aligned} \qquad (64)$$

Подставляем найденное значение параметра отображения (q_1) в формулы (58; 55) определяющие второй и третий коэффициенты функции-образа

$$\begin{aligned} &3b_2 = 3\left(-a_1^2 + a_2\right) \\ &b_3 = 2a_1^3 - 3a_1 a_2 + a_3 \end{aligned} \qquad (65)$$

Находим, что они действительно равны соответствующим инвариантам линейного отображения.

Приравняем второй и третий коэффициенты функции инвариантам

$$\begin{aligned} &3b_2 = 3b_{02} = 3\left(-b_1^2 + b_2\right) \\ &b_3 = b_{03} = 2b_1^3 - 3b_1 b_2 + b_3 \end{aligned} \qquad (66)$$

находим, что справедливо и обратное утверждение, так как приведенные равенства имеют место только в случае, когда первый коэффициент (b_1) функции равен нулю.

Итак доказано, что если первый коэффициент (функции, уравнения) равен нулю, то остальные её коэффициенты являются инвариантами линейного отображения и, наоборот.

3.2.3. Отображение функциями второго порядка

В качестве функции-оригинала по-прежнему будем рассматривать целую рациональную функцию третьего порядка

$$A_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z^1 - m_{111} = Z^3 - 3a_1 Z^2 + 3a_2 Z_1 - a_3 \tag{67}$$

Отображение заданной (67) функции, а точнее отображение точек плоскости аргумента над которой задана функция-оригинал в точки плоскости аргумента, над которой будет размещаться функция-образ, осуществляется однозначной целой рациональной функцией второго порядка

$$Z_2 = q_0 Z^2 + q_1 Z^1 + q_2 Z^0 \tag{68}$$

Полагаем, что образами корней функции-оригинала являются корни функции-образа

$$\begin{aligned} Z_{21} &= q_0 Z_1^2 + q_1 Z_1^1 + q_2 Z_1^0 \\ Z_{22} &= q_0 Z_2^2 + q_1 Z_2^1 + q_2 Z_2^0 \\ Z_{23} &= q_0 Z_3^2 + q_1 Z_3^1 + q_2 Z_3^0 \end{aligned} \tag{69}$$

Тогда функция-образ, воспроизведенная через свои корни решением, будет тоже целой рациональной функцией

$$\begin{aligned} &A_3(Z)_2 = Z_2^3 - (Z_{21} + \ldots)_1^3 Z_2^2 + (Z_{21} Z_{22} + \ldots)_1^3 Z_2^1 - (Z_{21} Z_{22} Z_{23} + \ldots)_1^1 = \\ &= Z_2^3 - 3a_{21} Z_2^2 + 3a_{22} Z_2^1 - a_{23} \end{aligned} \tag{70}$$

Вычисляем третий коэффициент функции-образа

$$a_{23} = Z_{21} Z_{22} Z_{23} = \left[\left(q_0 Z_1^2 + q_1 Z_1^1 + q_2 Z_1^0\right) \times \ldots\right]_3 = \tag{71}$$

Формируем головной момент коэффициента из первых слагаемых сомножителей (71)

$$\begin{aligned} &= q_0 Z_1^2 q_0 Z_2^2 q_0 Z_3^2 + \ldots = \\ &= \left(q_{000} m_{222} + \ldots\right)_{10} = \end{aligned} \qquad (72)$$

При этом, количество слагаемых результата вычисляем как количество сочетаний с повторениями из общего числа применяемых в выражении индексов (0, 1, 2 — из трёх) по числу мест для размещения индексов в обозначении параметра отображения (q) или момента (m), т.е., по три,

$$\frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = 10 \qquad (73)$$

При переходе от сокращенной (72) к полной (74) записи третьего коэффициента каждое очередное слагаемое формируются списанием единицы из числа в обозначение момента (m) и занесением её в обозначение параметра отображения (q)

$$\begin{aligned} &= q_{000} m_{222} + q_{001} m_{221} + q_{002} m_{220} + q_{011} m_{211} + q_{012} m_{210} + \\ &+ q_{022} m_{200} + q_{111} m_{111} + q_{112} m_{110} + q_{122} m_{100} + q_{222} m_{000} = \end{aligned} \qquad (74)$$

Теперь, для получения окончательного результата, следует перейти от представления параметров отображения в форме произведения индексов к форме произведения параметров

$$\begin{aligned} &= q_0^3 m_{222} + q_0^2 q_1 m_{221} + q_0^2 q_2 m_{220} + q_0 q_1^2 m_{211} + q_0 q_1 q_2 m_{210} + \\ &+ q_0 q_2^2 m_{200} + q_1^3 m_{111} + q_1^2 q_2 m_{110} + q_1 q_2^2 m_{100} + q_2^3 m_{000} = \end{aligned} \qquad (75)$$

Упрощаем функцию третьего коэффициента (a_{23}) и представляем ее в форме многочлена по убывающим степеням параметра (q_2) размерности переменной функции-образа

$$
\begin{aligned}
&= q_0^3 m_{222} + q_0^2 q_1 m_{221} + q_0^2 q_2 m_{22} + q_0 q_1^2 m_{211} + q_0 q_1 q_2 m_{21} + \\
&+ q_0 q_2^2 m_2 + q_1^3 m_{111} + q_1^2 q_2 m_{11} + q_1 q_2^2 m_1 + q_2^3 = \\
&= a_{23} = q_2^3 + q_2^2 \left(q_1 m_1 + q_0 m_2\right) + q_2 \left(q_1^2 m_{11} + q_0 q_1 m_{21} + q_0^2 m_{22}\right) + \\
&+ \left(q_1^3 m_{111} + q_0 q_1^2 m_{211} + q_0^2 q_1 m_{221} + q_0^3 m_{222}\right)
\end{aligned} \tag{76}
$$

С целью проверки правильности проведенных выкладок убедимся в постоянстве количества частных моментов в начале (71) и конце (76) вычислений

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 1 + (3 + 3) + (3 + 6 + 3) + (1 + 3 + 3 + 1) = 27 \tag{77}$$

Наконец, коэффициенты второго и первого порядков функции-образа (70) вычисляем как соответственно первая и вторая целые производные третьего коэффициента по параметру (q_2) размерности плоскости отображения (или размерности новой переменной — Z_2)

$$
\begin{aligned}
3a_{22} &= 3q_2^2 + 2q_2 \left(q_1 m_1 + q_0 m_2\right) + \left(q_1^2 m_1 + q_0 q_1 m_{21} + q_0^2 m_{22}\right) \\
3a_{21} &= 3q_2 + \left(q_1 m_1 + q_0 m_2\right)
\end{aligned} \tag{78}
$$

Сравнивая формулы коэффициентов функций-образов линейного (55, 58) и квадратичного (76, 78) отображений, можно заключить, что отображение функцией (68) второго порядка это наложение трёх отображений (рис. 9).

Первое отображение это стандартное отображение функцией $Z_2 = Z^2$, где $q_0 = 1$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$. Этим действием треугольник нулей функции-оригинала деформируется, центр его тяжести (a_1) располагается в точке (m_2) плоскости нового аргумента.

Второе преобразование это пропорциональное отображение функцией $Z_2 = q_1 Z$. Этим действием треугольник-образ конформно видоизменяется и из точки m_2 передвигается в точку $(m_2 + q_1 m_1)$ плоскости отображения (Z_2).

Третьим отображением треугольник корней функции-образа параллельно перемещается из второго положения в конечное — $a_{21} = m_2 + q_1 m_1 + q_2$.

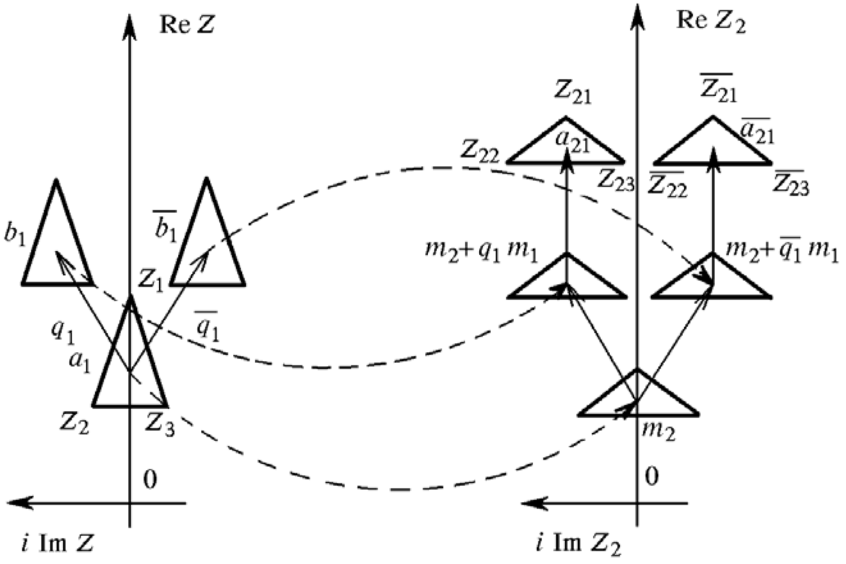


Рис. 9. *Отображение функцией второго порядка*

Порядок переходов может быть прочитан и по-другому. Сначала линейное отображение центра треугольника-оригинала из точки a_1 в точку b_1. Затем стандартное отображение в точку $(m_2 + q_1 m_1)$ на плоскости отображения (Z_2), а в заключение, линейное перемещение (q_2) по плоскости (Z_2) отображения в конечную точку (a_{21}).

В том, что последнее перемещение q_2 линейно, можно убедиться, построив инварианты линейного отображения функции-образа. Инварианты не должны зависеть от параметра q_2 линейного отображения. Действительно, инвариант второго порядка функции-образа равен

$$-a_{21}^2 + a_{22} = \tag{79}$$

а после подстановки значений коэффициентов, выраженных через параметры отображения (78),

где одновременно принимаем $q_0 = 1$, находим подтверждение независимости инварианта от параметра (q_2) перемещения

$$= \frac{1}{9}\left[q_1^2\left(3m_{11} - m_1^2\right) + q_1\left(3m_{21} - 2m_1m_2\right) + 3\left(m_{22} - m_2^2\right)\right] \tag{80}$$

Полученное выражение показывает, что существует два значения параметра отображения (q_1), при которых инварианту второго порядка функции-образа может быть придано любое значение, например нулевое. Управление инвариантами это управление конфигурацией треугольников корней функции и, следовательно, самой функцией.

Так нулевому значению инварианта второго порядка соответствует равносторонний треугольник корней функции. Нулевому значению инварианта третьего порядка соответствует треугольник — отрезок, лежащий на действительной или мнимой оси системы отчета, и т.д.

Пусть, например, требуется найти общее решение уравнения (или функции) третьей степени. Уравнение будем считать заданным в центральной системе координат

$$Z^3 + m_{011}Z - m_{011} = 0 \tag{81}$$

на что указывает неканонический ноль в обозначении моментов.

Наметим для себя решение поставленной задачи через частную форму уравнения образа, у которого не только первый, но и второй коэффициенты равны нулю. То есть функция-образ должна удовлетворять двум новым условиям. Следовательно, функция отображения должна содержать два активных, произвольных параметра отображения.

Например, рассмотренная функция второго порядка (68) с параметром $q_0 = 1$.

Образы корней заданного уравнения (81) в этом случае будут определяться формулами

$$\begin{aligned} Z_{21} &= Z_1^2 + q_1 Z_1 + q_2 \\ Z_{22} &= Z_2^2 + q_1 Z_2 + q_2 \\ Z_{23} &= Z_3^2 + q_1 Z_3 + q_2 \end{aligned} \tag{82}$$

Уравнение образ (70) должно иметь вид

$$Z_2^3 - a_{023} = 0 \tag{83}$$

И должны иметь место два наложенных нами условия на первый и второй коэффициенты (78) уравнения образа

$$\begin{aligned} 3a_{22} &= 3q_2^2 - 4q_2 m_{011} + q_1^2 m_{011} - 3q_1 m_{0111} + m_{011}^2 = 0 \\ 3a_{21} &= 3q_2 - 2m_{011} = 0 \end{aligned} \tag{84}$$

В последних двух уравнениях смешанные и кратные моменты заменены на центральные единичные.

Начинается решение с нахождения значений параметров отображения удовлетворяющих системе уравнений (84)

$$\begin{aligned} q_{11,2} &= \frac{3m_{0111}}{2m_{011}} \pm \sqrt{\frac{27m_{0111}^2 + 4m_{011}^3}{12m_{011}^2}} \\ q_2 &= \frac{2m_{011}}{3} \end{aligned} \tag{85}$$

Далее подстановкой найденных значений параметров отображения (85) определяется коэффициент третьего порядка (76) уравнения образа, в центральной системе координат.

$$\begin{aligned} a_{023} &= \frac{D_3^2}{54\sqrt{27m_{0111}^2}} \left(\sqrt{3} D_3 \pm 9m_{0111} \right) \\ D_3 &= \sqrt{27m_{0111}^2 + 4m_{011}^3} \end{aligned} \tag{86}$$

Следующим шагом вычисляются корни уравнения образа (83)

$$Z_{21,2,3} = \sqrt[3]{a_{023}} \tag{87}$$

и, наконец, корни заданного уравнения из системы уравнений (82), после подстановки значений найденных коэффициентов. В более, общем случае корни заданного уравнения находятся из системы — одно из уравнений (82) и заданное уравнение (81).

Найденное решение сводится к известным формулам Кардано, что и должно произойти с любым «новым» решением, так как речь идет об одних и тех же корнях (точках плоскости). И ничего «нового» не существует, или между коэффициентами заданного уравнения существует априорная связь, что невозможно т.к. коэффициенты произвольны.

Полученных сведений из теорий симметричных моментов и отображений вполне достаточно для того, чтобы в нужной мере разобрать т.н. стандартное отображение. Отображение, нашедшее применение в методе приближенного, предельного решения алгебраических уравнений.

Стандартным называется отображение, осуществляемое одночленной, степенной функцией

$$Z_{\upsilon} = Z^{\upsilon} \tag{88}$$

для нас важен эффект раздвижения корней и одночленной функции для этого достаточно.

Если задано уравнение-оригинал, например,

$$Z^5 - p_1 Z^4 + p_{11} Z^3 - p_{111} Z^2 + p_{1111} Z - p_{11111} = 0 \tag{89}$$

то при отображении на плоскость, например, второго порядка, корни заданного уравнения отображаются в точки плоскости Z_2

$$\begin{aligned} Z_{21} &= Z_{11}^2 \\ Z_{22} &= Z_{12}^2 \\ Z_{23} &= Z_{13}^2 \\ Z_{24} &= Z_{14}^2 \\ Z_{25} &= Z_{15}^2 \end{aligned} \tag{90}$$

которые мы принимаем за корни уравнения-образа и воссоздаем на них уравнение-образ

$$Z^5 - p_2 Z^4 + p_{22} Z^3 - p_{222} Z^2 + p_{2222} Z - p_{22222} = 0 \qquad (91)$$

В соответствии с формулами Виета, коэффициенты уравнения-образа определяются корнями этого уравнения и равны (90)

$$\begin{aligned}
p_2 &= \left(Z_{21} + \ldots\right)_5^1 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_5^1 \\
p_{22} &= \left(Z_{21} Z_{22} + \ldots\right)_{10}^1 = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_{10}^1 \\
p_{222} &= \left(Z_{21} Z_{22} Z_{23} + \ldots\right)_{10}^1 = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right)_{10}^1 \\
p_{2222} &= \left(Z_{21} Z_{22} Z_{23} Z_{24} + \ldots\right)_5^1 = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 + \ldots\right)_5^1 \\
p_{22222} &= Z_{21} Z_{22} Z_{23} Z_{24} Z_{25} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 Z_5^2 + \ldots\right)_1^1
\end{aligned} \qquad (92)$$

Пользуясь таблицами приложения или самовыводом коэффициенты уравнения-образа можно представить и через единичные моменты уравнения-оригинала (89).

3.3. Разделение уравнений

3.3.1. Предельное разделение уравнений

Пусть задано уравнение пятой степени и известно, что корни его действительны и различны по модулю

$$Z^5 - p_1 Z^4 + p_{11} Z^3 - p_{111} Z^2 + p_{1111} Z - p_{11111} = 0 \qquad (1)$$

Отобразим заданное уравнение стандартной функцией

$$Z_\upsilon = Z^\upsilon \qquad (2)$$

на плоскость υ -того порядка. Уравнение-образ будет иметь вид и тоже действительные и различные корни

$$Z^5 - p_\upsilon Z_\upsilon^4 + p_{\upsilon\upsilon} Z_\upsilon^3 - p_{\upsilon\upsilon\upsilon} Z_\upsilon^2 + p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} Z_\upsilon - p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} = 0 \qquad (3)$$

Выберем из пяти корней уравнения-образа (3) наименьший по модулю и обозначим его как $Z_{\upsilon 5}$. Подставим корень в уравнение-образ переписав его в форме симметрированного оригинала

$$Z_{\upsilon 5}^5 - \left(Z_{\upsilon 1} + \ldots\right)_5^1 Z_{\upsilon 5}^4 + \left(Z_{\upsilon 1} Z_{\upsilon 2} + \ldots\right)_{10}^1 Z_{\upsilon 5}^3 - \left(Z_{\upsilon 1} Z_{\upsilon 2} Z_{\upsilon 3} + \ldots\right)_{10}^1 Z_{\upsilon 5}^2 +$$
$$+ \left(Z_{\upsilon 1} Z_{\upsilon 2} Z_{\upsilon 3} Z_{\upsilon 4} + \ldots\right)_5^1 Z_{\upsilon 5} - \left(Z_{\upsilon 1} Z_{\upsilon 2} Z_{\upsilon 3} Z_{\upsilon 4} Z_{\upsilon 5} + \ldots\right)_1^1 = 0$$
$$(4)$$

$$Z_5^{5\upsilon} - \left(Z_1^\upsilon + \ldots\right)_5^1 Z_5^{4\upsilon} + \left(Z_1^\upsilon Z_2^\upsilon + \ldots\right)_{10}^1 Z_5^{3\upsilon} - \left(Z_1^\upsilon Z_2^\upsilon Z_2^\upsilon + \ldots\right)_{10}^1 Z_5^{2\upsilon} +$$
$$+ \left(Z_1^\upsilon Z_2^\upsilon Z_3^\upsilon Z_4^\upsilon + \ldots\right)_5^1 Z_5^\upsilon - Z_1^\upsilon Z_2^\upsilon Z_3^\upsilon Z_4^\upsilon Z_5^\upsilon = 0$$
$$(5)$$

Из рассмотренного ранее распределения корней по числовой сфере мы знаем, что корень Z_5 может рассматриваться как число меньшее единицы. В связи с чем, всегда может быть выбрано такое число (υ) в степени функции отображения (2), что слагаемыми равенства (5) в симметрированном оригинале, содержащими корень Z_5 в степенях больших единицы, можно пренебречь. В результате от уравнения-образа (3) по мере увеличения числа (υ) останется линейное подуравнение

$$p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} \cdot Z_{\upsilon 5} - p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} = 0 \qquad (6)$$

определяющее наименьший по модулю корень $Z_{\upsilon 5}$, который в соответствии с функцией отображения (2) может быть преобразован в наименьший же корень заданного уравнения-оригинала (1)

$$Z_5 = \sqrt[\upsilon]{\frac{p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}}{p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}}} \qquad (7)$$

Возвращаемся к ранее отброшенным слагаемым симметрированного оригинала (5)

$$Z^{4\upsilon} - p_\upsilon Z^{3\upsilon} + p_{\upsilon\upsilon} Z^{2\upsilon} - p_{\upsilon\upsilon\upsilon} Z^{\upsilon} + p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} = 0 \qquad (8)$$

Теперь это, по форме, симметрированный оригинал уравнения четвертой степени. Полагая, что степень (υ) функции отображения (2) достаточно велика, и обозначив наименьший по модулю, из оставшихся четырех корней заданного уравнения (1), как Z_4, и повторив целиком и полностью все предыдущие рассуждения, отбрасываем слагаемые симметрированного оригинала (8), содержащие переменное в степенях выше единицы и получаем линейной подуравнение

$$p_{\upsilon\upsilon\upsilon} Z^{\upsilon} - p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} = 0 \qquad (9)$$

определяющее корень Z_4 заданного уравнения (1)

$$Z_4 = \sqrt[\upsilon]{\frac{p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}}{p_{\upsilon\upsilon\upsilon}}} \qquad (10)$$

Еще и еще раз повторив цикл приведенных выкладок, можно получить выражения и для остальных корней

$$Z_3 = \sqrt[\upsilon]{\frac{p_{\upsilon\upsilon\upsilon}}{p_{\upsilon\upsilon}}}$$

$$Z_2 = \sqrt[\upsilon]{\frac{p_{\upsilon\upsilon}}{p_{\upsilon}}} \qquad (11)$$

$$Z_1 = \sqrt[\upsilon]{p_\upsilon}$$

заданного уравнения (1).

Итак, показано, что без каких бы то ни было условий, т.е. в общем случае, стандартное отображение позволяет произвести разделение заданного уравнения с действительными, различными по модулям корнями на линейные подуравнения. И решить их.

3.3.2. Естественное разделение уравнений

Анализ полученных решений алгебраического уравнения (1) показывает, что стремление корней к своим пределам монотонно, что точность определяемых корней зависит только от степени (υ) функции отображения (2) и может быть выбрана сколь угодно высокой. Имеет место *«основная закономерность распределения модулей корней алгебраического уравнения над плоскостью ν-того порядка» (7,10,11)*

$$|Z_1| > |Z_2| > |Z_3| > |Z_4| > |Z_5| \qquad (12)$$

предопределённая объективным свойством алгебраической функции и образуемого ею уравнения. Отмеченная закономерность, очевидно, распространяется и на функции и уравнения образов, так как они тоже алгебраичны.

Имеет место *«основная закономерность распределения модулей коэффициентов образа алгебраического уравнения над плоскостью $\nu - того$ пороядка»*

$$|p_\nu| > |p_{\nu\nu} / p_\nu| > |p_{\nu\nu\nu} / p_{\nu\nu}| > |p_{\nu\nu\nu\nu} / p_{\nu\nu\nu}| > |p_{\nu\nu\nu\nu\nu} / p_{\nu\nu\nu\nu}| \quad (13)$$

полученная заменой коней, в построенной закономерности распределения (12), их выражениями через коэффициенты (7,10,11).

Имеют место *«основные соотношения связи коэффициентов алгебраического уравнения-образа над плоскостью ν-того порядка»* вытекающие из полученных предельных решений (7,10,11) и формул Виета

$$\begin{aligned} p_\nu &= (Z_{\nu 1} + \ldots)_5 = \\ &= p_\nu + p_{\nu\nu} / p_\nu + p_{\nu\nu\nu} / p_{\nu\nu} + p_{\nu\nu\nu\nu} / p_{\nu\nu\nu} + p_{\nu\nu\nu\nu\nu} / p_{\nu\nu\nu\nu} \\ p_{\nu\nu} &= (Z_{\nu 1} Z_{\nu 2} + \ldots)_{10} = p_\nu \frac{p_{\nu\nu}}{p_\nu} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (14)$$

……………………………………

которые, в частности, могут использоваться для оценки точности принимаемых решений.

Напомним дополнительно, что во-первых, отображение функций-оригиналов в функции-образы осуществляется однозначно, в силу однозначности функции отображения (2);

во-вторых, в силу алгебраичности функций и действий, *при отображении сохраняется*, как это было показано при рассмотрении числовой сферы, *порядок чередования модулей корней уравнения-образа чередованию модулей соответствующих корней уравнения-оригинала*;

в-третьих, опять же в силу алгебраичности функций и действий, *сохраняется характер корней уравнения-оригинала при отображении в образы*, т.е. сохраняются действительность, комплексность, сопряженность, знаки корней-оригиналов при отображении в корни-образы.

Отмеченные свойства корней-образов и корней-оригиналов позволяют нам сохранить одинаковыми их порядковые номера корней.

Пример 1.

Рассмотрим числовой пример уравнения второй степени

$$Z^2-(-2)Z+(-3)=0 \qquad (13)$$

Воспользовавшись данными таблиц моментов, вычисляем и сводим в сетку моменты уравнений первых шести образов отображения функцией (2) уравнения (13)

υ	1	2	3	4	5	6
d_υ	-2	10	-26	82	-242	730
$d_{\upsilon\upsilon}$	-3	9	-27	81	-243	729

(14)

Видно, действительно, что от образа к образу, по мере роста степени функции отображения, модули моментов монотонно возрастают.

Полагая, что корни заданного уравнения (13) действительны и различны, расщепляем уравнение υ-того образа отображения на два линейных подуравнения, соответственно для большего и меньшего по модулю корней

$$\begin{gathered} Z_{\upsilon 1} - d_\upsilon = 0 \\ d_\upsilon Z_{\upsilon 1} - d_{\upsilon\upsilon} = 0 \end{gathered} \qquad (15)$$

Подставляя в подуравнения (15) вычисленные (14) значения моментов, находим соответствующие приближения корней заданного уравнения

υ	1	2	3	4	5	6
$Z_1(\upsilon)=\sqrt[\upsilon]{Z_{\upsilon 1}}=\sqrt[\upsilon]{d_\upsilon}$	-2	-3,16	-2,964	-3,011	-2,998	-3,001
$Z_2(\upsilon)=\sqrt[\upsilon]{Z_{\upsilon 2}}=\sqrt[\upsilon]{\dfrac{d_{\upsilon\upsilon}}{d_\upsilon}}$	1,5	0,949	1,013	0,996	1,001	1,000

(16)

Предельные значения корней очевидны — это $Z_1 = -3$ и $Z_2 = 1$ и удовлетворяют подстановке в заданное уравнение. Полученные результаты, как видим, полностью подтверждают выводы, сделанные в ходе общего исследования уравнений образов.

Действительно, первое приближение определило знак вычисляемого корня, так что при вычислении последующих приближений приходится только проверять, что нужного знака результат в общем их количестве есть (существует).

Действительно, вычисляемые приближения корней даже двумя встречными последовательностями четных и нечетных отображений, асимптотически сходятся к своему предельному значению.

Очевидно также, что каково бы ни было наперед заданное допустимое значение погрешности, всегда найдется такое значение (υ) степени функции отображения, при которой точность вычисления корня уравнения удовлетворит поставленному требованию. Поставленному требованию удовлетворит соответственно и общее решение для корня. Так если удовлетворяет оговоренному требованию точности четвертое приближение для корня Z_1 и пятое приближение для корня Z_2, то общие решения корней, в соответствии с формулами (16) вычисления и таблицами моментов приложения, будут иметь вид

$$\begin{gathered} Z_1(4) = \sqrt[4]{d_4} = \sqrt[4]{d_1^4 - 2d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2} \\ Z_2(5) = \sqrt[5]{\frac{d_{55}}{d_5}} = \sqrt[5]{\frac{d_{11}^5}{\left(d_1^5 - 5d_1^3 d_{11} + 5d_1 d_{11}^2\right)}} \end{gathered} \qquad (17)$$

Полученные общие решения будут удовлетворять исследованиям корней в функции их физических параметров с той же точностью, что и числовые результаты, так как и общие, и численное решения представляются одной и той же формулой (17).

Пример 2.

Пусть задано уравнение пятой степени

$$\begin{gathered} Z^5 - p_1 Z^4 + p_{11} Z^3 - p_{111} Z^2 + p_{1111} Z - p_{11111} = \\ = Z^5 - 15Z^4 + 85Z^3 - 225Z^2 + 274Z - 120 = 0 \end{gathered} \qquad (18)$$

Составляем матрицу коэффициентов уравнений образов

υ	p_υ	$p_{\upsilon\upsilon}$	$p_{\upsilon\upsilon\upsilon}$	$p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}$	$p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}$
1	15	85	225	274	120
2	55	1023	7645	12076	14400
4	979	127731	16908529	$224\cdot10^6$	$207\cdot10^6$
8	$463\cdot10^3$	$28{,}7\cdot10^6$	$175\cdot10^{12}$	$43173\cdot10^{12}$	$43\cdot10^{15}$

(19)

Коэффициенты уравнений-образов здесь вычислялись по формулам таблиц [2], [4]

$$\begin{aligned}
&p_2 = p_1^2 - 2p_{11} = 15^2 - 2\cdot 85 = 55\\
&p_{22} = p_{11}^2 - 2p_1 p_{111} + 2p_{1111} = 1023\\
&p_{222} = p_{111}^2 - 2p_{11} p_{1111} + 2p_1 p_{11111} = 7645\\
&p_{2222} = p_{1111}^2 - 2p_{111} p_{11111} = 21076\\
&p_{22222} = p_{11111}^2 = 14400
\end{aligned} \tag{20}$$

для отображения на плоскость второго порядка. Коэффициенты уравнений образов отображений на плоскости четвертого и восьмого порядков строятся по выписанным формулам (20) моментов формально, последовательным удвоением цифр индексов

$$\begin{aligned}
&p_4 = p_2^2 - 2p_{22} = 979\\
&p_{44} = p_{22}^2 - 2p_2 p_{222} + 2p_{2222} = 247731\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&p_8 = p_4^2 - 2p_{44} = 463\cdot 10^3\\
&p_{88} = p_{44}^2 - 2p_4 p_{444} + 2p_{4444} = 28{,}7\cdot 10^9
\end{aligned} \tag{21}$$

а их вычисление (численное) производится каждый раз на основе предыдущих, без перевода кратных моментов в единичные. Выпишем приближения корней

υ	$Z_1(\upsilon)$	$Z_2(\upsilon)$	$Z_3(\upsilon)$	$Z_4(\upsilon)$	$Z_5(\upsilon)$
1	15	5,7	2,6	1,2	0,4
2	7,4	4,3	2,7	1,7	0,8
4	5,5	3,99	2,87	1,9	0,98
8	5,1	3,97	2,97	1,99	0,999
∞	5	4	3	2	1

(22)

вычисленные по формулам (9,10, 11) предельного решения.

Полученные результаты еще раз подтверждают правомерность предельного разделения образов заданного уравнения на элементарные подуравнения. Правомерность выводов относительно распределения модулей корней уравнений-образов. Наконец, правомерность использования предельного разделения уравнения в дальнейшем.

Пример 3.

Рассмотрим еще один пример уравнения второй степени

$$Z^2 - 4Z + 5 = 0 \tag{23}$$

Воспользовавшись таблицей связи коэффициентов выпишем и вычислим моменты уравнений образов для первых шести степеней функции отображения (2)

υ	1	2	3	4	5	6
d_υ	4	6	14	-14	-76	-234
$d_{\upsilon\upsilon}$	5	25	125	625	3125	15625

(24)

Исходя из предположения того, что корни уравнения (23) действительны и различны по модулю, разделяем уравнение образа отображения на плоскости υ-того порядка

$$Z_\upsilon^2 - d_\upsilon Z_\upsilon + d_{\upsilon\vartheta} = 0 \tag{25}$$

на два линейных подуравнения

$$\begin{aligned} Z_{\upsilon 1} - d_\upsilon &= 0 \\ d_\upsilon Z_{\upsilon 2} - d_{\upsilon\upsilon} &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

каждое из которых, определяет свой образ корня заданного уравнения.

Воспользовавшись подсчитанными значениями моментов (24), вычисляем приближения корней заданного уравнения

υ	1	2	3	4	5	6
$Z_1(\upsilon)=\sqrt[\upsilon]{d_\upsilon}$	4	2,4	1,6	1,9i	-2,4	2,5i
$Z_2(\upsilon)=\sqrt[\upsilon]{\dfrac{d_{\upsilon\upsilon}}{d_\upsilon}}$	1,25	2,4	2,8	2,6i	-2,1i	2,0i

Видно, что предельных тенденций у приближений ни одного из корней нет, хотя бы потому, что приближения разнохарактерны — действительные и комплексные (i) числа. Т.е. исходное предположение о действительности и неодинаковости корней заданного уравнения неверно. Неправомерно, следовательно, и разбиение заданного уравнения на линейные подуравнения. Корни Z_1 и Z_2 уравнения можно рассматривать только в уравнении второй степени. Все дело в том, что корни заданного уравнения (23) имеют равные модули (кратные, противоположные или комплексно сопряженные).

В случае, когда корни кратны, что устанавливается через анализ фигуры образующей уравнение функции, корни находим, решая систему, состоящую из заданного уравнения и его производной.

Если корни противоположны, то для применения предельного метода решения, многоугольник корней достаточно сместить на некоторую долю первого коэффициента.

Для комплексно сопряженных корней, ниже предлагается решение через контруравнение (уравнение визави заданному).

Можно ли было обнаружить «дефект» корней заданного уравнения (23) до вычисления его приближений (27), из анализа моментов отображений (24)? Да. Повтор модуля момента первого порядка (d_υ) при отображении на плоскости третьего и четвертого порядков, а также беспорядочная смена знаков моментов на плоскостях 4, 5, 6-го порядков являются достаточными основаниями для прекращения вычислений через линейные подуравнения.

Пример 4.

Уравнение пятой степени

$$Z^5 - 12Z^4 + 69Z^3 - 88Z^2 - 70Z + 100 = 0 \qquad (28)$$

имеет матрицу моментов отображений

υ	p_υ	$p_{\upsilon\upsilon}$	$p_{\upsilon\upsilon\upsilon}$	$p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}$	$p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}$
1	12	69	88	-70	-100
2	6	2509	15004	$22{,}5 \cdot 10^3$	10^4
4	-4982	$6{,}16 \cdot 10^6$	$1{,}12335 \cdot 10^8$	$2{,}01617 \cdot 10^8$	10^8
8	$12{,}41 \cdot 10^6$	$39{,}06 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^{16}$	$2 \cdot 10^{16}$	10^{16}

из рассмотрения которой, обращаем внимание на несоизмеримые порядки моментов отображений на плоскости четвертого $(\upsilon = 4)$ и восьмого $(\upsilon = 8)$ порядков.

Помимо этого в матрице (29) усматриваются две аномалии.

Во-первых, имеет место смена знаков у первого момента p_υ при различных отображениях. Это признак парности корней Z_1, Z_2 уравнения. Парность может выразиться в комплексной сопряженности, кратности или противоположности корней.

Во-вторых, имеет место смена знаков у четвертого и пятого моментов уравнения при переходе к образам высших порядков, что также говорит о парности корней Z_4, Z_5.

Но долю третьего корня (Z_3) уравнения остается только действительность.

Таким образом следует предположить, что наиболее вероятным является разделение заданного уравнения (28) на три подуравнения

$$\begin{aligned} &Z_\upsilon^2 - p_\upsilon Z_\upsilon + p_{\upsilon\upsilon} = 0 \\ &p_{\upsilon\upsilon} Z_\upsilon - p_{\upsilon\upsilon\upsilon} = 0 \\ &p_{\upsilon\upsilon\upsilon} Z_\upsilon^2 - p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} Z_\upsilon + p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} = 0 \end{aligned} \qquad (30)$$

Корни уравнения действительно соответственно равны

$$
\begin{aligned}
&Z_{1,2}=5\pm i5;\\
&Z_3=2;\\
&Z_{4,5}=1;1
\end{aligned}
\qquad (31)
$$

Пример 5.

Задано уравнение

$$Z^5-(-1{,}2)Z^4+(-15{,}79)Z^3-(-12{,}61)Z^2+(-14{,}17)Z-(-15{,}15)=0$$

(32)

Матрица моментов уравнений образов

υ	p_υ	$p_{\upsilon\upsilon}$	$p_{\upsilon\upsilon\upsilon}$	$p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}$	$p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}$
1	-1,2	-15,9	-12,61	-14,17	-15,15
2	33,02	191	-252	-181	230
4	709	52661	147873	148600	52680
8	$397\cdot10^3$	$210\cdot10^6$	$6317\cdot10^6$	$6394\cdot10^6$	$2767\cdot10^6$

(33)

по всей видимости, благополучна для вычисления двух старших корней (Z_1 и Z_2). Однако, имеет место мнимость корней Z_3 и Z_5 во втором отображении, а корень Z_4 вычисляется как действительный, чем нарушается закономерность распределения корней по модулю. Очевидно, следует рассматривать три младших корня в одном подуравнении третьей степени.

Итак, разделяем заданное уравнение предварительно на подуравнения

$$
\begin{aligned}
&Z_\upsilon-p_\upsilon Z_\upsilon=0\\
&p_\upsilon Z_\upsilon-p_{\upsilon\upsilon}=0\\
&p_{\upsilon\upsilon}Z_\upsilon^3-p_{\upsilon\upsilon\upsilon}Z_\upsilon^2+p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}Z_\upsilon-p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}=0
\end{aligned}
\qquad (34)
$$

имея в виду, что мотивации для окончательных выводов еще не исчерпаны.

Здесь следует, однако, иметь в виду, что для полученных линейных подуравнений (34), в связи с тем, что моменты их образов (33) уже известны, наиболее простым путем получения окончательного вывода о разделении на подуравнения, может оказаться простое вычисление приближений корней. В случае же, если предварительное разделение выявило подуравнения второй и третьей степеней, предпочтительнее произвести второй этап исследований с целью выстраивания перспективы дальнейших действий.

Покажем, что подуравнения второй и третьей степеней, при достаточно высокой степени (υ) функции отображения могут рассматриваться не как подуравнения, а как уравнения второй и третьей степеней. То есть можно перейти в рассматриваемом примере от более сложных моментов p_υ или к более простым моментам d_υ или m_υ, что позволит упростить последующие выкладки и конечные формулы.

Действительно, пусть из уравнения пятой степени в υ-м отображении выделено подуравнение второй степени

$$Z_\upsilon^2 - p_\upsilon Z_\upsilon + p_{\upsilon\upsilon} = 0 \tag{35}$$

На той же плоскости υ-го порядка рассмотрим уравнение второй степени

$$Z_\upsilon^2 - d_\upsilon Z_\upsilon + d_{\upsilon\upsilon} = 0 \tag{36}$$

корни которого $Z_{\upsilon 1}$ и $Z_{\upsilon 2}$ совпадают с соответствующими корнями заданного уравнения (32) пятой степени (и, естественно, с корнями выделенного подуравнения (35).

Возьмем отношение и раскроем первые моменты подуравнения (35) и уравнения (36)

$$\frac{p_\upsilon}{d_\upsilon}=\frac{Z_{\upsilon1}+Z_{\upsilon2}+Z_{\upsilon3}+Z_{\upsilon4}+Z_{\upsilon5}}{Z_{\upsilon1}+Z_{\upsilon2}}<$$
$$<1+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{Z_3}{Z_2}\right)^\upsilon+\left(\frac{Z_4}{Z_2}\right)^\upsilon+\left(\frac{Z_5}{Z_2}\right)^\upsilon\right] \tag{37}$$

откуда видно, что в соответствии с основным законом распределения корней, всегда может быть выбрано такое значение степени (υ) функции отображения, что остаточный трехчлен отношения может быть принят равным нулю. И, соответственно, получено равенство

$$p_\upsilon=d_\upsilon \tag{38}$$

т.к. из сравнения (37) одновременно следует $p_\upsilon>d_\upsilon$ и $p_\upsilon<d_\upsilon$.

Точно так же, в случае, когда подуравнение выделено в стороне меньших корней

$$p_{\upsilon\upsilon\upsilon}Z_\upsilon^2-p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}Z_\upsilon+p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}=0 \tag{39}$$

беря отношение свободных моментов подуравнения (39) и уравнения (36)

$$\frac{p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}}{d_{\upsilon\upsilon\upsilon}p_{\upsilon\upsilon}}=\frac{Z_{\upsilon1}+Z_{\upsilon2}+Z_{\upsilon3}+Z_{\upsilon4}+Z_{\upsilon5}}{\left(Z_{\upsilon1}Z_{\upsilon2}Z_{\upsilon3}+\ldots\right)_{10}\cdot Z_{\upsilon4}Z_{\upsilon5}}=1 \tag{40}$$

видно, что при достаточно высоких значениях степени (υ) функции отображения, оно (отношение) мажорируется конечной последовательностью, сходящейся к единице.

Аналогично может быть показана эквивалентность подуравнений и уравнений третьей степени при опредлённом, достаточно большом значении порядка функции отображения.

Возможность перехода от моментов высокого порядка к моментам более низкого порядка особенно важна: на этапах повторного естественного разделения уравнений; при проведении графического анализа подуравнений; при повторном применении методов предельного решения уравнений.

Из анализа распределения модулей корней (уравнения в относительной форме) по числовой сфере, известно, что с ростом порядка функции отображения корень равный единице (полагаем ,что он есть) «стоит на месте». Модули корней большие единицы, не обгоняя друг друга, устремляются в сторону северного полюса. Модули корней меньшие единицы, не обгоняя друг друга, перемещаются в сторону южного полюса. Оказывается при этом, также, что *модули коэффициентов уравнения с ростом своего порядка, начиная с первого, и при достаточно большом значении порядка функции отображения, сначала возрастают, а потом убывают. Причём, изменение характера зависимости наступает над корнем равным единице.*

Раскрытое свойство коэффициентов уравнения, очевидно «предопределено основной закономерностью распределения модулей корней».

Убедимся в справедливости высказанного утверждения на примере уравнения третьей степени (в относительной форме) с действительными корнями æ_1, æ_2, æ_3 и коэффициентами α_1 α_{11} и α_{111}. Берем отношение модулей коэффициентов и раскрываем его через модули корней уравнения, отображенного на плоскость υ-того порядка

$$\frac{\alpha_\upsilon}{\alpha_{\upsilon\upsilon}} = \frac{\text{æ}_1^\upsilon + \text{æ}_2^\upsilon + \text{æ}_3^\upsilon}{\text{æ}_1^\upsilon \text{æ}_2^\upsilon + \text{æ}_1^\upsilon \text{æ}_3^\upsilon + \text{æ}_2^\upsilon \text{æ}_3^\upsilon} = \tag{41}$$

Исходя из предположения, что корень æ_3 по модулю меньше единицы, упрощаем построенное отношение, имея в виду, что степень (υ) функции отображения достаточно высока

$$= \frac{\text{æ}_1^\upsilon + \text{æ}_2^\upsilon}{\text{æ}_1^\upsilon \text{æ}_2^\upsilon} = \frac{1}{\text{æ}_1^\upsilon} + \frac{1}{\text{æ}_2^\upsilon} < 1 \tag{42}$$

Здесь, при выводе неравенства, учтено, что корни æ_1 и æ_2 по модулю больше единицы. Из полученного неравенства следует, что первый коэффициент уравнения-образа меньше второго коэффициента.

Взяв отношение коэффициентов последней пары

$$\frac{\alpha_{\upsilon\upsilon}}{\alpha_{\upsilon\upsilon\upsilon}}=\frac{æ_1^{\upsilon}æ_2^{\upsilon}+æ_1^{\upsilon}æ_3^{\upsilon}+æ_2^{\upsilon}æ_3^{\upsilon}}{æ_1^{\upsilon}æ_2^{\upsilon}æ_3^{\upsilon}}=\frac{1}{æ_3^{\upsilon}}>1 \qquad (43)$$

найдем, что второй коэффициент больше третьего. Совмещая теперь полученные неравенства, получим выражение

$$\alpha_{\upsilon}<\alpha_{\upsilon\upsilon}>\alpha_{\upsilon\upsilon\upsilon} \qquad (44)$$

подтверждающее справедливость высказанного утверждения.

Откладывая по оси абсцисс число, соответствующее порядку величины коэффициента, а по ординате его модуль, получим наглядный график, определяющий коэффициент уравнения, на котором происходит, т.н. естественное разделение образа уравнения на подуравнения с корнями, соответственно, больше и меньше единицы.

Естественное разделение целесообразно применять при расщеплении уравнений больших степеней. Многократное применение метода позволяет произвести разделение заданного уравнения на элементарные подуравнения.

Пример 6.

Рассмотрим естественное разделение применительно к уравнению пятой степени из примера 2

$$R=\sqrt[5]{Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5}=\sqrt[5]{5!}=2{,}606 \qquad (45)$$

Для отображения корней (22) на сферу с единичным экватором все их следует поделить на найденное среднее геометрическое (45)

υ	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
1	5,8	2,2	0,99	0,5	0,2
2	2,8	1,7	1,0	0,7	0,3
4	2,1	1,5	1,13	0,7	0,4
8	1,96	1,5	1,16	0,8	0,4
∞	1,9	1,5	1,16	0,8	0,4

(46)

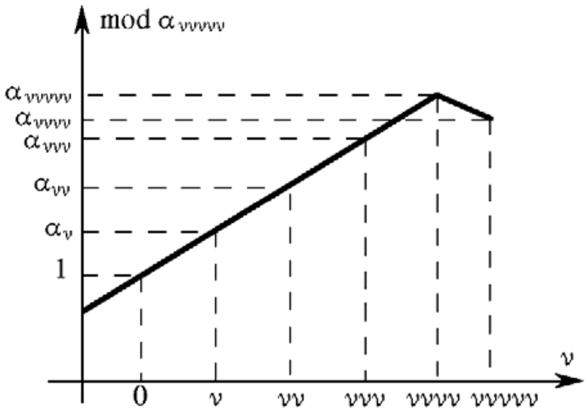


Рис. 10. *График распределения модулей коэффициентов уравнения с действительными, различными корнями*

Видно, прежде всего, что естественное разделение заданного уравнения (18) происходит между третьим и четвертым корнями. Эту же границу разделения можно усмотреть и из распределения коэффициентов (19) уравнения-образа. Убывающим по модулю приближениям корней Z_1, Z_2, Z_3 соответствует возрастающая последовательность моментов p_{υ}, $p_{\upsilon\upsilon}$, $p_{\upsilon\upsilon\upsilon}$, а возрастающим последовательностям приближений корней Z_4 и Z_5 южного полушария соответствует убывающая последовательность моментов $p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}$, $p_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}$. Причем, картина соответствия становится все более очевидной с ростом порядка (υ) отображающей функции (2).

3.3.3. Разделение уравнений через анализ образующей функции

Предельное разделение уравнений на подуравнения основано на выявленной «основной закономерности распределения модулей корней».

Естественное разделение уравнений основано тоже на объективной закономерности распределения корней, но теперь уже относительно их среднего геометрического.

Графический анализ функции и образуемого ею уравнения является численным, экспериментальным и соответственно надежным. Но он значительно более доверителен, так как дополняется визуальным восприятием анализируемого материала. Разделение и само решение уравнения происходит «в светлую».

Принципы графического анализа уже были нами рассмотрены. Это построение пространственного, линейчатого графика образующей функции в своем собственном пространстве и определение мест проколов плоскости аргумента линиями фигуры. Методика построения рисунков линейчатых пространственных фигур исследуемых нами действительных алгебраических функций разработана в статье автора «Анализ и синтез функций математических моделей физических устройств и процессов».

Продолжим исследование в свое время не законченных примеров.

Пример 7.

Продолжение примера 4 в части анализа полученных подуравнений (30).

Подуравнение (30.1) для старших (Z_1 и Z_2) корней, выделенное на плоскости восьмого порядка, считаем, определяет корни заданного уравнения (28) достаточно точно для того, чтобы перейти от коэффициентов p к коэффициентам d. Т.е. отождествляем заданное подуравнение (30.1) с уравнением второй степени

$$A_2(Z_\upsilon)=Z_\upsilon^2-d_\upsilon Z_\upsilon+d_{\upsilon\upsilon}=Z_\upsilon^2-2a_1 Z_\upsilon+a_2=0 \qquad (47)$$

где моменты при $\upsilon=8$ равны (29)

$$2a_1=d_8=p_8=12{,}41\cdot 10^6$$
$$a_2=d_{88}=p_{88}=39{,}06\cdot 10^{12}$$

В рассматриваемой задаче, нас интересует только выяснение характера корней уравнения (30). Для ответа на поставленный вопрос достаточно определить координаты точки вершины парабол и нанести ее на координатную сетку. Абсцисса вершин парабол фигуры функции образующей заданное уравнение (30) равна его первому коэффициенту

$$a_1 = 6{,}205 \cdot 10^6$$

ордината, как это было ранее показано, равна инварианту второго порядка

$$a_{02} = -a_1^2 + a_2 = +\,0{,}557975$$

Наносим точки вершин на координатную сетку пространства функции образующей заданное (30) уравнение (рис. 11). Для наглядности наносим также ветви парабол фигуры функции. Корни (Z_1, Z_2) анализируемого подуравнения (30.1) однозначно вырисовываются как комплексно сопряженные.

Второе из подуравнений (30.2) уравнения (28) пятой степени не нуждается в поясняющих графических построениях, так как по сокращении постоянных имеет вид

$$Z_\upsilon^2 - 2Z_\upsilon + 1 = (Z_\upsilon - 1)^2 \qquad (48)$$

и, соответственно, двукратный корень $Z_{1,2} = 1$. Вершина парабол образующей функции уравнения лежит на действительной оси плоскости аргумента, касаясь точки корня $Z_{1,2} = 1$.

Пример 8.

Подвергнем графическому анализу подуравнение (34) третей степени уравнения (32), примера 5.

Подуравнение (34) выделено в результате отображения заданного уравнения на плоскость восьмого порядка и рассматривается как заданное уравнение третьей степени

$$\begin{aligned} A_3(Z_\upsilon) &= Z_\upsilon^3 - m_\upsilon Z_\upsilon^2 + m_{\upsilon\upsilon} Z_\upsilon - m_{\upsilon\upsilon\upsilon} = \\ &= Z_\upsilon^3 - 3a_1 Z_\upsilon^2 + 3a_2 Z_\upsilon - a_3 = 0 \end{aligned} \tag{49}$$

где моменты на плоскости восьмого порядка соответственно равны (33)

$$\begin{aligned} 3a_1 &= m_8 = \frac{p_{888}}{p_{88}} = \frac{6317}{210} \\ 3a_2 &= m_{88} = \frac{p_{8888}}{p_{88}} = \frac{6394}{210} \\ a_3 &= m_{888} = \frac{p_{88888}}{p_{88}} = \frac{2767}{210} \end{aligned} \tag{50}$$

Для построения фигуры вновь заданной функции (35) вычисляем координаты трех ее точек — точки экстремумов и перегиба.

Абсциссы экстремумов определяем как корни производной заданного уравнения

$$Z^2 - 20Z + 10 = (Z - 19{,}5)(Z - 0{,}5) = 0 \tag{51}$$

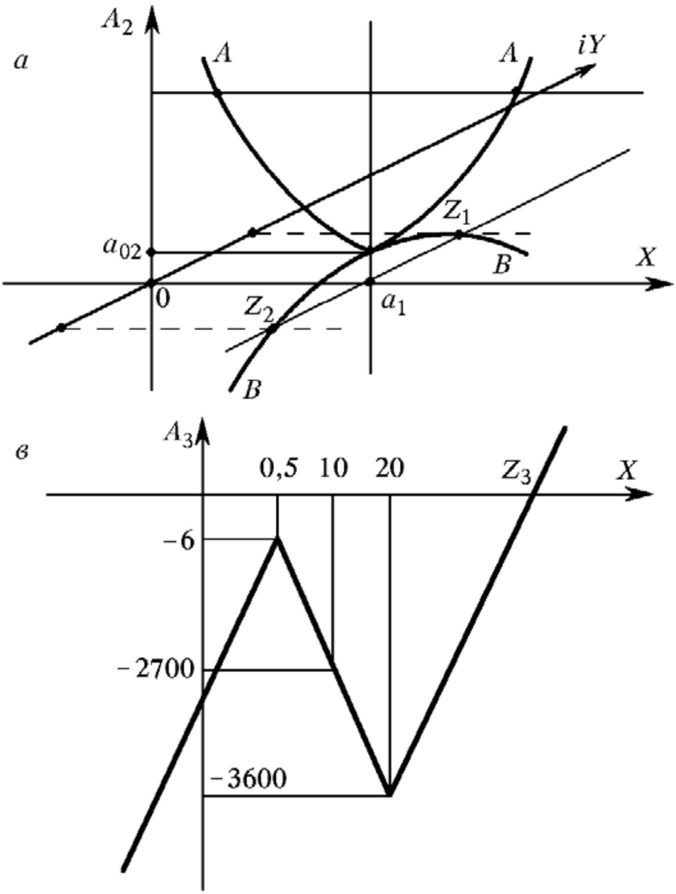


Рис. 11. *Графики подуравнений уравнения 28 и 32 (34)*
a) подуравнение старших корней уравнения 28
b) подуравнение младших корней уравнения 32

Абсцисса точки перегиба — это первый коэффициент заданного уравнения (30)

$$Z_2 = 10 \tag{52}$$

Ординаты точек экстремумов и перегиба соответственно получаются равными

$$
\begin{aligned}
&A_{31}(Z=0{,}5)=-6\\
&A_{33}(Z=19{,}5)=-3600\\
&A_{32}(Z=10)=-2700
\end{aligned}
\qquad (53)
$$

Наносим найденные точки на координатную сетку пространства (рис. 11*b*) и соединяем их прямыми соответствующими ходу линий функции третьего порядка. Из построения следует, воочио, распределение корней подуравнения (34.3) уравнения пятой степени (32). Два младших по модулю корня подуравнения (34.3) и уравнения (32) комплексно сопряжены, а третий действителен.

4. Общее предельное решение алгебраических уравнений

4.1. Определение и назначение общего решения

Под общим, в математике понимается решение (формула) выраженное через коэффициенты и пригодное для вычисления корней любого из уравнений заданной степени.

Общее предельное решение тоже выражает корни через коэффициенты, но только одного уравнения заданной степени. Предельное решение индивидуально, так как предопределено заданной точностью.

Общее предельное решение алгебраических уравнений представляет собой последовательность приближенных общих решений заданного уравнения, где каждое следующее приближение отличается все большей и большей точностью, вплоть до предельного, истинного значения.

Решение находится для нечетного действительного и пар сопряженных (действительных и комплексных) корней уравнений любой степени.

Решения пригодны как для численного вычисления, так и исследования корней в зависимости от физических параметров описываемого уравнением устройства или процесса.

Основу решения составляет последовательность нелинейных отображений уравнения на плоскости все более высоких порядков, расчленение образов на элементарные уравнения первого и второго порядков; решение уравнений-образов в своем пространстве; перенос решений на плоскость уравнения-оригинала.

Точность решения выбирается и, как мы знаем, может быть сколь угодно высока. Однако, с повышением точности, решения, не изменяя своей структуры (формы), становятся более громоздкими. В связи с чем, пользуясь возможностью, следует облегчать решение и ограничивать точность ~10%-ной ошибкой при решении вопросов общих тенденций и закономерностей. При проверке на функционирование, на стадии эскизного проектирования ошибка не должна превышать единиц процентов. При вычислении номиналов комплектующих — долей процентов.

Знание закономерностей распределения корней при отображении, владение методом предельного и естественного разделения заданного уравнения, наконец, владение методами графического анализа функций позволяют произвести обоснованное разделение уравнения на элементарные подуравнения первой и второй степени. Очередной задачей становится вывод общих удобоваримых формул решения этих подуравнений. Подуравнений и уравнений первой и второй степени с действительными и комплексными корнями.

4.2. Решение уравнений второй степени с действительными корнями

Если известно, что уравнение

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = Z^2 - 2a_1 Z + a_2 = 0 \qquad (1)$$

имеет своими корнями действительные числа, то при стандартном отображении

$$Z_\upsilon = Z^\upsilon \qquad (2)$$

на плоскость υ-го порядка, где оно естественно разделяется на два подуравнения

$$\begin{aligned} &Z_\upsilon - d_\upsilon = 0 \\ &d_\upsilon Z^\upsilon - d_{\upsilon\upsilon} = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

могут быть вычислены υ-е степени его корней

$$\begin{aligned} &Z_1^\upsilon = d_\upsilon \\ &Z_2^\upsilon = \frac{d_{\upsilon\upsilon}}{d_\upsilon} \end{aligned} \qquad (4)$$

Нас, однако, интересует решение заданного (1) уравнения на плоскости первого порядка.

Корни, в общем случае, структурно, могут быть представлены в форме

$$Z_{1,2} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} \pm \frac{Z_1 - Z_2}{2} \tag{5}$$

основания и знакопеременного дополнения. Основанием, в приведенной форме (5) решения является первый коэффициент (a_1) или половина первого момента (d_1), заданного уравнения (1). Дополнением является несимметричный момент, представляющий собой инвариант или дискриминант уравнения (1).

Вычисляем дополнение решения (5) приближенно, через υ-е степени корней, для чего представим его в виде произведения с единичным сомножителем

$$\frac{Z_1 - Z_2}{2} = \frac{Z_1 - Z_2}{2} \cdot \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{Z_1^2 + Z_2^2} \cdot \frac{Z_1^4 + Z_2^4}{Z_1^4 + Z_2^4} \cdot \frac{Z_1^8 + Z_2^8}{Z_1^8 + Z_2^8} \cdots \frac{Z_1^{\frac{\upsilon}{2}} + Z_2^{\frac{\upsilon}{2}}}{Z_1^{\frac{\upsilon}{2}} + Z_2^{\frac{\upsilon}{2}}} = \tag{6}$$

Роль единичного сомножителя в построенном выражении выполняют отношения кратных моментов $(d_1, d_2, d_4, d_8, \ldots)$ к себе. Причем используются моменты порядков только кратных степени двойки. Построенное выражение (6), с использованием известного свойства квадратичных форм, может быть упрощено и представлено в виде

$$= \frac{Z_1^{\upsilon} - Z_2^{\upsilon}}{2 d_1 d_2 d_4 \ldots d_{\frac{\upsilon}{2}}} = \tag{7}$$

и далее, с учетом приближенных решений (4) уравнения образа, в форме

$$=\frac{d_{\upsilon}^{2}-d_{\upsilon\upsilon}}{2d_{1}d_{2}d_{4}...d_{\upsilon}} \qquad (8)$$

(Обращаем внимание. Нами получено выражение дискриминанта уравнения второй степени через моменты.)

На основе полученных результатов (7), (8) может быть построено и общее (в υ-м приближении, предельное) решение (5) уравнения (1) второй степени с действительными корнями

$$Z_{1,2}=\frac{d_1}{2}\pm\frac{d_{\upsilon}^{2}-d_{\upsilon\upsilon}}{2d_{1}d_{2}d_{4}...d_{\upsilon}} \qquad (9)$$

Пример 9.

Составляем уравнение второй степени с корнями $Z_1=3$, $Z_2=2$

$$Z^2-d_1Z+d_{11}=Z^2-5Z+6=0 \qquad (10)$$

Вычисляем и сводим в таблицу моменты образов заданного уравнения (10)

υ	1	2	4	8	16
$d_{\upsilon}=d_{\frac{\upsilon}{2}}^{2}-2d_{\frac{\upsilon}{2}}d_{\frac{\upsilon}{2}}$	5	13	97	6817	43112257
$d_{\upsilon\upsilon}=d_{11}^{\upsilon}$	6	36	1296	1679616	$2821110\cdot10^6$

(11)

Вычисляем и сводим в таблицу приближения корней (по формуле (9)

υ	1	2	4	8	16
$Z_1(\upsilon)$	4,4	3,5	3,1	3,02	3,000000
$Z_2(\upsilon)$	0,6	1,5	1,9	1,99	2,000000

(12)

где соответственно

$$Z_{1,2}(1)=\frac{d_1}{2}\pm\frac{d_1^2-d_{11}}{2d_1}=\frac{5}{2}\pm\frac{5^2-6}{2\cdot 5}=4{,}4;\ 0{,}6,$$

$$Z_{1,2}(2)=\frac{d_1}{2}\pm\frac{d_2^2-d_{22}}{2d_1d_2}=\frac{5}{2}\pm\frac{13^2-36}{2\cdot 5\cdot 13}=3{,}5;\ 1{,}5,$$

$$Z_{1,2}(4)=\frac{d_1}{2}\pm\frac{d_4^2-d_{44}}{2d_1d_2d_4}=\frac{5}{2}\pm\frac{97^2-1296}{2\cdot 5\cdot 13\cdot 97}=3{,}1;\ 1{,}9,$$

$$Z_{1,2}(8)=\frac{d_1}{2}\pm\frac{d_8^2-d_{88}}{2d_1d_2d_4d_8}=\frac{5}{2}\pm\frac{6817^2-1679616}{2\cdot 5\cdot 13\cdot 97\cdot 6817}=3{,}02;\ 1{,}99$$

$$Z_{1,2}(16)=\frac{d_1}{2}\pm\frac{d_{16}^2-d_{1616}}{2d_1d_2d_4d_8d_{16}}=2{,}5\pm 0{,}500000=3;\ 2$$

4.3. Решение уравнений второй степени с комплексными корнями

Пусть задано уравнение второй степени

$$A_2(Z)=Z^2-2a_1Z+a_2=0 \tag{14}$$

и известно, что его корни комплексны.

В соответствии с рисунком (рис. 2) фигуры образующей функции, второй инвариант уравнения в этом случае

$$a_{02}=A_2(a_1)=a_{02}=-a_1^2+a_2 \tag{15}$$

положителен. Сечение фигуры осуществлено плоскостью аргумента, где образующая функция (A_2) равна нулю (14). Корни уравнения равны

$$Z_{1,2} = a_1 \pm i\sqrt{a_{02}} \qquad (16)$$

Рассмотрим другое сечение фигуры образующей функции. Сечение расположенное на уровне $\left(2a_{02}\right)$

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1 Z + a_2 = 2a_{02} \qquad (17)$$

Диполь образованного в сечении уравнения

$$Z^2 - 2a_1 Z + \left(2a_1^2 - a_2\right) = Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \qquad (18)$$

структурно (5) должен совпадать с диполем заданного уравнения (14), так как ветви фигуры образующей функции конструктивно одинаковы, совпадают при совмещении. *Построенное в симметричном относительно центра фигуры сечении уравнение будем называть контрурвнением по отношению к заданному*. Вычисляем корни контруравнения (18)

$$Z_{1,2} = a_1 \pm \sqrt{a_{02}} \qquad (19)$$

и убеждаемся в том, что действительно, корни уравнений (16), (19) отличаются всего лишь множителем (мнимой единицей) около дополнения. То есть, как это и следует из рассмотрения фигуры образующей функции, совершен переход от уравнения с комплексными корнями к уравнению с действительными корнями с той же величиной диполя.

Решение уравнения (1) с действительными корнями известно (9). Решение уравнения (14) с комплексными корнями получим, введя множитель (мнимую единицу) к дополнению корней известного решения (9)

$$Z_{1,2} = \frac{d_1}{2} \pm i\,\frac{d_\upsilon^2 - d_{\upsilon\upsilon}}{2d_1 d_2 d_4 \ldots d_\upsilon} \qquad (20)$$

Следует только учитывать, что при решении уравнения с действительными корнями связь моментов с коэффициентами одна (1)

$$\begin{aligned} d_1 &= 2a_1 \\ d_{11} &= a_2 \end{aligned} \tag{21}$$

а при решении уравнений с комплексными корнями — другая (18)

$$\begin{aligned} d_1 &= 2a_1 \\ d_{11} &= 2a_1^2 - a_2 \end{aligned} \tag{22}$$

Пример 10.

Составим уравнение с корнями

$$\begin{aligned} & Z_{1,2} = -0{,}2 \pm i \\ & Z^2 - (-0{,}4)Z + 1{,}04 = Z^2 - 2a_1 Z + a_2 = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Вычисляем единичные моменты (22) его контруравнения с действительными корнями

$$\begin{aligned} & d_1 = 2a_1 = -0{,}4 \\ & d_{11} = 2a_1^2 - a_2 = 2(-0{,}2)^2 - 1{,}04 = -0{,}96 \end{aligned} \tag{24}$$

Вычисляем моменты отображений контруравнения

$$\begin{aligned} d_\upsilon &= d_{\frac{\upsilon}{2}}^2 - 2d_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}} \\ d_{\upsilon\upsilon} &= d_{11}^{\upsilon} \end{aligned} \tag{25}$$

и сводим их в таблицу

υ	1	2	4	8	16	32
d_υ	-0,4	2,08	2,486	4,488	18,7	349
$d_{\upsilon\upsilon}$	-0,96	0,92	0,849	0,72	0,52	0,27

(26)

Вычисляем действительные корни контруравнения

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = Z^2 - (-0,4)Z + (-0,96) = 0 \tag{27}$$

точно

$$Z_{1,2} = -0,2 \pm \sqrt{0,2^2 + 0,96} = -0,2 \pm 1 \tag{28}$$

и в предельных приближениях (9)

$$Z_{1,2} = \frac{d_1}{2} \pm \frac{d_\upsilon^2 - d_{\upsilon\upsilon}}{2d_1 d_2 ... d_\upsilon} \tag{29}$$

υ	1	2	4	8	16
$Z_{1,2}$	–	–	-0,2±1,12	-0,2±1,05	-0,2±1,005

(30)

Умножаем дополнение полученного значения действительного корня (30) на мнимую единицу и получаем корни заданного уравнения (23)

$$Z_{1,2} = \frac{d_1}{2} \pm i \frac{d_\upsilon^2 - d_{\upsilon\upsilon}}{2d_1 d_2 d_4 ... d_\upsilon} = -0,2 \pm i \tag{31}$$

4.4. Решение подуравнений второй степени с действительными корнями

Построенное в предыдущем параграфе общее предельное решение уравнений второй степени в чисто алгебраической форме, без радикала, более привлекательно, потому что более просто для анализа. Возникает желание распространить, хотя бы частично, эту форму решениями на подуравнения. Сложность в том, что если моменты уравнения нам известны (вычисляемы), начиная с плоскости первого порядка и выше, то моменты подуравнения, например, уравнения пятой степени

$$Z_\upsilon^2 - p_\upsilon Z_\upsilon + p_{\upsilon\upsilon} = 0 \tag{32}$$

известны (вычисляемы), начиная с плоскости υ-го порядка и выше, так как до сих пор они были моментами уравнения пятой степени, и всего лишь моментами уравнений, неприемлемых по точности приближений. До этого точность вычисляемых корней была мала и подуравнение (32) не приравнивалось к уравнению (32). То есть только на плоскости υ-го порядка мы, наконец, отождествили подуравнение (32) с уравнением (32), которое предстоит решать последовательными отображениями до плоскости более высокого порядка, начиная с υ-той.

Применяя к заданному уравнению (32) метод, изложенный в подразделе 4.2 работы, решение (9) можно записать сразу

$$Z_{1,2}(\mu) = \frac{d_\upsilon}{2} \pm \frac{(d_\upsilon)_\mu^2 - (d_{\upsilon\upsilon})_{\mu\mu}}{2(d_\upsilon)_1 (d_\upsilon)_2 (d_\upsilon)_4 \ldots (d_\upsilon)_\mu} \tag{33}$$

Отметим еще раз, что построенное решение — это решение на плоскости υ-го порядка там, где оно задано (32) и теперь его предстоит «опустить» на плоскость первого порядка. Во-вторых, в соответствии с выводами, полученными в предыдущем разделе работы (35), (39), в решении (33) применены моменты d (уравнения второй степени), а не p (уравнения пятой степени), что позволяет упростить последующие выкладки и вычисления. В- третьих, перепишем полученные решения (33) в окончательной форме

$$Z_{1,2}(\mu\upsilon) = \sqrt[\upsilon]{\frac{d_\upsilon}{2} \pm \frac{(d_\upsilon)_\mu^2 - (d_{\upsilon\upsilon})_{\mu\mu}}{2(d_\upsilon)_1 (d_\upsilon)_2 (d_\upsilon)_4 \ldots (d_\upsilon)_\mu}} \tag{34}$$

и раскроем скрытый в нём алгоритм:

-отображением на плоскость υ-го порядка, заданное уравнение пятой степени разделено, получено подуравнение второй степени, которое рассматривается теперь как самостоятельно заданное

уравнение второй степени (32);
-последующим отображением на плоскость $\mu\upsilon$-го порядка, уравнение второй степени решено в алгебраической форме, получено общее предельное решение на υ-й плоскости в μ-м приближении (33);
-извлечением корня υ-й степени решение построенного уравнения второй степени отображено на плоскость первого (заданного) порядка, т.е. найдены два действительных корня заданного уравнения пятой степени (34).

Пример 11.

На основе уравнений примеров 8, 9 строим уравнение четвертой степени с корнями

$$Z_1 = 3\,,\ Z_2 = 2\,,\ Z_{3,4} = -0{,}2 \pm i$$

$$\begin{aligned} &A_4(Z) = \left(Z^2 - 5Z + 6\right)\left(Z^2 + 0{,}4Z + 1{,}04\right) = \\ &= Z^4 - 4{,}6Z^3 + 5{,}04Z^2 - 2{,}8Z + 6{,}24 = \\ &= Z^4 - n_1 Z^3 + n_{11} Z^2 - n_{111} Z + n_{1111} \end{aligned} \tag{35}$$

Стандартным отображением, функцией

$$Z_\upsilon = Z^\upsilon \tag{36}$$

строим уравнение-образ на плоскости Z_υ

$$A_{\upsilon 4}(Z_\upsilon) = Z_\upsilon^4 - n_\upsilon Z_\upsilon^3 + n_{\upsilon\upsilon} Z_\upsilon^2 - n_{\upsilon\upsilon\upsilon} Z_\upsilon + n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} = 0 \tag{37}$$

и разделяем его на два подуравнения

$$Z_\upsilon^2 - n_\upsilon Z_\upsilon + n_{\upsilon\upsilon} = 0 \tag{38}$$

$$n_{\upsilon\upsilon} Z_\upsilon^2 - n_{\upsilon\upsilon\upsilon} Z_\upsilon + n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} = 0 \tag{39}$$

На дальнейшее полагаем, что мы не знаем разложения уравнения $A_4(Z)$ (37) на приведенные два сомножителя (35.1), не знаем корней уравнений и ищем их, считая заданным уравнение четвертой степени (35.2) и построенным его подуравнение (38) с действительными корнями.

Вычисляем моменты уравнений-образов заданного оригинала (35) по формулам [1], [2]

$$
\begin{aligned}
n_{\upsilon} &= n^{2}_{\frac{\upsilon}{2}} - 2n_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}} \\
n_{\upsilon\upsilon} &= n^{2}_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}} - 2n_{\frac{\upsilon}{2}} n_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}} + 2n_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}} \\
n_{\upsilon\upsilon\upsilon} &= n^{2}_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}} - 2n_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}} n_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}} \\
n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} &= n^{\upsilon}_{1111} = n^{2}_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}}
\end{aligned}
\qquad (40)
$$

и заносим их в таблицу

υ	n_{υ}	$n_{\upsilon\upsilon}$	$n_{\upsilon\upsilon\upsilon}$	$n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}$
1	4,6	5,04	2,8	6,24
2	11,08	12,12	-55,06	38,94
4	98,5	1445	2088	1516
8	6812	1679523	-23518	2298671
16	43051110	$2821123 \cdot 10^{6}$	$59610582 \cdot 10^{18}$	$27919472 \cdot 10^{18}$
32	$1848 \cdot 10^{12}$	$7585041 \cdot 10^{18}$	$59610582 \cdot 10^{18}$	$27919472 \cdot 10^{18}$

(41)

Однако моменты образа при отображении на плоскость 32-го порядка измеряемых величин посчитаны как моменты уравнения второй степени соответственно с корнями Z_1, Z_2

$$
\begin{aligned}
d_{\upsilon} &= d^{2}_{\frac{\upsilon}{2}} - 2d_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}} \\
d_{\upsilon\upsilon} &= d^{2}_{\frac{\upsilon}{2}\frac{\upsilon}{2}}
\end{aligned}
\qquad (42)
$$

что соответствует ранее приведенным выводам. Но это не означает, что переход от подуравнения к уравнению (38) должен быть совершен строго на предыдущей плоскости величин шестнадцатого порядка. Параметры отображений μ, и υ переменны и произвольны. Потери точности на υ-отображениях компенсируются на переходе μ и наоборот. Без «крайностей» такие «манипуляции» допустимы, а позволяют получить несколько результатов и найти предельную величину в динамике. Ограничением в получении большего количества результатов является только предельная величина степени отображения — $\mu\upsilon$. В рассматриваемом примере (41), произведение $\mu\upsilon \leq 32$, если таблица не будет дополнена моментами новых отображений.

Предположим, что мы удовлетворены точностью разделения заданного (35) уравнения на подуравнения отображением функцией четвертого порядка. То есть выберем для параметра υ значение четыре $(\upsilon = 4)$. Остается, воспользовавшись общей формулой (33), вычислить μ-е приближения корней на плоскости выше четвертого порядка

$$\begin{aligned} & Z_{4,1,2} = \frac{d_1}{2} \pm i \frac{d_{\mu 4}^2 - d_{\mu 4 \mu 4}}{2 d_{1\cdot 4} d_{2\cdot 4} \ldots d_{\mu 4}} \\ & \mu = 1, 2, 4, 8, \ldots, \\ & \upsilon = 4 \end{aligned} \tag{43}$$

а далее и $\mu\upsilon$-е приближения на плоскости первого порядка

$$\begin{aligned} & Z_{1,2}(1 \cdot 4) = Z_{1,2}(4) = \sqrt[4]{\frac{d_4}{2} \pm \frac{d_4^2 - d_{44}}{2 d_4}} = \\ & \mu = 1, \\ & \upsilon = 4 \end{aligned} \tag{44}$$

Последним предположением, выбрав численное значение параметра отображения $(\upsilon = 4)$, мы зафиксировали переход от подуравнения (с моментами n) к уравнению (с моментами d) на плоскости четвертого порядка, т.е. отождествили заготовленные в таблице (41) моменты n с соответствующими моментами d расчетной формулы (44), начиная с индекса 4 и выше, что позволяет получить

$$=\sqrt[4]{\frac{98,5}{2}\pm\frac{98,5^2-1445}{2\cdot 98,5}}=3,09;1,65 \tag{45}$$

Соответственно для следующих приближений имеем (43)

$$\begin{gathered}Z_{1,2}(2\cdot 4)=Z_{1,2}(8)=\sqrt[4]{\frac{d_4}{2}\pm\frac{d_8^2-d_{88}}{2d_4d_8}}=\\ =\sqrt[4]{\frac{98,5}{2}\pm\frac{6812^2-1679523}{2\cdot 98,5\cdot 6812}}=3,01;1,998,\\ \mu=2,\\ \upsilon=4\end{gathered} \tag{46}$$

$$\begin{gathered}Z_{1,2}(4\cdot 4)=Z_{1,2}(16)=\sqrt[4]{\frac{d_4}{2}\pm\frac{d_{16}^2-d_{1616}}{2d_4d_8d_{16}}}=\\ =\sqrt[4]{\frac{98,5}{2}\pm\frac{43051110^2-2821123\cdot 10^6}{2\cdot 98,5\cdot 6812\cdot 43051110}}=3,00;2,04,\\ \mu=4,\\ \upsilon=4\end{gathered} \tag{46}$$

$$\begin{gathered}Z_{1,2}(8\cdot 4)=Z_{1,2}(32)=\sqrt[4]{\frac{d_4}{2}\pm\frac{d_{32}^2-d_{3232}}{2d_4d_8d_{16}d_{32}}}=\\ =3,02;2,04,\\ \mu=8,\\ \upsilon=4\end{gathered} \tag{46}$$

Приближения могут быть посчитаны и для $\upsilon = 8$ $(\mu = 1; 2; 4)$, и для $\upsilon = 16$ $(\mu = 1; 2)$. Так по (34) имеем

$$\begin{aligned}
&Z_{1,2}(4\cdot 8) = Z_{1,2}(32) = \sqrt[8]{\frac{d_8}{2} \pm \frac{d_{32}^2 - d_{3232}}{2d_8 d_{16} d_{32}}} = \\
&= 2{,}9998; 1{,}9993, \\
&\mu = 4, \\
&\upsilon = 8 \\
&Z_{1,2}(2\cdot 16) = Z_{1,2}(32) = \sqrt[16]{\frac{d_{16}}{2} \pm \frac{d_{32}^2 - d_{3232}}{2d_{16} d_{32}}} = \\
&= 2{,}9997; 1{,}9995, \\
&\mu = 2, \\
&\upsilon = 16
\end{aligned} \tag{47}$$

Приближения для краевых значений $\upsilon = 2?$; $\upsilon = 32?$, естественно, дают «завалы» результатов.

4.5. Решение подуравнений второй степени с комплексными корнями

Общее решение подуравнения с комплексными корнями, в свете вышеизложенного, может быть записано той же формулой (34), что и для подуравнения с действительными корнями

$$Z_{1,2}(\mu\upsilon) = \sqrt[\upsilon]{\frac{d_\upsilon}{2} \pm i\,\frac{d_{\mu\upsilon}^2 - d_{\mu\upsilon\mu\upsilon}}{2d_{1\upsilon} d_{2\upsilon} d_{4\upsilon} \dots d_{\mu\upsilon}}} \tag{48}$$

Разница только в одном — около дополнения корня на υ-той плоскости появился множитель — мнимая единица. Но это внешняя разница, по существу же здесь новый алгоритм построения и вычисления моментов.

Пример 12.

Проведем дальнейшие рассуждения на примере второго подуравнения (39)

$$n_{\upsilon\upsilon} Z_{\upsilon}^{2} - n_{\upsilon\upsilon\upsilon} Z_{\upsilon} + n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} \tag{49}$$

уравнения (40), (35) четвертой степени. Общности такой подход не лишится, так как уравнение любой степени может быть разделено на элементарные подуравнения второй и первой степеней.

Переходим к предельно приближенному уравнению и записываем его в знакопеременной канонической и биномиальной формах

$$Z_{\upsilon}^{2} - \frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon}}{n_{\upsilon\upsilon}} Z_{\upsilon} + \frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}}{n_{\upsilon\upsilon}} = Z_{\upsilon}^{2} - 2a_{\upsilon 1} Z_{\upsilon} + a_{\upsilon 2} = 0 \tag{50}$$

Здесь, как это видно, имеют место равенства

$$\begin{aligned} 2a_{\upsilon 1} &= \frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon}}{n_{\upsilon\upsilon}} \\ a_{\upsilon 2} &= \frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}}{n_{\upsilon\upsilon}} \end{aligned} \tag{51}$$

Уравнение (50) содержит комплексные корни (пример 10), поэтому для его алгебраического решения строим ему противостоящее, контруравнение (24)

$$Z_{\upsilon}^{2} - 2a_{\upsilon 1} Z_{\upsilon} + a_{\upsilon 2} = 2a_{0\upsilon 2} = 2\left(-a_{\upsilon 1}^{2} + a_{\upsilon 2}\right) \tag{52}$$

которое, с учетом предыдущего (51), можно записать тоже в канонической форме

$$Z_{\upsilon}^{2} - \frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon}}{n_{\upsilon\upsilon}} Z_{\upsilon} + \left(\frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon}^{2}}{2n_{\upsilon\upsilon}^{2}} - \frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}}{n_{\upsilon\upsilon}} \right) = Z_{\upsilon}^{2} - d_{\upsilon 1} Z_{\upsilon} + d_{\upsilon\upsilon} = 0 \tag{53}$$

Строим общее решение контруравнения (53)

$$Z_{\upsilon 1,2} = \frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon}}{2n_{\upsilon\upsilon}} \pm \sqrt{-\left(\frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon}}{2n_{\upsilon\upsilon}}\right)^2 + \frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}}{n_{\upsilon\upsilon}}} \qquad (54)$$

Раскрывая моменты контруравнения (53)

$$\begin{aligned} n_{\upsilon\upsilon} &= \left(Z_1^{\upsilon} Z_2^{\upsilon} + \ldots\right)_6^1 = Z_1^{\upsilon} Z_2^{\upsilon} \\ n_{\upsilon\upsilon\upsilon} &= \left(Z_1^{\upsilon} Z_2^{\upsilon} Z_3^{\upsilon} + \ldots\right)_4^1 = Z_1^{\upsilon} Z_2^{\upsilon} \left(Z_3^{\upsilon} + Z_4^{\upsilon}\right) \\ n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon} &= \left(Z_1^{\upsilon} Z_2^{\upsilon} Z_3^{\upsilon} Z_4^{\upsilon} + \ldots\right)_1^1 = Z_1^{\upsilon} Z_2^{\upsilon} Z_3^{\upsilon} Z_4^{\upsilon} Z_3^{\upsilon} \end{aligned} \qquad (55)$$

и отбрасывая пренебрежимо малые слагаемые, а также исходя из основной закономерности (3)-(12) распределения корней, можно получить, с учетом алгебраического выражения (6)–(9) дискриминанта, окончательную формулу для вычисления корней (54) контруравнения на υ -й плоскости

$$Z_{\upsilon 1,2} = \frac{Z_{\upsilon 3} + Z_{\upsilon 4}}{2} + \frac{Z_{\upsilon 3} - Z_{\upsilon 4}}{2} = \frac{d_{\upsilon}}{2} \pm \frac{d_{\mu\upsilon}^2 - d_{\mu\upsilon\mu\upsilon}}{2d_{1\upsilon} \cdot d_{2\upsilon} \ldots d_{\mu\upsilon}} \qquad (56)$$

Здесь через υ обозначен порядок плоскости на которой задано уравнение (53). (В формулах (6)–(9) — это плоскость первого порядка). А через μ обозначена плоскость над υ, через отображение на которую, заданное уравнение (53) решено в алгебраической форме (56). (Т.е., индекс μ в формуле (56) выполняет роль индекса υ в формулах (6)–(9)).

Приведенные выкладки, помимо того, что показывают еще один способ построения принятой (48) для вычисления корней формулы, подтверждают (56), что анализируемое контруравнение (53) действительно содержит интересующие нас комплексные корни Z_3, Z_4 заданного уравнения (35) четвертой степени.

В соответствии с заданием (53) исходные «единичные» (в рассматриваемом случае — это υ-е) моменты подлежащего решению контруравнения (53) равны

$$d_{\upsilon} = \frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon}}{n_{\upsilon\upsilon}}$$
$$d_{\upsilon\upsilon} = \frac{n^{2}{}_{\upsilon\upsilon\upsilon}}{2n^{2}{}_{\upsilon\upsilon}} - \frac{n_{\upsilon\upsilon\upsilon\upsilon}}{n_{\upsilon\upsilon}} \qquad (57)$$

Отображаем контруравнение-оригинал (53), с целью его алгебраического решения, с плоскости υ-го порядка на плоскость $\mu\upsilon$-го порядка функцией

$$Z_{\mu\upsilon} = Z_{\upsilon}^{\mu} \qquad (58)$$

Получаем уравнение-образ

$$Z_{\mu\upsilon}^{2} - d_{\mu\upsilon} Z_{\mu\upsilon} + d_{\mu\upsilon\mu\upsilon} = 0 \qquad (59)$$

Моменты $\mu\upsilon$-го порядка образов отображений контруравнения на μ-е плоскости относительно υ-й соответственно равны [2], [3|

$$d_{\mu\upsilon} = d^{2}_{\left(\frac{\mu}{2}\right)\upsilon} - 2d_{\left(\frac{\mu}{2}\right)\upsilon\left(\frac{\mu}{2}\right)\upsilon}$$
$$d_{\mu\upsilon\mu\upsilon} = d^{2}_{\left(\frac{\mu}{2}\right)\upsilon\left(\frac{\mu}{2}\right)\upsilon} \qquad (60)$$

Вычисляем и заносим в таблицу моменты (57), (60) образов контруравнения (53). В эту же таблицу заносим вычисленные приближения корней (56) на плоскостях υ-го и первого порядков (48).

υ	μ	$d_{\mu\upsilon}$	$d_{\mu\upsilon\mu\upsilon}$	$Z_{\upsilon 1,2}$	$Z_{1,2}$
4	1	1,445	-0,005	0,72±i0,72	-0,195±i1,02
	2	2,098	0,000025	0,72±i0,72	-0,195±i1,02
	4	4,4	0	0,72±i0,72	-0,195±i1,02
	8	19,19	0	0,72±i0,72	-0,195±i1,02

(61)

Вычисление моментов начинается с выбора значения для параметра отображения υ. Осторожность, опыт и желание возможно быстрее получить результат, подсказывают, что для начала параметр отображения следовало бы приравнять четырем $(\upsilon = 4)$.

Вторым шагом вычисляются «единичные» моменты контруравнения. Моменты на плоскости задания контруравнения (57), на основе ранее приведенных (41) моментов заданного уравнения (35)

$$\begin{aligned} d_4 &= \frac{n_{444}}{n_{44}} = \frac{2088}{1445} = 1{,}445 \\ d_{44} &= \frac{n_{444}^2}{2n_{44}^2} - \frac{n_{4444}}{n_{44}} = \frac{1{,}445^2}{2} - \frac{1516}{1445} = -0{,}005 \end{aligned} \qquad (62)$$

Моменты (60) каждого из последующих μ-х отображений контруравнения строятся и вычисляются на основе моментов предыдущих [2| отображений (60): для $\mu = 2$

$$\begin{aligned} d_{2\cdot 4} &= d_4^2 - 2d_{44} = 1{,}445^2 - 2(-0{,}005) = 2{,}098 \\ d_{2\cdot 42\cdot 4} &= d_{44}^2 = (-0{,}005)^2 = 0{,}000025 \end{aligned}$$

для $\mu = 4$

$$\begin{aligned} d_{4\cdot 4} &= d_{2\cdot 4}^2 - 2d_{2\cdot 42\cdot 4} = 2{,}098^2 - 0 = 4{,}4 \\ d_{4\cdot 44\cdot 4} &= d_{2\cdot 42\cdot 4}^2 = 0 \end{aligned}$$

для $\mu = 8$

$$\begin{aligned} d_{8\cdot 4} &= d_{4\cdot 4}^2 - 2d_{4\cdot 44\cdot 4} = 19{,}19 \\ d_{8\cdot 48\cdot 4} &= d_{4\cdot 44\cdot 4}^2 = 0 \end{aligned} \qquad (63)$$

Вычисляем корни контруравнения на плоскости 4-го порядка (56) в приближении $\mu = 1$, $\upsilon = 4$

$$Z_{\upsilon 3\cdot 4}(1\cdot 4)=\frac{1{,}445}{2}\pm\frac{1{,}445^2-(-0{,}005)}{2\cdot 1{,}445}=0{,}72\pm 0{,}72$$

в приближении $\mu=2$, $\upsilon=4$ и т.д.

$$Z_{\upsilon 3\cdot 4}(2\cdot 4)=\frac{1{,}445}{2}\pm\frac{2{,}098^2-0{,}0}{2\cdot 1{,}445\cdot 2{,}098}=0{,}72\pm 0{,}73$$
$$Z_{\upsilon 3\cdot 4}(4\cdot 4)=\frac{1{,}445}{2}\pm\frac{4{,}4^2-0{,}0}{2\cdot 1{,}445\cdot 2{,}098\cdot 4{,}4}=0{,}72\pm 0{,}73 \qquad (64)$$
$$Z_{\upsilon 3\cdot 4}(8\cdot 4)=\frac{1{,}445}{2}\pm\frac{19{,}19^2-0{,}0}{2\cdot 1{,}445\cdot 2{,}098\cdot 4{,}4\cdot 19{,}19}=0{,}72\pm 0{,}72$$

Основываясь на полученных результатах (64) принимаем корни решаемого подуравнения (53) на плоскости четвертого порядка равными

$$Z_{\upsilon 3,4}=0{,}72\pm i0{,}725 \qquad (65)$$

Вычисление корней из полученных (65) комплексных чисел проводим по методике приложения 2 к настоящей работе. Для чего, вычисляем моменты уравнения, которому принадлежат полученные (65) числа

$$\begin{aligned} d_4 &= Z_{\upsilon 3}+Z_{\upsilon 4}=1{,}44 \\ d_{44} &= Z_{\upsilon 3}\,Z_{\upsilon 4}=1{,}044 \end{aligned} \qquad (66)$$

а затем и моменты оригинала этого уравнения

$$\begin{aligned} & d_1^4-4\sqrt[4]{d_{44}}\,d_1^2+2\sqrt[4]{d_{44}}-d_4=0 \\ & d_{11}=\sqrt[4]{d_{44}} \end{aligned} \qquad (67)$$

$$\begin{aligned} d_1 &= \pm 0{,}39 \\ d_{11} &= 1{,}01 \end{aligned} \qquad (68)$$

Решая уравнение оригинала с найденными моментами (68), находим численные значения корней заданного подуравнения (53) уравнения (35), на плоскости первого порядка

$$Z_{3,4}(4) = \pm 0{,}195 \pm i0{,}98 \approx \pm 0{,}2 \pm i \qquad (69)$$

в 4-м приближении.

Итак, со всей очевидностью, можно утверждать, что общее предельное решение (48) для подуравнения с комплексными корнями состоялось.

Пример 13.

Рассмотрим корни подуравнения примера 4, (28)–(30.1):

Численное (не общее) вычисление корней заданного уравнения (28) в предыдущем случае, основано на решении подуравнения (28) на υ-й плоскости через отождествление его с уравнением второй степени

$$Z_\upsilon^2 - p_\upsilon Z_\upsilon + p_{\upsilon\upsilon} = Z_\upsilon^2 - d_\upsilon Z_\upsilon + d_{\upsilon\upsilon} = 0 \qquad (70)$$

Следуя этой методике, отмечаем, что в восьмом $(\upsilon = 8)$ приближении моменты уравнения (70) равны (29)

$$\begin{aligned} d_8 &= p_8 = 12{,}410567 \cdot 10^6 \\ d_{88} &= p_{88} = 39{,}063596 \cdot 10^{12} \end{aligned} \qquad (71)$$

Далее требуется извлечь корни восьмой степени из сопряженных комплексных чисел, являющихся корнями уравнения (70), (71).

Рассматривая уравнение (70), (71) как образ стандартного отображения на плоскость восьмого порядка некоторого оригинала

$$Z_1 - d_1 Z_1 + d_{11} = 0 \qquad (72)$$

вычисляем последовательно, используя общие формулы [1] связи моментов

$$\begin{aligned} d_{2\upsilon} &= d_{\upsilon}^{2} - 2d_{\upsilon\upsilon} \\ d_{2\upsilon 2\upsilon} &= d_{\upsilon\upsilon}^{2} \end{aligned} \tag{73}$$

моменты образов на плоскости 4, 2 и 1-го порядков (71), (73) и заносим их в таблицу

υ	d_{υ}	$d_{\upsilon\upsilon}$
8	$12{,}4 \cdot 10^{6}$	$39 \cdot 10^{12}$
4	-4991	$6250 \cdot 10^{3}$
2	3	2500
1	$\pm 10{,}1$	50

(74)

Выбор знаков около вычисляемых моментов определяется, прежде всего, знаком дискриминанта

$$a_{0\upsilon 2} = -\left(\frac{d_{\upsilon}}{2}\right)^{2} + d_{\upsilon\upsilon} \tag{75}$$

корней уравнения-образа.

Так, в рассматриваемом случае (74) уравнений-образов с комплексно сопряженными корнями, все свободные моменты $(d_{\upsilon\upsilon})$ должны иметь положительный знак, так как только в этом случае корни уравнений-образов могут быть комплексными. Кстати, положительности свободного момента $(d_{\upsilon\upsilon})$ соответствует то, что он является квадратом модуля комплексно сопряженных корней уравнений-образов, т.е. квадратом действительного числа.

Знак первого момента (d_{υ}) уравнения-образа, в общем случае определяется или графически, или предельно, как это описано в предыдущих разделах работы.

Подставив вычисленные значения единичных моментов в уравнение-оригинал (72) находим (в восьмом приближении) комплексные корни заданного (70) уравнения

$$\begin{gathered} Z^2 \pm 10{,}1Z + 50 = 0 \\ Z_{1,2} = \pm 5{,}05 \pm i4{,}95 \approx 5 \pm i5 \end{gathered} \tag{76}$$

Для построения общего (не численного) предельного решения заданного уравнения (70), в части комплексных корней, составляем контруравнение подуравнению (70)

$$\begin{gathered} Z_\upsilon^2 - p_\upsilon Z_\upsilon + p_{\upsilon\upsilon} = 2a_{0\upsilon 2} = 2\left[-\left(\frac{p_\upsilon}{2}\right)^2 + p_{\upsilon\upsilon}\right] \\ Z_\upsilon^2 - p_\upsilon Z_\upsilon + \left(\frac{p_\upsilon^2}{2} - p_{\upsilon\upsilon}\right) = Z_\upsilon^2 - d_\upsilon Z_\upsilon + d_{\upsilon\upsilon} = 0 \end{gathered} \tag{77}$$

Решаем его алгебраически (как уравнение с действительными корнями) на υ-й плоскости (через μ-ое отображение над υ-й плоскостью) и извлекаем корень υ-й степени из комплексных корней

$$Z_{1,2}(\mu\upsilon) = \sqrt[\upsilon]{\frac{d_\upsilon}{2} \pm i\frac{d_{\mu\upsilon}^2 - d_{\mu\upsilon\mu\upsilon}}{2d_{1\upsilon} \cdot d_{2\upsilon} \cdot d_{4\upsilon} \cdot \ldots d_{\mu\upsilon}}} \tag{78}$$

Напомним еще, что μ-е отображения контруравнения над υ-й плоскостью осуществляются как непосредственное продолжение υ-х отображений на плоскости все тех же, кратных степени двойки порядков. Числа, эти оказались удобными при построении моментов образов, входящих в конечную формулу (78) решения уравнений. Удобно вычислять и корень степени двойки, входящий в эту (78) формулу.

5. Приложения

5.1. Приложение 1

Кратные моменты точек плоскости

1. Моменты двух точек

$$d_1 = (Z_1 + \ldots)_2 = d_1$$

$$d_{11} = (Z_1 Z_2 + \ldots)_1 = d_{11}$$

$$d_2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_2 = d_1^2 - 2d_{11}$$

$$d_{22} = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_1 = d_{11}^2$$

$$d_3 = \left(Z_1^3 + \ldots\right)_2 = d_1^3 - 3d_1 d_{11}$$

$$d_{33} = \left(Z_1^3 Z_2^3 + \ldots\right)_1 = d_{11}^3$$

$$d_4 = \left(Z_1^4 + \ldots\right)_2 = d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2$$

$$d_{44} = \left(Z_1^4 Z_2^4 + \ldots\right)_1 = d_{11}^4$$

$$d_5 = \left(Z_1^5 + \ldots\right)_2 = d_1^5 - 5d_1^3 d_{11} + 5d_1 d_{11}^2$$

$$d_{55} = \left(Z_1^5 Z_2^5 + \ldots\right)_1 = d_{11}^5$$

2. Моменты трех точек

$$m_1 = (Z_1 + \ldots)_3 = m_1$$

$$m_{11} = (Z_1 Z_2 + \ldots)_3 = m_{11}$$

$$m_{111} = (Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots)_1 = m_{111}$$

$$m_2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_3 = m_1^2 - 2m_{11}$$

$$m_{22} = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_3 = m_{11}^2 - 2m_1 m_{111}$$

$$m_{222} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots \right)_1 = m_{111}^2$$

$$m_{33} = \left(Z_1^3 Z_2^3 + \ldots \right)_3 = m_{11}^3 - 3 m_1 m_{11} m_{111} + 3 m_{111}^2$$

$$m_{333} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \ldots \right)_1 = m_{111}^3$$

$$m_4 = \left(Z_1^4 + \ldots \right)_3 = m_1^4 - 4 m_1^2 m_{11} + 2 m_{11}^2 + 4 m_1 m_{111}$$

$$m_{44} = \left(Z_1^4 Z_2^4 + \ldots \right)_3 = m_{11}^4 - 4 m_1 m_{11}^2 m_{111} + 2 m_1^2 m_{111}^2 + 4 m_{11} m_{111}^2$$

$$m_{444} = \left(Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 + \ldots \right)_1 = m_{111}^4$$

$$m_5 = \left(Z_1^5 + \ldots \right)_3 = m_1^5 - 5 m_1^3 m_{11} + 5 m_1^2 m_{111} + 5 m_1 m_{11}^2 - 5 m_{11} m_{111}$$

$$m_{55} = \left(Z_1^5 Z_2^5 + \ldots \right)_3 = m_{11}^5 - 5 m_1 m_{11}^3 m_{111} + 5 m_{11}^2 m_{111}^2 + 5 m_1^2 m_{11} m_{111}^2 - 5 m_1 m_{111}^3$$

$$m_{555} = \left(Z_1^5 Z_2^5 Z_3^5 + \ldots \right)_1 = m_{111}^5$$

3. Моменты четырех точек

$$n_1 = \left(Z_1 + \ldots \right)_4 = n_1$$

$$n_{11} = \left(Z_1 Z_2 + \ldots \right)_6 = n_{11}$$

$$n_{111} = \left(Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots \right)_4 = n_{111}$$

$$n_{1111} = \left(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + \ldots \right)_1 = n_{1111}$$

$$n_2 = \left(Z_1^2 + \ldots \right)_4 = n_1^2 - 2 n_{11}$$

$$n_{22} = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots \right)_6 = n_{11}^2 - 2 n_1 n_{111} + 2 n_{1111}$$

$$n_{222} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right)_4 = n_{111}^2 - 2n_{11} n_{1111}$$

$$n_{2222} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 + \ldots\right)_1 = n_{1111}^2$$

$$n_3 = \left(Z_1^3 + \ldots\right)_4 = n_1^3 - 3n_1 n_{11} + 3n_{111}$$

$$n_{33} = \left(Z_1^3 Z_2^3 + \ldots\right)_6 = n_{11}^3 + 3n_{111}^2 + 3n_1 n_{11} n_{111} + 3n_1^2 n_{1111} - 3n_{11} n_{1111}$$

$$n_{333} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \ldots\right)_4 = n_{111}^3 - 3n_{11} n_{111} n_{1111} + 3n_1 n_{1111}^2$$

$$n_{3333} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 Z_4^3 + \ldots\right)_1 = n_{1111}^3$$

$$n_4 = \left(Z_1^4 + \ldots\right)_4 = n_1^4 - 4n_1^2 n_{11} + 2n_{11}^2 + 4n_1 n_{111} - 4n_{1111}$$

$$\begin{aligned} n_{44} = \left(Z_1^4 Z_2^4 + \ldots\right)_6 &= n_{11}^4 + 2n_1^2 n_{111}^2 + 6n_{1111}^2 - 4n_1 n_{11}^2 n_{111} - \\ &- 4n_{11}^2 n_{1111} - 8n_1 n_{111} n_{1111} + 4n_{11} n_{111}^2 + 4n_1^2 n_{11} n_{1111} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n_{444} = \left(Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 + \ldots\right)_4 &= n_{111}^4 - 4n_{11} n_{111}^2 n_{1111} + 2n_{11}^2 n_{1111}^2 + \\ &+ 4n_1 n_{111} n_{1111}^2 - 4n_{1111}^3 \end{aligned}$$

$$n_{4444} = \left(Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 Z_4^4 + \ldots\right)_1 = n_{1111}^4$$

$$n_5 = \left(Z_1^5 + \ldots\right)_4 = n_1^5 - 5n_1^3 n_{11} + 5n_1^2 n_{111} - 5n_1 n_{1111} + 5n_1 n_{11}^2 - 5n_{11} n_{111}$$

$$\begin{aligned} n_{55} = \left(Z_1^5 Z_2^5 + \ldots\right)_6 &= n_{11}^5 + 5n_1^2 n_{11} n_{111}^2 + 5n_{11} n_{1111}^2 - 5n_1 n_{11}^3 n_{111} - \\ &- 5n_{11}^3 n_{1111} - 5n_1 n_{11} n_{111} n_{1111} + 5n_{11}^2 n_{111}^2 - 5n_1 n_{111}^2 - \\ &- 5n_1^3 n_{111} n_{1111} + 5n_1^2 n_{1111}^2 \end{aligned}$$

$$n_{555} = \left(Z_1^5 Z_2^5 Z_3^5 + \ldots\right)_4 = n_{111}^5 - 5n_{111}^3 n_{11} n_{1111} + 5n_{11}^2 n_{111} n_{1111}^2 + \\ + 5n_1 n_{111}^2 n_{1111}^2 - 5n_{111} n_{1111}^3 - 5n_1 n_{11} n_{1111}^3$$

$$n_{5555} = \left(Z_1^5 Z_2^5 Z_3^5 Z_4^5 + \ldots\right)_1 = n_{1111}^5$$

4. Моменты пяти точек

$$p_1 = (Z_1 + \ldots)_5 = p_1$$

$$p_{11} = (Z_1 Z_2 + \ldots)_{10} = p_{11}$$

$$p_{111} = (Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots)_{10} = p_{111}$$

$$p_{1111} = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + \ldots)_5 = p_{1111}$$

$$p_{11111} = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 + \ldots)_1 = p_{11111}$$

$$p_2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_5 = p_1^2 - 2p_{11}$$

$$p_{22} = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_{10} = p_{11}^2 - 2p_1 p_{111} + 2p_{1111}$$

$$p_{222} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right)_{10} = p_{111}^2 - 2p_{11} p_{1111} + 2p_1 p_{11111}$$

$$p_{2222} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 + \ldots\right)_5 = p_{1111}^2 - 2p_{111} p_{11111}$$

$$p_{22222} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 Z_5^2 + \ldots\right)_1 = p_{11111}^2$$

$$p_3 = \left(Z_1^3 + \ldots\right)_5 = p_1^3 - 3p_1 p_{11} + 3p_{111}$$

$$\begin{aligned} p_{33} = \left(Z_1^3 Z_2^3 + \ldots\right)_{10} = p_{11}^3 - 3p_1 p_{11} p_{111} - 3p_{11} p_{1111} + 3p_{111}^2 + \\ + 3p_1^2 p_{1111} - 3p_1 p_{11111} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{333} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \ldots\right)_{10} = p_{111}^3 - 3p_{11} p_{111} p_{1111} - 3p_1 p_{111} p_{11111} + \\ + 3p_1 p_{1111}^2 - 3p_{1111} p_{11111} + 3p_{11}^2 p_{11111} \end{aligned}$$

$$p_{3333} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 Z_4^3 + \ldots\right)_5 = p_{1111}^3 - 3p_{111} p_{1111} p_{11111} + 3p_{11} p_{11111}^2$$

$$p_{33333} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 Z_4^3 Z_5^3 + \ldots\right)_1 = p_{11111}^3$$

$$p_4 = \left(Z_1^4 + \ldots\right)_5 = p_1^4 - 4p_1^2 p_{11} + 2p_{11}^2 + 4p_1 p_{111} - 4p_{1111}$$

$$\begin{aligned} p_{44} = \left(Z_1^4 Z_2^4 + \ldots\right)_{10} = p_{11}^4 - 4p_1 p_{11}^2 p_{111} - 4p_{11}^2 p_{1111} + \\ + 4p_{11} p_{111}^2 + 4p_1^2 p_{11} p_{1111} + 8p_1 p_{11} p_{11111} + 2p_1^2 p_{111}^2 - \\ - 8p_1 p_{111} p_{1111} - 4p_1^3 p_{11111} + 6p_{1111}^2 - 4p_{111} p_{11111} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{444} = \left(Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 + \ldots\right)_{10} = p_{111}^4 + 3p_{11}^2 p_{1111}^2 - 4p_1^2 p_{11111}^2 - \\ - 4p_{11} p_{111}^2 p_{1111} - 8p_1 p_{11} p_{1111} p_{11111} + 2p_{11}^2 p_{111} p_{11111} + \\ + 2p_1 p_{111} p_{1111}^2 - 2p_{1111}^3 + 4p_{111} p_{1111} p_{11111} + 16p_{11} p_{11111}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{4444} = \left(Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 Z_4^4 + \ldots\right)_5 = p_{1111}^4 - 4p_{111} p_{1111}^2 p_{11111} + \\ + 2p_{111}^2 p_{11111}^2 + 4p_{11} p_{1111} p_{11111}^2 - 4p_1 p_{11111}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_5 = \left(Z_1^5 + \ldots\right)_5 = p_1^5 - 5p_1^3 p_{11} + 5p_1^2 p_{111} + 5p_1 p_{11}^2 - \\ - 5p_1 p_{1111} - 5p_{11} p_{111} + 5p_{11111} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_{55} = \left(Z_1^5 Z_2^5 + \ldots\right)_{10} &= p_{11}^5 - 5p_1 p_{11}^3 p_{111} - 5p_{11}^3 p_{1111} + \\
&+ 5p_{11}^2 p_{111}^2 + 5p_1^2 p_{11}^2 p_{1111} + 10p_1 p_{11}^2 p_{11111} + 5p_1^2 p_{11} p_{111}^2 - \\
&- 5p_1 p_{11} p_{111} p_{1111} - 15p_{11} p_{111} p_{11111} - 5p_1^3 p_{11} p_{11111} + \\
&+ 5p_{11} p_{1111}^2 + 5p_{111}^3 p_{1111} + 5p_1^2 p_{1111}^2 - 15p_1 p_{1111} p_{11111} - \\
&- 5p_1 p_{111}^3 - 5p_1^3 p_{111} p_{1111} + 10p_1^2 p_{111} p_{11111} + 10p_{11111}^2
\end{aligned}
$$

Замечания.

Проверка правильности записи момента включает в себя:

1. Проверку на постоянство размерности всех слагаемых.

2. Проверку на равенство количества частных моментов в определяемом (кратном) моменте и его выражении через единичные.

Количества частных моментов в кратном и единичных определяется заскобочным индексом в их кратной записи. Например, для кратного момента p_5

$$
\begin{aligned}
5 = 5^5 - 5\times 5^3 \times 10 + 5\times 5^2 \times 10 + 5\times 5\times 10^2 - \\
- 5\times 5\times 5 - 5\times 10\times 10 + 5\times 1 = 5
\end{aligned}
$$

Настоящую проверку можно рассматривать как проверку подстановкой

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = 1$$

3. Проверка подстановкой нетривиального набора корней.

Проверка подстановкой является достаточно полной, в то время как за проверками по п.п. 1 и 2 может скрыться и неправильно вычисленный момент.

5.2. Приложение 2

Извлечение корней из комплексных чисел в алгебраической форме

1. Корень второй степени.

Пусть задано комплексное число, из которого следует извлечь корень второй степени.

В соответствии со степенью извлекаемого корня полагаем, что число задано на плоскости второго порядка. Соответственно обозначаем заданное число –Z_2.

Будем считать, что заданное и комплексно ему сопряженное число являются корнями уравнения второй степени на плоскости второго порядка

$$Z_2^2 - d_2 Z_2 + d_{22} = 0 \tag{1}$$

Построенное уравнение (1) рассматриваем как образ уравнения оригинала второй степени на плоскости первого порядка

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \tag{2}$$

полученное стандартным отображением функцией

$$Z_2 = Z^2 \tag{3}$$

Моменты уравнения образа (1) и оригинала (2) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1^2 - d_{11} \\ d_{22} &= d_{11}^2 \end{aligned} \tag{4}$$

а так как моменты уравнения образа определены заданными числами

$$\begin{aligned} d_2 &= Z_2 + \overline{Z}_2 \\ d_{22} &= Z_2 \overline{Z}_2 \end{aligned} \tag{5}$$

то формулы связи (4) моментов могут быть использованы для вычисления моментов уравнения оригинала

$$d_1 = \pm\sqrt{2\sqrt{Z_2\overline{Z_2}} + Z_2 + \overline{Z_2}}$$

$$d_{11} = \sqrt{Z_2\overline{Z_2}} \tag{6}$$

Уравнение оригинала (2) определено, а найденные его корни и есть решение поставленной задачи

$$\begin{aligned} Z_{1..1,2} = 0{,}5(d_1 \pm \sqrt{d_1^{\,2} - 4d_{11}}) = \pm 0{,}5(\sqrt{2\sqrt{Z_2\overline{Z_2}} + Z_2 + \overline{Z_2}} \pm \\ \pm i\sqrt{2\sqrt{Z_2\overline{Z_2}} - Z_2 - \overline{Z_2}}) \end{aligned} \tag{7}$$

Точнее, определены два уравнения оригинала, соответственно для двух значений его первого момента d_1. Т.е поставленная задача имеет два решения — прямое и противоположное.

Пример.

Произведем проверку полученной формулы (7) вычисления. Положим корни уравнения оригинала равными

$$Z_{1...1,2} = 2 \pm i \tag{8}$$

Возведением в квадрат корней уравнения оригинала получаем соответственно корни уравнения образа стандартного отображения на плоскость второго порядка

$$Z_{2...1,2} = (2 \pm i)^2 = 3 \pm 4i \tag{9}$$

Подставляя значения корней образа в формулу (7) вычисления корней, получим корни уравнения оригинала

$$Z_{1..1,2} = 0{,}5(\sqrt{2\sqrt{9+16} + 3 + 3} \pm i\sqrt{2\sqrt{9+16} - 3 - 3}) = \pm 2 \pm i \tag{10}$$

2. Корень третьей степени.

Заданное и ему сопряженное числа считаем корнями уравнения образа

$$Z_3^2 - d_3 Z_3 + d_{33} \tag{11}$$

стандартным отображением

$$Z_3 = Z^3 \tag{12}$$

оригинала

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \tag{13}$$

Из формул связи моментов уравнений образа и оригинала

$$\begin{aligned} d_3 &= d_1^3 - 3d_1 d_{11} \\ d_{33} &= d_{11}^3 \end{aligned} \tag{14}$$

находим выражения для определения моментов оригинала

$$d_{11} = \sqrt[3]{Z_3 \overline{Z_3}}$$

$$d_1^{\ 3} - 3\sqrt[3]{Z_3 \overline{Z_3}}\, d_1 - (Z_3 + \overline{Z_3}) = 0 \tag{15}$$

Вычислив моменты уравнения оригинала, а затем и его корни, мы решим поставленную задачу. Отмечаем сразу, что системой уравнений (15) определяется три значения для первого момента (d_1) уравнения оригинала. Т.е. мы получили три уравнения оригинала, каждое из которых определит одно из возможных решений поставленной задачи. Причем, в силу того, что по заданию корни уравнения образа комплексно сопряжены, комплексно сопряжены и корни уравнения оригинала и, следовательно, действительны все три значения первого момента (15) уравнения оригинала.

Пример.

Извлечем корень третьей степени из комплексного числа

$$Z_3 = 2 + 11i \qquad (16)$$

По формулам (15) вычисления моментов уравнения оригинала находим значение второго момента.

$$d_{11} = \sqrt[3]{(2+11i)(2-11i)} = 5 \; (17)$$

и уравнение третьей степени для вычисления значений первого момента

$$d_1^3 - m_1 d_1^2 - m_{11} d_1 - m_{111} = d_1^3 + (-15)d_1 - 4 = 0 \qquad (18)$$

Корни полученного уравнения, как уже известно, действительны и различны, поэтому вычислять их наиболее целесообразно предельным методом.

Вычислим наименьший по модулю корень уравнения (18), первое приближение которого

$$d_{13}(1) = m_{14} / m_4 = 4/(-15) = -0{,}267 \qquad (19)$$

весьма близко к нулю и сразу довольно таки хорошо удовлетворяет уравнению. Проведя несколько уточняющих вычислительных операций, принимаем корень равным

$$d_{13} = -0{,}2679 \qquad (20)$$

Делением исключаем найденный корень из решаемого уравнения (18) и вычисляем его оставшиеся два корня

$$\begin{aligned} d_{12} &= -3{,}732 \\ d_{11} &= 4 \end{aligned} \qquad (21)$$

Для каждого из трех найденных значений (20, 21) первого момента, уравнение оригинала(13), с учетом ранее вычисленного значения (17) для второго момента, определяет пару комплексно сопряженных корней третьей степени из заданного и ему сопряженного комплексных чисел

$$\begin{aligned} Z_{1,2}(d_{13}) &= -0{,}134 \pm 2{,}232i \\ Z_{1,2}(d_{12}) &= -1{,}866 \pm 1{,}232i \\ Z_{1,2}(d_{11}) &= 2 \pm i \end{aligned} \tag{22}$$

Корни третьей степени из комплексного числа, как это видно из полученных результатов (22), расположены в вершинах равностороннего треугольника, что соответствует известным выводам Муавра.

Условно, главным значением корня будем считать корень соответствующий наибольшей величине первого момента уравнения оригинала.

3. Корень четвертой степени.

По-прежнему, считаем заданное число и его комплексно сопряженное корнями уравнения образа

$$Z_4^2 - d_4 Z_4 + d_{44} = 0 \tag{23}$$

стандартного отображения на плоскость четвертого порядка функцией

$$Z_4 = Z^4 \tag{24}$$

уравнения оригинала

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \tag{25}$$

Из табличных формул связи моментов уравнений образа и оригинала

$$\begin{aligned} d_4 &= d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2 \\ d_{44} &= d_{11}^4 \end{aligned} \tag{26}$$

находим формулы для определения моментов уравнения оригинала через известные кратные моменты.

$$d_4 = Z_{41} + \overline{Z_{41}}$$

$$d_{44} = Z_{41}\overline{Z_{41}} \tag{27}$$

$$d_{11} = \sqrt[4]{Z_{41}\overline{Z_{41}}}$$

$$d_1^{\ 4} - 4\sqrt[4]{Z_{41}\overline{Z_{41}}}d_1^{\ 2} + 2\sqrt[4]{Z_{41}\overline{Z_{41}}} - (Z_{41} + \overline{Z_{41}}) = 0 \tag{28}$$

Найденные формулы определяют четыре значения для первого момента уравнения оригинала (25)

$$d_{1.1,2,3,4} = \pm\sqrt{2\sqrt[4]{Z_{41}\overline{Z_{41}}} \pm 2\sqrt{Z_{41}\overline{Z_{41}}} + (Z_{41} + \overline{Z_{41}})} \tag{29}$$

Т.е. мы получаем четыре уравнения оригинала

$$Z_2 - (\pm\sqrt{2\sqrt[4]{Z_{41}\overline{Z_{41}}} \pm 2\sqrt{Z_{41}\overline{Z_{41}}} + Z_{41} + \overline{Z_{41}}})Z + \sqrt[4]{Z_{41}\overline{Z_{41}}} = 0$$

(30)

каждое из которых определяет свою пару корней четвертой степени из заданного и ему сопряженного комплексных чисел.

Пример.

Пусть требуется извлечь корень четвертой степени из числа

$$Z_4 = -7 \pm 24i \tag{31}$$

Подставляем заданное число в формулы (28, 29) определяющие моменты уравнения оригинала

$$d_{11} = \sqrt[4]{(-7+24i)(-7-24)i} = 5$$

$$d_{1.1,2,3,4} = \pm\sqrt{2\times 5 \pm \sqrt{2\times 25 + (-7-7)}} = \pm 4; \pm 2 \qquad (32)$$

Выписываем соответствующие найденным моментам четыре уравнения оригинала

$$\begin{aligned} Z^2 - (\pm 4)Z + 5 = 0 \\ Z^2 - (\pm 2)Z + 5 = 0 \end{aligned} \qquad (33)$$

Корни полученных уравнений (33) и являются корнями четвертой степени из заданного числа (31)

$$\begin{aligned} Z_{1,2} &= \pm 2 \pm i \\ Z_{3,4} &= \pm 1 \pm 2i \end{aligned} \qquad (34)$$

4. Корень пятой степени.

Комплексное число, из которого требуется извлечь корень пятой степени и ему сопряженное число обозначаем буквами Z_{51} и Z_{51} и считаем их корнями уравнения образа на плоскости пятого порядка измеряемых величин

$$Z_5^2 - d_5 Z_5 + d_{55} = 0 \qquad (35)$$

полученным стандартным отображением функцией

$$Z_5 = Z^5 \qquad (36)$$

уравнения оригинала

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \qquad (37)$$

Моменты уравнений образа и оригинала связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} d_{55} &= d_{11}^5 \\ d_5 &= d_1^5 - 5d_1^3 d_{11} + 5d_1 d_{11}^2 \end{aligned} \qquad (38)$$

С другой стороны, моменты уравнения (35) образа могут быт ь выражены через заданные числа

$$\begin{aligned} d_5 &= Z_{51} + \overline{Z_{51}} \\ d_{55} &= Z_{51} \overline{Z_{51}} \end{aligned} \tag{39}$$

Подстановка выражений кратных моментов в систему уравнений (38) связи позволяет построить определяющие соотношения для моментов уравнения оригинала

$$d_{11} = \sqrt[5]{Z_{51} \overline{Z_{51}}}$$

$$d_1^5 - 5\sqrt[5]{Z_{51} \overline{Z_{51}}} d_1^3 + 5\sqrt[5]{\left(Z_{51} \overline{Z_{51}}\right)^2} d_1 - (Z_{51} + \overline{Z_{51}}) = 0 \tag{40}$$

Как и в предыдущих случаях полученные соотношения (40) определяют число значений первого момента и соответственно количество уравнений оригинала равное степени извлекаемого из заданного числа корня.

Пример.

Извлечем корни пятой степени из комплексно сопряженных чисел

$$Z_{51,2} = -38 \pm 41i \tag{41}$$

Для чего, прежде всего, вычисляем моменты уравнения оригинала (40)

$$d_{11} = \sqrt[5]{(-38+41i)(-38-41i)} = 5$$

$$d_1^5 - 25d_1^3 + 125d_1 + 76 = 0 \tag{42}$$

Здесь, для вычисления корней уравнения (42) относительно значений первого момента строим таблицу коэффициентов уравнений образов и оригинала

v	1	2	3	4
p_v	0	50	0	750

p_{vv}	- 25	375	6250	171875
p_{vvv}	0	6250	- 114000	27701025
p_{vvvv}	125	15625	1519925	171940625
p_{vvvvv}	-76	5776	-438976	33362176

(43)

и находим приближения корней уравнения оригинала в линейной аппроксимации уравнения образа

v	1	2	3	4
$d_{11}(v)$	–	± 7,07	–	± 3,758
$d_{12}(v)$	–	± 2,74	–	± 3,89
$d_{13}(v)$	–	4,083	2,64	3,563
$d_{14}(v)$	–	- 1,581	- 2 371	- 1,578
$d_{15}(v)$	- 0,608	- 0,608	- 0,661	- 0,665

(44)

В силу перевозбужденности матрицы моментов (43) уравнений относительно большим количеством нулевых моментов и повышенной кучностью корней, предельной последовательности для приближений корней d_{11} и d_{12} в таблице (44) результатов не усматривается. Для корней d_{13} и d_{14} можно усмотреть точки встречно сближающихся последовательностей приближений и принять в качестве предельных значений средние арифметические от двух последних результатов

$$\begin{aligned} d_{12}(3;4) &= 0{,}5(2{,}64 + 3{,}503) = 3{,}10 \\ d_{14}(3;4) &= -0{,}5(2{,}371 + 1{,}578) = -1{,}975 \end{aligned} \qquad (45)$$

Наконец, для корня d_{15} предельное значение может быть принято равным

$$d_{15} = -0{,}666 \qquad (46)$$

После подстановки принятых предельных значений и дополнительных вычислений принимаем корни равными

$$d_3 = 3{,}138;\ d_4 = -2{,}0596;\ d_5 = -0{,}66603 \qquad (47)$$

Исключаем из уравнения (42) для первого момента найденные корни $d_{3,4,5}$.

Из оставшегося уравнения второй степени

$$d_1^2 + 1{,}274 d_1 - 13{,}844 = 0 \tag{48}$$

находим первые два значения первого момента уравнения оригинала

$$\begin{aligned} d_{11} &= -4{,}412 \\ d_{12} &= 4{,}0 \end{aligned} \tag{49}$$

Подставив в уравнение оригинала (37) главное значение первого (49) и второго (42) моментов, вычисляем главные значения корней пятой степени из заданных (41) чисел

$$Z_{1,2} = 2 \pm i \tag{50}$$

Остальные четыре пары корней равномерно распределены по окружности на плоскости уравнения оригинала.

5. Некоторые выводы

Как видно, основной трудностью при вычислении корней из комплексных чисел является определение значений первого момента уравнения оригинала. Первый момент определяется как корень уравнения, степень которого равна степени извлекаемого из заданного числа корня. Определяющее уравнение обязательно четно- или нечетно- симметрично, а корни его только действительны и различны по модулю, что существенно упрощает его анализ и решение.

При необходимости многократных вычислений корней из комплексных чисел, уравнения, определяющие первые моменты оригиналов, целесообразно табулировать.

Например, уравнение пятой степени (40), в относительной форме может быть приведено к виду

$$\delta^5 - 5\delta^3 + 5\delta - \alpha_5 = 0 \qquad (51)$$

где переменное равно

$$\delta^5 = d_1 (Z_{51} Z_{51})^{-1/10} \qquad (52)$$

а свободный коэффициент

$$\alpha_5 = \frac{(Z_{51}\bar{Z}_{51})}{(Z_{51}\bar{Z}_{51})^{-1/2}} = e^{i\gamma} + e^{-i\gamma} = 2\cos\gamma \qquad (53)$$

находится в весьма ограниченном интервале [-2, +2].

5.3Приложение 3

Извлечение корней из действительных чисел

Метод вычисления корней из действительных чисел аналогичен методу вычисления корней из комплексных чисел.

Число $\left(Z_{\mu\upsilon}\right)$, из которого требуется извлечь корень υ-й степени рассматривается как точка на плоскости υ-го порядка. К заданному числу подключается парное число $Z_{\upsilon 2}$, а вместе они рассматриваются как корни уравнения второй степени

$$Z_{\upsilon}^{2}-d_{\upsilon}Z_{\upsilon}+d_{\upsilon\upsilon}=0 \tag{1}$$

Построенное уравнение (1) представляем себе как образ уравнения-оригинала

$$Z_{1}^{2}-d_{1}Z_{1}+d_{11}=0 \tag{2}$$

плоскости первого порядка, отображенного стандартной функцией

$$Z_{\upsilon}=Z_{1}^{\upsilon} \tag{3}$$

при этом связь соответствующих моментов уравнений, согласно таблицам [1], [3] в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} d_{\upsilon\upsilon}&=d_{11}^{\upsilon}, \\ d_{\upsilon}&=d_{1}^{\upsilon}+\alpha_{1}d_{11}d_{1}^{\upsilon-2}+\alpha_{2}d_{11}^{2}d_{1}^{\upsilon-4}+\alpha_{3}d_{11}^{3}d_{1}^{\upsilon-6}+..., \end{aligned} \tag{4}$$

где моменты уравнения-образа известные функции заданных чисел

$$\begin{aligned} d_{\upsilon}&=Z_{\upsilon 1}+Z_{\upsilon 2}, \\ d_{\upsilon\upsilon}&=Z_{\upsilon 1}Z_{\upsilon 2}, \end{aligned} \tag{5}$$

а α — известный числовой коэффициент.

Остается найти единичные моменты из системы уравнений (4) связи, а далее и искомые корни уравнения-оригинала (2). Трудность в том, что второй единичный момент определяется как корень υ -й степени из соответствующего, известного момента уравнения-образа

$$d_{11} = \sqrt[\upsilon]{d_{\upsilon\upsilon}} = \sqrt[\upsilon]{Z_{\upsilon 1} Z_{\upsilon 2}} \tag{6}$$

Однако парный $(Z_{\upsilon 2})$ заданному $(Z_{\upsilon 1})$ корень в определяющем выражении (6) произволен и может быть выбран, в частности, так, чтобы корень (6) извлекался всегда и тривиально.

Принимаем парный $(Z_{\upsilon 2})$ корень равным обратной величине заданного корня, т.е. полагаем

$$Z_{\upsilon 1} Z_{\upsilon 2} = 1 \tag{7}$$

Проблема снимается. Второй единичный момент уравнения-оригинала (2) принимает постоянное значение

$$d_{11} = 1 \tag{8}$$

не зависящее ни от величины заданного действительного числа $Z_{\upsilon 1}$, ни от степени (υ) извлекаемого из него корня.

Уравнение, определяющее первый коэффициент оригинала (2) также принимает упрощенную форму

$$d_1^{\upsilon} + \alpha_1 d_1^{\upsilon-2} + \alpha_2 d_1^{\upsilon-4} + \ldots + \alpha_{\upsilon} = 0 \tag{9}$$

Пример 1.

Пусть требуется извлечь корень третьей степени из числа $Z_{31} = 8$.Число, парное заданному равно

$$Z_{32} = \frac{1}{Z_{31}} = 0{,}125 \tag{10}$$

Уравнение-образ, корнями которого является пара чисел Z_{31} и Z_{32} имеет вид

$$Z_3^2 - d_3 Z_3 + d_{33} = Z_3^2 - (Z_{31} + Z_{32}) Z_3 + Z_{31} Z_{32} = Z_3^2 - 8{,}125 Z_3 + 1 = 0 \tag{11}$$

и расположено, как мы полагаем, на плоскости третьего порядка Z_3.

Уравнение-оригинал образа (11) имеет вид

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = Z^2 - (Z_1 + Z_2) Z + Z_1 Z_2 = 0 \tag{12}$$

и расположено на плоскости первого порядка Z.

Уравнение-образ (11) получено в результате отображения оригинала (12) стандартной функцией

$$Z_3 = Z^3 \tag{13}$$

следствием чего является наличие уравнений связи между моментами образа и оригинала [3]

$$\begin{aligned} d_3 &= d_1^3 - 3 d_1 d_{11} \\ d_{33} &= d_{11}^3 \end{aligned} \tag{14}$$

В силу определения моментов уравнения-образа (10), (11), вычисляем момент второго порядка уравнения-оригинала

$$d_{11} = \sqrt[3]{d_{33}} = 1 \tag{15}$$

и строим, уравнение для вычисления момент первого порядка

$$d_1^3 - 3 d_1 - 8{,}125 = d_1^3 - 0 \cdot d_1^2 + (-3) d_1 - 8{,}125 = 0 \tag{16}$$

Вычисляем и сводим в таблицу моменты отображений полученного уравнения (16)

υ	m_{ν}	$m_{\nu\nu}$	$m_{\nu\nu\nu}$	$d_1(\nu)$
1	0	-3	8,125	$\sqrt{3}$
2	6	9	66	2,4
4	18	711	4358	2,06
8	1746	348633	18992711	2,54
16	2351250	$55222 \bullet 10^6$	$360{,}7 \bullet 10^{12}$	2,5000

(17)

Вычисление моментов производилось по формулам [3]

$$\begin{aligned} m_{2\nu} &= m_{\nu}^2 - 2m_{\nu\nu}, \\ m_{2\nu 2\nu} &= m_{\nu\nu}^2 - 2m_{\nu}m_{\nu\nu}, \\ m_{2\nu 2\nu 2\nu} &= m_{\nu\nu\nu}^2. \end{aligned} \tag{18}$$

Наличие отрицательных моментов второго порядка говорит о том, что второй и третий корни уравнения (16) комплексны. Первое значение искомого момента действительно

$$d_{11} = 2{,}5 \tag{19}$$

Подставляем найденные значения моментов (15), (19) в уравнение-оригинал (12)

$$Z^2 - 2{,}5Z + 1 = 0 \tag{20}$$

и вычисляем его корни

$$Z_1 = 2, \qquad Z_2 = 0{,}5 \tag{21}$$

которые и являются корнями третьей степени из заданной пары чисел Z_{31} и Z_{32}.

Пример 2.

Требуется извлечь корень пятой степени из числа $Z_{51} = 32$ и ему обратного $Z_{51} = \frac{1}{32}$.

Как и в предыдущем примере, полагаем, что заданная пара чисел является корнями уравнения-образа на плоскости пятого порядка

$$\begin{aligned}&Z_5^2 - d_5 Z_5 + d_{55} = Z_5^2 - \left(Z_{51} + Z_{52}\right)Z_5 + \\ &+ Z_{51}Z_{52} = Z_5^2 - 32{,}03125 Z_5 + 1 = 0\end{aligned} \qquad (22)$$

Образ построен стандартным отображением, функцией

$$Z_5 = Z^5 \qquad (23)$$

а оригиналом является уравнение

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \qquad (24)$$

Из таблиц [3] выписываем систему уравнений связи моментов образа и оригинала (22), (24)

$$\begin{aligned}&d_5 = d_1^5 - 5d_{11}d_1^3 + d_{11}^2 d_1, \\ &d_{55} = d_{11}^5.\end{aligned} \qquad (25)$$

Вычисляем второй момент оригинала (22), (25)

$$d_{11} = \sqrt[5]{Z_{55}} = 1 \qquad (26)$$

и строим уравнение для определения момента первого порядка

$$\begin{aligned}&d_1^5 - 5d_1^3 + 5d_1 - 32{,}03125 = d_1^5 - 0 \cdot d_1^4 + (-5)d_1^3 - \\ &- 0 \cdot d_1^2 + 5d_1 - 32{,}03125 = 0\end{aligned} \qquad (27)$$

Вычисляем моменты отображения и корни полученного уравнения (27) и заносим их в таблицу

ν	p_ν	$p_{\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu\nu\nu}$	$d_1(\nu)$
1	0	-5	0	5	32,03125	–
2	10	35	50	25	1024	3,2

4	30	275	21230	-101775	1048576	2,9
8	350	$-1,4 \cdot 10^{6}$	$569,6 \cdot 10^{6}$	$-34164 \cdot 10^{6}$	$1,0995 \cdot 10^{12}$	2,64
16	$2,9 \cdot 10^{6}$	$1,5 \cdot 10^{6}$	–	–	–	2,54
32	$5,565 \cdot 10^{12}$	–	–	–	–	2,50

(28)

Моменты вычислялись по формулам [3]

$$\begin{aligned} p_{2v} &= p_v^2 - 2p_{vv}, \\ p_{2v2v} &= p_{vv}^2 - 2p_v p_{vvv} + 2p_{vvvv}, \\ p_{2v2v2v} &= p_{vvv}^2 - 2p_{vv} p_{vvvv} + 2p_v p_{vvvvv}, \\ p_{2v2v2v} &= p_{vvvv}^2 - 2p_{vvv} p_{vvvvv}, \\ p_{2v2v2v2v2v} &= p_{vvvvv}^2. \end{aligned} \tag{29}$$

Анализ моментов показывает, что две пары младших корней уравнения (27) комплексны. Старший — действителен и принимается в качестве первого момента уравнения-оригинала (24)

$$Z^2 - 2,5Z + 1 = 0 \tag{30}$$

Два корня уравнения-оригинала

$$Z_1 = 2, \quad Z_2 = 0,5 \tag{31}$$

представляют собой корни из заданного и ему обратного чисел Z_{51} и Z_{52}.

Вычисление корней черных степеней следует производить в два этапа. Сначала извлекается квадратный корень, пока не останется нечетная степень, а затем извлекать корень нечетной степени.

Список литературы

1. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. — Наука, 1980.
2. *Корчагин И.Ф.* Решение алгебраических уравнений высоких степеней. — 2002.
   http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html
3. *Корчагин И.Ф.* Симметричные алгебраические моменты. — 2003.
   http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html
4. *Корчагин И.Ф.* Отображение алгебраических функций. — 2003.
   http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html
5. *Корчагин И.Ф.* Анализ и синтез математических моделей физических устройств и процессов. — 2004.
   http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html
6. *Корчагин И.Ф.* Общее предельное решение алгебраических уравнений. — 2005.
   http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html
7. *Корчагин И. Ф.* Теория отображений алгебраических функций.-2005.
   http: // www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Научное издание

КОРЧАГИН Игорь Федорович

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Подписано в печать 08.11.2005. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. Л. 9,3. Уч.-изд. л. 8,0
Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство «Физматкнига»
141700, г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 6*б*
Тел. (095) 408-76-81, (095) 409-93-28

Отпечатано в ГУП Типография «Наука» АИЦ РАН
1210099, Москва, Шубинский пер., 6