

И.Ф.КОРЧАГИН

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ  
СИНТЕЗ И АНАЛИЗ  
МАТЕМАТИЧЕСКИХ  
МОДЕЛЕЙ**

Москва  
ФИЗМАТКНИГА  
2006

**Корчагин И. Ф.** Аналитический синтез и анализ математических моделей. — М.: Физматкнига, 2006. — 80 с. ISBN 5-89155-150-0.

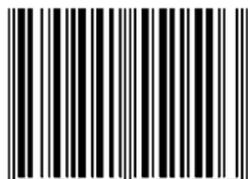
На примерах уравнений второй, третьей, четвёртой и пятой степеней изложен, основанный на теории отображений функций, аналитический аппарат синтеза и анализа математических моделей.

Предлагаемый аппарат позволяет анализировать новые явления, проектировать физические процессы и устройства вплоть, до вычисления номиналов составляющих частей, причем, соответственно, более обоснованно, экономично и надежно в сравнении с лабораторно-стендовым или компьютерным методами моделирования.

Работа предназначена для студентов, аспирантов, инженеров и научных работников физико-технической и математической специальностей.

Печатается по оригинал-макету, предоставленному автором

ISBN 5-89155-150-0



9 785891 551503

© Корчагин И.Ф., 2006

## ОТ АВТОРА

Одновременно издано три книжки: «АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ», «ТЕОРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ», и настоящее издание – «АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ», явившиеся первым и не очень удачным, результатом обобщения материала нарабатывавшегося более тридцати лет. Работа над книгами велась в приведённой последовательности. В приведённой последовательности, с ними следовало бы и знакомиться. Но каждая из них, как оказалось, содержит достаточно информации, для того чтобы читать их в произвольном порядке.

Основной работой является теория отображений. Однако теория отображений стала подвластной только после разработки «ТЕОРИИ СИММЕТРИЧНЫХ МОМЕНТОВ», как аппарата позволившего реализовать отображение. «Теория симметричных моментов» вошла составной частью в теорию отображений.

Помимо того, что теория отображений сама является достаточно серьёзным научным шагом, на сегодняшний день можно видеть, по меньшей мере, три её значимых приложения. Первое – это возможность построения метода общего предельного решения алгебраических уравнений. Второе – это возможность систематизированного подхода к разработке алгоритмов численного решения уравнений. Третье – это возможность направленного синтеза функций, в частности, функций математических моделей физических устройств, процессов, вновь изучаемых явлений, и т.д. Можно отметить ещё и возможные самостоятельные приложения «Теории симметричных моментов» к теориям чисел, вероятности, статистики, и т.д.

К основному достижению работ следует отнести построение метода *общего предельного решения алгебраических уравнений*.

Действительно, если *математика - это анализ и синтез функций*, а *синтез - это построение функций по заданным значениям аргумента*, то *анализ - это нахождение аргумента по заданному значению функции*, это *обратная задача синтезу*, это *решение уравнений*. У математики нет второй половины, если нет анализа. Нет численного, общего (и других) методов решения уравнений. История математики - это история поисков решения уравнений. В математике не было учёного, который бы не сталкивался и не занимался бы этой проблемой.

Несмотря на полную новизну излагаемого материала, автор относит его, уже сейчас, к рекомендуемому минимуму для студентов, аспирантов и специалистов технических, физических и математических специальностей.

Пользуюсь случаем выразить благодарность своему сыну и бесконечному спонсору, бизнесмену **Корчагину Сергею Игоревичу**. Без его поддержки настоящим трудам не суждено было бы увидеть свет.

Автор.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

1.	Введение.....	5
1.1.	Функция-оригинал.....	6
1.2.	Анализ функции-оригинала.....	6
1.3.	Формирование требований к функции-образу.....	7
1.4.	Синтез функции-образа.....	7
1.5.	Вычисление номиналов физических элементов составляющих макет-образ.....	8
2.	Функции моделей второго порядка.....	8
2.1.	Общие положения.....	8
2.2.	Анализ функции-оригинала математической модели.....	12
2.3.	Формирование требований к функции-образу математической модели.....	17
2.3.1.	Построение фигуры функции заданной модели.....	17
2.3.2.	Формулирование желательных качеств для функции – образа.....	20
2.3.3.	Обязательные требования к функции – образа.....	23
2.4.	Синтез функции-образа математической модели.....	25
2.5.	Вычисление номиналов физических элементов синтезированной модели.....	30
2.5.1.	Новая трактовка понятия отображение.....	30
2.5.2.	Построение системы уравнений для вычисления номиналов физических элементов синтезированной модели.....	32
2.5.3.	Пример вычисления номиналов физических элементов синтезированной модели.....	34
3.	Функции моделей третьего порядка.....	37
3.1.	Обобщённая фигура функции третьего порядка.....	37
3.2.	Анализ числового примера функции третьего порядка.....	41
3.3.	Синтез математической модели.....	46
4.	Функции моделей четвёртого порядка.....	54
4.1.	Обобщённая фигура функции четвёртого порядка.....	54
4.2.	Анализ числового примера функции четвёртого порядка.....	57
4.3.	Синтез математической модели.....	62
5.	Функции моделей пятого порядка.....	67

## 1. Введение.

Экспериментально-стендовый или компьютерный методы моделирования заключаются в медленном или быстром, но слепом переборе проб в поисках «удачного» варианта строящегося проекта.

Настоящий подход основан на экспериментально-математическом решении поставленной задачи. На всех этапах работы, от формирования макета-оригинала до построения макета-образа, разработчик опирается на эксперимент. Строит и анализирует рабочие функции и общие решения. Синтезирует на основе отображения задуманную, более совершенную модель. Вычисляет номиналы физических элементов составляющих макет-образ, и воплощает его.

Ниже, понятие модель будем раскрывать как некоторое подобие существующему или разрабатываемому объекту.

Макет определим как некоторую, возможно упрощённую, но работающую миниатюру исследуемого объекта.

Понятие математическая модель будем представлять как математическую функцию или уравнение полученные в результате аналитического описания работы макета исследуемого объекта.

Намечаемая работа представляет собой достаточно сложный, многоэтапный процесс, изучение которого целесообразно начать с более подробного рассмотрения его отдельных общих стадий. В процессе конкретной работы эти стадии, конечно, будут переставляться, видоизменяться и дополняться. Так как настоящая работа - это первая попытка начать работать головой, а не руками. Такая возможность наступила с разработкой «Теории отображений» и её не следует упускать, если мы не хотим отставать и догонять.

## 1.1. Функция-оригинал.

1.1.1. Начнём с того, что на основании изучения прототипов, опыта, интуиции и эксперимента должна возникнуть идея создания какого-то устройства, процесса или познания некоторого нового явления.

1.1.2. Идея должна быть материализована в некотором макете-оригинале. Т.е., должна быть разработана принципиальная схема проекта, должны быть смонтированы комплектующие элементы макета, должен быть осуществлён монтаж макета.

1.1.3. Номиналы комплектующих элементов должны быть согласованы между собой *технологическими связями*, обеспечивающими соотношение вход-выход макета.

1.1.4. Макет должен работать. Вход-выход его должны соответствовать заложенной идее.

1.1.5. Работа макета должна быть описана математически функцией – оригиналом, которую мы называем так же рабочей функцией или математической моделью - оригиналом.

## 1.2. Анализ функции-оригинала.

1.2.1. Производится графическое построение пространственной фигуры рабочей или образующей уравнение функции в своём собственном пространстве.

1.2.2. Анализируется конструкция фигуры функции (взаимная удалённость экстремумов по вертикали и горизонтали, крутизна склонов); пространственное расположение фигуры функции; характер и расположение корней, и т.д.

1.2.3. Выводятся общие выражения для корней функции-оригинала, определяется их численное значение. Анализируется зависимость сигналов вход-выход и других параметров модели от номиналов физических элементов, комплектующих макет.

1.2.4. Оценивается расположение и возможность перемещения рабочей точки и интервала регулирования.

1.2.5. Оценивается устойчивость работы макета и возможность перемещения (корректировки положения) рабочей точки с целью изменения состояния устойчивости.

### **1.3. Формирование требований к функции-образу.**

1.3.1. Графическое построение фигуры синтезируемой функции с учётом требований к качеству и размещению в пространстве.

1.3.2. Задание размещения рабочей точки и интервала регулирования на «теле» функции.

1.3.3. Задание крутизны и линейности участка регулирования рабочей функции.

1.3.4. Количественное задание уровней устойчивости, надёжности, экономичности и других качественных характеристик проекта в функции номиналов физических элементов, сигналов и других параметров модели, определяющих коэффициенты функции-образа.

1.3.5. Формирование требований к функции синтезируемой модели в форме уравнений связи между коэффициентами функции-образа.

### **1.4. Синтез функции-образа.**

1.4.1. Выбор количества ступеней отображения и функций отображения, исходя из требований (1.3.5.) к функции-образу.

1.4.2. Синтезирование функции-образа, включая численное вычисление коэффициентов.

1.4.3. Проверка сходства (оно должно быть полным) синтезированной функции с предполагаемым видом, размещением и другими характеристикам (1.3.) создаваемой функции-образа.

## **1.5. Вычисление номиналов физических элементов составляющих макет-образ.**

1.5.1. Представление отображения как преобразования внутри одного (заданного) пространства.

1.5.2. Построение системы уравнений для вычисления номиналов физических элементов макета-образа.

1.5.3. Вычисление номиналов составных частей макета-образа.

1.5.4. Построение и испытание макета-образа.

1.5.5. Корректировка номиналов физических элементов макета-образа на основе общих решений (1.2.3.) функции-образа.

## **2. Функции второго порядка**

### **2.1. Общие положения.**

Математическая модель - это математическая функция или образуемое ею уравнение, полученные в результате аналитического описания работы реального устройства или процесса.

Таким процессом может быть работа существующего или проектируемого устройства или движение изучаемого физического явления. Причём выходной параметр исследуемого процесса отождествляется со значением функции (математической модели), а входной - с её аргументом.

Математическую функцию мы называем физически реализуемой, если она может быть материализована в каком либо устройстве или процессе.

Ниже, в качестве таковых, будут рассматриваться действительные алгебраические (полиномиальные) функции [6].

Функция математической модели, по определению, физически реализуема, так как воссоздаётся по объективно существующему образцу.

Математически, физическая реализуемость функции обозначается и определяется как её действительность, в то время как аргумент математической модели, в общем случае, - комплексная величина, хотя и физически реальная. Примером действительной функции от комплексного аргумента является математическая модель электротехнического устройства, содержащего реактивность. В настоящей работе, в качестве математических моделей, рассматриваются действительные, алгебраические функции комплексного переменного, при описании процесса или устройства в стационарном, установившемся режиме работы. С алгебраическими уравнениями будем иметь дело при описании процессов или устройств в их переходных режимах работы.

Из действительности физически реализуемой алгебраической функции следуют два других её важных свойства - попарная сопряжённость комплексных корней и действительность коэффициентов. Причём, все три свойства функции равносильны, т.е. если имеет место одно из них, то два других являются следствиями первого.

Пусть, например, задана функция  $v$ -того порядка от комплексного переменного

$$Q_v(Z) = Z^v + q_1 Z^{v-1} + \dots + q_v = \quad (1)$$

Здесь и далее, функции будем различать величинами порядков, а уравнения - степенями аргумента.

Пусть также известно, что заданная (1) функция действительна. Тогда, представив её в форме решения

$$= (Z - Z_1)(Z - Z_2) \dots (Z - Z_v) \quad (2)$$

видим, что действительной функция может быть только в случае, когда комплексные корни её попарно сопряжены.

Построим функцию  $\overline{Q_v(Z)}$  сопряжённую заданной (1),  $Q_v(Z)$

$$\overline{Q_v(Z)} = Z^v + \overline{q_1}Z^{v-1} + \dots + \overline{q_v} \quad (3)$$

Но, по условию, функция действительна и поэтому должна совпадать с себе сопряжённой

$$Q_v(Z) = \overline{Q_v(Z)} \quad (4)$$

равны и действительны, следовательно, все соответствующие коэффициенты ( $q_v = \overline{q_v}$ ) заданной (1) и сопряжённой (3) функций.

Если известно, что действительны коэффициенты ( $q$ ) функции (1), то она действительна, так как совпадает с себе сопряжённой и, следовательно, комплексные корни заданной функции (1) попарно сопряжены.

Наконец, если известно, что попарно сопряжены комплексные корни заданной функции (1), то действительность её является следствием представления в форме решения (2), а действительность коэффициентов вытекает из равенства (4) с себе сопряжённой функцией (3).

В порядке следствия, из сформулированного тройственного свойства алгебраических функций можно заключить, что функция математической модели может быть только действительной, коэффициенты её могут быть только действительными и только действительными или попарно комплексно сопряжёнными могут быть её корни.

Из представления алгебраической функции в канонической форме (1) и в форме решения (2) следует ещё одно используемое тройственное свойство.

Порядок величины исследуемой функции математической модели, количество её корней и количество коэффициентов равны между собой.

Важным для дальнейшего свойством алгебраических функций является их единственность. Две функции тождественны, совпадают, если совпадают их корни. Т.е., например, если на плоскости аргумента отмечены две точки, то существует только одна, единственная функция второго порядка, которая имеет эти две точки своими корнями. Свойство единственности вытекает из представления функции в форме решения (2) и единственности представления её коэффициентов заданными корнями через формулы Виета. Более того,

произвольно распределённых пространственных точек могут принадлежать только одной единственной алгебраической функции  $\nu$ -того порядка [6].

Действительно, подставив, поочерёдно, в алгебраическую функцию (1)  $\nu$  произвольно выбранных пространственных точек  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_\nu)$ , можно получить систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} q_1 Z_1^{\nu-1} + q_2 Z_1^{\nu-2} + \dots + q_\nu &= Q_\nu(Z_1) - Z_1^\nu \\ q_1 Z_2^{\nu-1} + q_2 Z_2^{\nu-2} + \dots + q_\nu &= Q_\nu(Z_2) - Z_2^\nu \\ \dots & \\ q_1 Z_\nu^{\nu-1} + q_2 Z_\nu^{\nu-2} + \dots + q_\nu &= Q_\nu(Z_\nu) - Z_\nu^\nu \end{aligned}$$

относительно однозначно определяемых коэффициентов ( $q$ ), которые, в свою очередь, однозначно определяют алгебраическую функцию  $Q_\nu(Z)$  (1), несущую на своём «теле» выбранные точки  $(Z_\nu)$ .

Из сказанного следует, что для синтеза новой функции математической модели, достаточно задать некоторое определённое количество её корней или других, нужным образом (в том числе пространственно) распределённых, точек её будущего «тела». Здесь, как это будет показано ниже, имеется в виду, что действительная алгебраическая функция  $\nu$ -того порядка, графически, представляет собой  $\nu$ -линейчатую объёмную фигуру в трёхмерном комплексном пространстве [6].

## 2.2. Анализ функции-оригинала математической модели

Пусть на основании аналогий, опыта, интуиции и промежуточного макетирования создан действующий макет, а математическое описание его работы завершилось написанием функции второго порядка

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = Z^2 - d_1Z + d_{11} \quad (5)$$

Функция построенной математической модели (5) представлена в биномиальной и канонической знакопеременных формах записи. Коэффициенты её определяются (являются) функциями номиналов физических элементов макета. Аргумент функции ( $Z = X + iY$ ) – комплексная величина. Сама функция действительна, что может быть отражено записью её в виде системы

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_2(Z) &= \operatorname{Re}(Z^2 - 2a_1Z + a_2) = X^2 - 2a_1X + a_2 + (iY)^2 \\ i \operatorname{Im} A_2(Z) &= 2(iY)(X - a_1) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Первое из выражений представленной системы определяет действительную функцию двух действительных переменных ( $X$  и  $Y$ ). Второе выражение системы (6) отражает факт отсутствия у заданной функции (5) мнимой части. Одновременно, как уравнение, второе выражение указывает на взаимную связь переменных ( $X$  и  $Y$ ), а графически представляет собой “кривую” на плоскости аргумента. Кривая эта, является проекцией фигуры заданной функции (5,6), которая расположена в пространстве над ней.

Из сказанного следует, что фигура функции (5) расположена в трёхмерном комплексном пространстве с действительной ординатой -  $\operatorname{Re} A_2$  и комплексной плоскостью аргумента -  $X+iY$ . Она расположена над комплексными точками плоскости аргумента, но принимает только (!) действительные значения.

Построение графиков функций основывается на известных приёмах математического анализа.

График действительной функции (6) состоит из двух парабол второго порядка. Первая парабола –  $A - A'$  (рис. 1)

$$Y = 0 = \text{const}, \quad X = \text{var}$$

$$\text{Re } A_2(Z) = X^2 - 2a_1X + a_2 = (X - a_1)^2 + a_{02} \quad (7)$$

лежит в действительной плоскости ( $A_2 0X$ ) (в плоскости листа рисунка 1). Вершина параболы лежит над плоскостью аргумента, на расстоянии дискриминанта ( $a_{02}$ ). Абсцисса вершины – это первый коэффициент ( $a_1$ ) функции (5). Вторая парабола –  $B - B'$  (рис. 1)

$$X = a_1 = \text{const}, \quad Y = \text{var}$$

$$\text{Re } A_2(Z) = -a_1^2 + a_2 + (iY)^2 = a_{02} + (iY)^2 \quad (8)$$

конструктивно совпадающая с параболой  $A - A'$ , лежит в комплексной плоскости ( $X = a_1$ ) перпендикулярной оси  $X$  (плотный штрих), но представляет собой действительную (!) функцию. В развороте на плоскость листа парабола ( $B - B'$ ) показана тонким штрихом ( $B_2 - B'_2$ ). Вершина параболы ( $B - B'$ ) совпадает с вершиной параболы ( $A - A'$ ). Точка вершины параболы принадлежит параболе ( $A - A'$ ). Общая абсцисса ( $X = a_1$ ) вершин парабол определяет положение вертикальной оси симметрии получившейся пространственной линейчатой фигуры, представляющей собой график действительной функции второго порядка (5,6). Любое из сечений построенной линейчатой фигуры плоскостью  $A_2 = \text{const}$ , параллельной плоскости аргумента, определяет двумя точками проколов некоторое алгебраическое уравнение второй степени

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = \text{const} \quad (9)$$

В частности, если рассматривать сечение фигуры плоскостью аргумента, то уравнение имеет вид

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = 0 \quad (10)$$

Таким образом, график алгебраического уравнения можно рассматривать как след фигуры действительной функции (6) комплексного переменного, оставленный на плоскости аргумента или любой другой секущей плоскости.

В связи с чем, действительную алгебраическую функцию (6) называем образующей (уравнения) функцией.

Положение фигуры функции в пространстве, по вертикали определяется величиной её дискриминанта или, что то же самое, инварианта линейного отображения  $a_{02}$ . Положение по горизонтали определяется величиной первого коэффициента  $a_1$  функции. Функция и пространство, под которым понимается центр отсчёта и координаты - единое целое, определяемое коэффициентами аналитически заданной функции (5). Как правило, определяется положение фигуры функции относительно её собственной системы координат. Однако, можно и наоборот, определять положение системы отсчёта относительно заданного положения функции. На этом приёме построен описываемый ниже метод графической, качественной и количественной оценки корней функции (6) или, что то же самое, корней алгебраического уравнения (10).

Подставим численные значения номиналов физических элементов макета ( предположим это будут элементы R,L,C) в формулы определяющие коэффициенты заданной функции (5), и найдём численные величины этих коэффициентов. Пусть, например, они будут равны:

$$\begin{aligned} a_1(R, L, C) &= 4 \\ a_2(R, L, C) &= 15 \end{aligned} \quad (11)$$

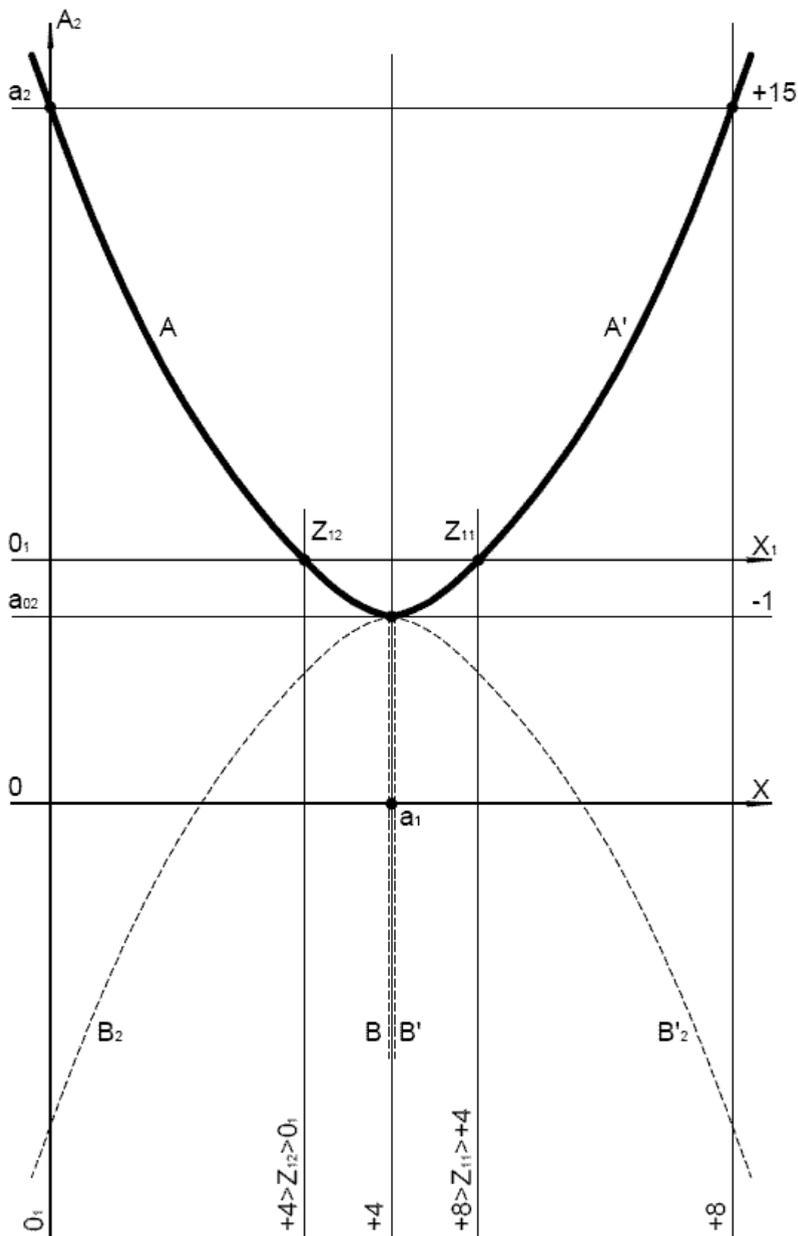


Рис. 1. Фигура функции второго порядка

Вычисляем инвариант второго порядка заданной численно (11) функции (5)

$$a_{02} = -a_1^2 + a_2 = -1 \quad (12)$$

и наносим, как на шаблон, на выносные линии построенного обобщённого рисунка (рис. 1) функции второго порядка, численные значения абсциссы  $a_1$  оси симметрии фигуры заданной функции (11); ординаты ( $a_2$ ) пересечения линии фигуры с осью ординат; ординаты ( $a_{02}$ ) вершин парабол.

Ориентируясь на численные значения поставленных величин, наносим на рисунок след плоскости аргумента (линию  $O_1X_1$ ) и оси координат собственного пространства функции, определяя тем самым положение центра отсчёта пространства относительно фигуры заданной функции (11). Отмечая места проколов линиями фигуры функции плоскости аргумента пространства, ориентировочно определяем корни заданной функции (1, 11) или, что то же самое, корни уравнения (10) с принятыми численными значениями (11) коэффициентов

$$\begin{aligned} +4 > Z_{12} > 0 \\ +8 > Z_{11} > \end{aligned} \quad (13)$$

Итак, определено – корни заданной функции (10,11) действительны и положительны (13). Истинно, величины корней (для сравнения) соответственно равны

$$\begin{aligned} Z_{12} &= +3 \\ Z_{11} &= +5 \end{aligned} \quad (14)$$

и, как видим, соответствует сделанным из графического анализа ориентировочным выводам (13).

Проведённая качественная оценка характера корней на плоскости аргумента, их величины и расположения на линиях обобщённой фигуры функции представляет собой хоть и верную, но предварительную и всего лишь констатирующую часть анализа. Более полная информация о процессе, описываемом заданной функцией может быть получена из рассмотрения её

собственной, частной фигуры в своём собственном пространстве. Там, только, могут рассматриваться и идеи о совершенствовании модели.

## 2.3. Формирование требований к функции-образу математической модели

### 2.3.1. Построение фигуры функции заданной модели

Решение поставленной задачи начинается с построения частной фигуры заданной математической модели в своём собственном пространстве. Построение ведём упрощенно, соединяя отрезками прямых (рис.2) нанесённые на заготовленную координатную плоскость характерные точки фигуры функции (10,11).

Точка  $a_{02}$  – дискриминанта фигуры функции, в сечении которой сошлись два действительных корня, а в окрестности берут начало два комплексно сопряжённых. Координаты этой точки известны. Абсцисса (11) -  $a_1 = 4$ , ордината (12)-  $a_{02} = -1$ .

Точки сечения фигуры функции (рис. 1), в котором один из корней образуемого уравнения равен нулю

$$A_{21}(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = a_2 = const \quad (15)$$

Ординаты точек сечения равны между собой и определяются величиной свободного коэффициента (11)

$A_{21} = A_{22} = a_2 = 15$ . Абсциссы точек, в соответствии с построенным уравнением (15), равны  $X(A_{22}) = 2a = 8$ ,

$$X(A_{21}) = 0,$$

Корни функции математической модели требуют не только численного, но и общего решения. Численные решения – констатирующие решения. Решения, указывающие на наличие

или отсутствие требуемой качественной характеристики (устойчивость, надежность, экономность и т.д.). Общее решение – это решение в функции номиналов физических элементов и поэтому указывает на возможные пути изменения (или достижения) требуемых значений для интересующих нас характеристик математической модели.

Общее решение для корней функций второго порядка известно

$$Z_{12} = a_1 \pm i\sqrt{a_{02}} = a_1 \pm i\sqrt{-a_1^2 + a_2} \quad (16)$$

В рассматриваемом случае (10,11) математической модели (численно) корни равны

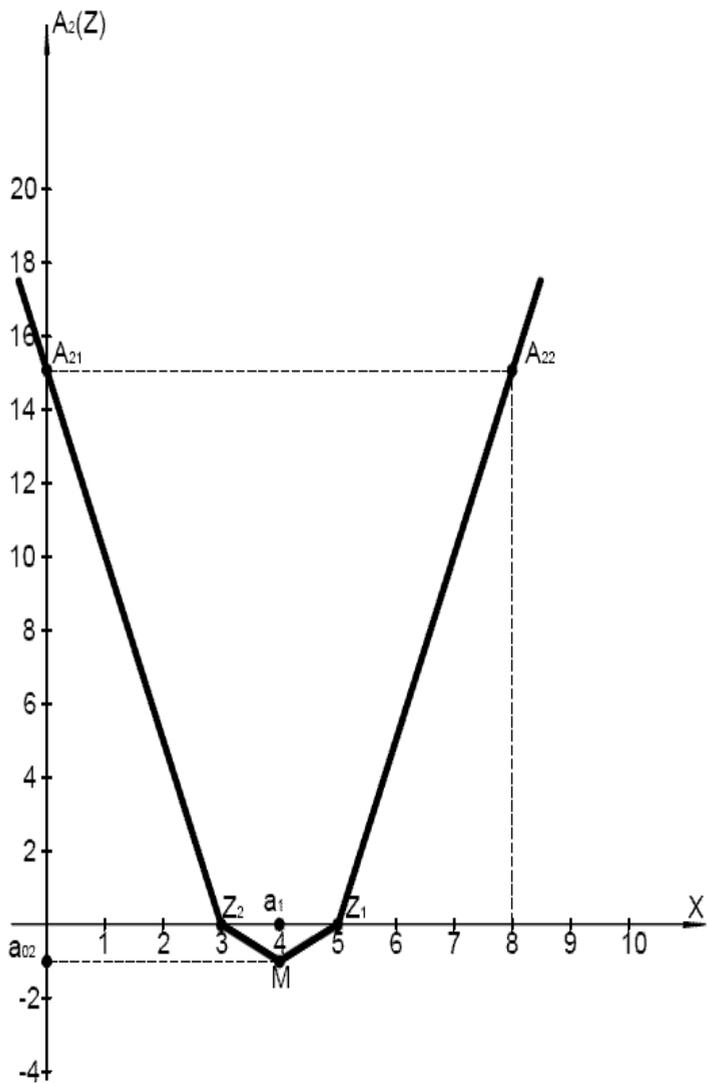
$$Z_1 = 5, \quad Z_2 = 3 \quad (17)$$

Для вычисления корней уравнений более высоких степеней следует пользоваться общими предельными решениями [6]. Эти решения более сложны, но позволяют производить анализ с требуемой точностью и, самое главное, уравнений, практически, любых степеней.

Применим, для примера, предельное решение к рассматриваемой функции (10,11). Так для первого корня в четвёртом приближении имеем

$$\begin{aligned} Z_1(4) &= \sqrt[4]{d_4} = \sqrt[4]{d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2} = \\ &= \sqrt[4]{(2a_1)^4 - 4(2a_1)^2 a_2 + 2a_2^2} = \\ &= \sqrt[4]{8^4 - 4 * 8^2 * 15 + 2 * 15^2} = \sqrt[4]{706} = 5,15 \end{aligned} \quad (18)$$

результат с ошибкой в 3%. Повторное же вычисление через



2. Фигура функции заданной математической модели

стандартное отображение функцией четвёртого порядка даёт решение уже в шестнадцатом приближении

$$\begin{aligned} Z_1(16) &= \sqrt[16]{d_{16}} = \sqrt[16]{d_4^4 - 4d_4^2 d_{44} + 2d_{44}^2} = \\ &= \sqrt[16]{706^4 - 4 * 706^2 * 15^4 + 2 * 15^8} = 5,00009 \end{aligned} \quad (19)$$

с ошибкой не превышающей 0,002%.

Сравнение результатов и формул общего решения (16) и предельного общего (18,19) показывает, что предельное решение не может быть отвергнуто даже в случае, когда анализу подвергается функция всего лишь второго порядка. Что же касается функций более высоких порядков, то решений (общих, в приемлемой форме), кроме предельного, вообще не существует.

### 2.3.2. Формулирование желательных качеств

Проведённое графическое построение имеет своим назначением дать дополнительные сведения о текущем состоянии разработки и помочь собрать критический материал для формулирования требований к функции-образу синтезируемой модели. Причём, речь здесь идёт пока лишь о сборе требований и пожеланий для последующего их представления в пригодной для реализации форме.

Построенная по вычисленным координатам характерных точек фигура функции заданной математической модели (10,11) (рис.2), с точки зрения разработчика устройства, может оказаться, имеет недостатком положительность корней ( $Z_1$  и  $Z_2$ ). Этот недостаток устраняется линейным отображением, зеркально или параллельно переносящим заданную функцию из I-IV квадрантов в III - II квадранты плоскости аргумента. В рассматриваемом случае, первому коэффициенту ( $a_{21}$ ) функции образа будет придан минусовой знак (рис.3) и нужная величина по ходу более сложных предстоящих преобразований.

Второй недостаток заданной фигуры (рис.2) может быть усмотрен в относительной близости вершины параболы с ординатой ( $a_{02} = -1$ ) к действительной оси ( $X$ ) пространства. Желательно, чтобы отношение ( $p_2$ ) высоты ( $a_1M$ ) к основанию ( $Z_1 - Z_2$ ) (рис.2)

$$p_2(Z_1 - Z_2) = a_{02} \quad (20)$$

в треугольнике ( $Z_1, Z_2, M$ ) нижней части фигуры параболы было значительно больше. Сейчас это отношение равно  $p_2 = 0,5$ . Хотелось бы, чтобы у образа это отношение было равным, например, 3 (трём). Реализация пожелания (20) обусловлена вычислением и приданием определённых значений коэффициентам синтезируемой функции. Такая операция возможна только на основании выбора соответствующего значения для параметра функции отображения. Т.е., у функции отображения должен быть заложен коэффициент-параметр «ответственный» за реализацию назначенного требования. И вообще, по крайней мере для начала, любое требование накладываемое на функцию-образ целесообразно уравнивать добавлением очередного параметра (коэффициента) у функции отображения. Возможный избыток в порядке величины функции отображения достаточно просто устраняется в процессе дальнейших выкладок, не слишком усложняя последние. Недостаток же параметров отображения бракует работу.

Третий недостаток заданной фигуры (рис.2), можно увидеть в относительной близости корней ( $Z_1$  и  $Z_2$ ) к началу координат. Желательно, чтобы отношение ( $\alpha$ ) большего из корней к их разности

$$\alpha(Z_1 - Z_2) = Z_1 \quad (21)$$

было значительнее (в оригинале оно равно  $\alpha = 2,5$ ). Принимаем для обновлённой функции это отношение равным 3 (трём).

Высказанное пожелание (21) обусловлено наложением требования на величину дискриминанта ( $Z_{21} - Z_{22}$ ) синтезируемой функции, т.е. тоже потребует введения в функцию

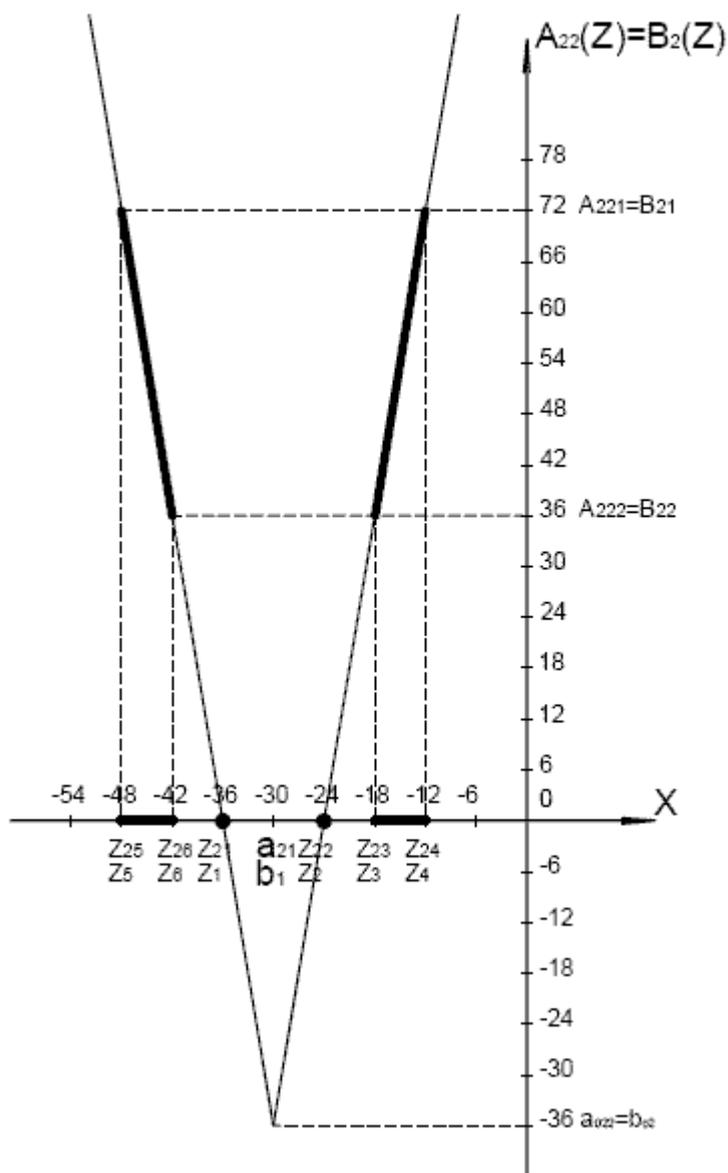


Рис. 3. Желательный и действительный вид обновленной фигуры функции математической модели

преобразования очередного, своего, параметра отображения.

Фигура синтезируемой функции-образа соответствующая высказанным (20,21) пожеланиям представлена на рис.3. Для выполнения намечаемых двух (20,21) пожеланий функция отображения должна [7] содержать два параметра, т.е. быть функцией второго порядка. Требования отрицательности нулей синтезируемой функции будет учитываться попутно.

Физически, требования (20,21) к функции-образу свелись к перемещению фигуры рабочей функции в сторону больших отрицательных корней для достижения эффекта устойчивости и «подтоплению» фигуры функции на плоскости аргумента, с целью вывода рабочей точки на более крутой и линейный участок регулирования.

### **2.3.3.Обязательные требования к функции-образу**

Помимо включения желательных, недостающих качественных характеристик модель и макет образа должны сохранить потребительскую функцию, суть – «основное качественное свойство», модели и макета оригинала.

(Велосипед должен остаться велосипедом.) Для чего требуется сохранить неизменными, инвариантными отображению уравнения технологических связей физических элементов, при переходе от оригинала к образу. Несоблюдение этих требований приведет к синтезированию новой, отличной по существу от оригинала модели, в то время как задача состоит только лишь в ее качественной доработке. (Велосипед не должен превратиться в пулемёт). Инвариантность технологических связей физических составляющих проекта это не свойство модели, а требование, предъявляемое к преобразованию.

Следствием требования инвариантности технологических связей физических элементов составляющих модель

является требование инвариантности её принципиальной схемы при переходе от оригинала к образу.

Это так, потому что принципиальная схема является графической формой представления технологических связей физических элементов составляющих модель. В силу требования сохранности «*основного качественного свойства*», должны остаться неизменными уравнения технологических связей физических элементов. Значит неизменной, при переходе от оригинала к образу, должна остаться принципиальная схема проекта, являющаяся графической формой представления технологических связей составляющих макет.

Следствием неизменности принципиальной схемы математической модели при переходе от оригинала к образу является инвариантность отображению функции математической модели, т.е. функций коэффициентов определяющих их зависимость от номиналов физических элементов составляющих макет.

Действительно, математическая модель - это описание схемы, а схема неизменна. Следовательно, неизменна и математическая модель. Но функции тождественны только тогда, когда тождественны их соответствующие коэффициенты.

Обобщая сказанное можно резюмировать, что любое изменение технологических связей, в том числе номиналов, физических элементов составляющих модель, сопровождается изменением качественных характеристик модели. В частности, к изменению существующих характеристик анализируемой модели (10,11), приведут намеченные дополнения (20,21) к технологическим связям элементов, которые мы собираемся реализовать для получения новых желательных свойств. Модернизация оригинала невозможна без корректировки технологических связей составляющих элементов. Как и за счёт чего возможно осуществить модернизацию, сохранив «*основное качественное свойство*» модели, будет показано ниже, в разделе (2.5) «Вычисление номиналов...».

Реализация требований в процессе синтеза функции-образа осуществляется через требования, как мы знаем, сформированные на уровне связей коэффициентов. Поэтому,

желательные требования, подготовленные к внедрению в какой либо другой форме, должны быть доработаны до связей на уровне коэффициентов функции-образа.

В рассматриваемом примере модели (10.11) требования формулировались на уровне связей между корнями (20,21). В следующем параграфе (2.4.), они будут сформированы на уровне связи коэффициентов функции-образа. На уровне необходимом для реализации.

## 2.4. Синтез функции-образа математической модели

Итак, предстоит преобразовать функцию (10,11) второго порядка (функцию-оригинал)

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_{11}Z + a_{12} = Z^2 - d_1Z + d_{11} \quad (22)$$

В качестве преобразующей функции, в соответствии с выводами (2.3.2.) сделанными после сбора требований к функции-образа, выбирается функция второго порядка. Образы корней при этом, через корни функции-оригинала, будут выражаться формулами

$$\begin{aligned} Z_{21} &= q_0 Z_1^2 + q_1 Z_1^1 + q_2 Z_1^0 \\ Z_{22} &= q_1 Z_2^2 + q_1 Z_2^1 + q_2 Z_2^0 \end{aligned} \quad (23)$$

Функция-образ, таким образом (23) разместится над плоскостью величин второго порядка

$$A_{22}(Z_2) = Z_2^2 - 2a_{21}Z_2^1 + a_{22} \quad (24)$$

и будет представлять собой тоже функцию второго порядка [7], в соответствии с количеством своих (23) корней.

Коэффициенты функции-образа (24) могут быть выражены через коэффициенты функции-оригинала (22) и параметры

отображения ( $q$ ) (23). Делается это подстановкой образов корней в формулы коэффициентов-образов (по Виета)

$$\begin{aligned} 2a_{21} &= Z_{21} + Z_{22} = d_2 + q_1 d_1 + 2q_2 \\ a_{22} &= Z_{21} Z_{22} = d_{22} + q_1 d_{21} + q_2 d_2 + q_1^2 d_{11} + q_1 q_2 + q_2^2 \end{aligned} \quad (25)$$

Может быть вычислен и инвариант линейного отображения функции-образа

$$a_{022} = -a_{21}^2 + a_{22} = a_{02}(q_1 + d_1)^2 \quad (26)$$

Искомой, обновлённой, т.е. удовлетворяющей изложенным (п. 2.3) пожеланиям, функцией математической модели является функция-образ (24). Очередная задача заключается в общем и численном вычислении её характеристик – коэффициентов, инварианта и корней. Решение поставленной задачи осуществляем по следующему плану.

Во-первых, выражаем требования (20,21) к функции-образу, сформулированные в предыдущем параграфе в функциях коэффициентов образа и далее в форме уравнений от параметров отображения ( $q_1, q_2$ ) и известных коэффициентов функции-оригинала (11). Так как, количество параметров функции отображения заранее выбрано равным количеству требований к функции-образу, количество получающихся уравнений должно получиться равным количеству неизвестных  $q$ .

Решая построенную систему, во-вторых, находим общие и численные значения параметров отображения обеспечивающих выполнение требований к функции-образу.

В-третьих, подставляя численные значения параметров отображения в выражение (25) коэффициентов функции-образу, находим численные значения коэффициентов функции-образу.

В-четвёртых, численно вычисляем корни функции-образу. Строим и убеждаемся в том, что фигура функции-образу и свойства её корней и коэффициентов полностью соответствуют заложенным требованиям (20,21).

В-пятых, вычисляем номиналы физических элементов макета функции-образу – это уже новая задача.

Приведённая очередность работ – это общий подход. В частности, как правило, задача решается проще. Так в нашем, конкретном случае (11), требуемая связь (21) для корней образа будет записана соотношением

$$\alpha(Z_{21} - Z_{22}) = Z_{21} \quad (27)$$

Дополним это соотношение коэффициентами функции-образа в форме Виета

$$\begin{aligned} 2a_{21} &= Z_{21} + Z_{22} \\ a_{22} &= Z_{21}Z_{22} \end{aligned} \quad (28)$$

Исключая из полученной системы (28,27), исключая корни, найдём эквивалент требуемой связи (27) выраженным через коэффициенты функции-образа

$$(2\alpha - 1)^2 a_{22} = 4\alpha(\alpha - 1)a_{21}^2 \quad (29)$$

В комментарии к формулировке требования (21) для параметра связи  $\alpha$  уже выбрано численное значение ( $\alpha = 3$ ). Поэтому рассматриваемое требование (29) можно записать в частном виде

$$-24a_{21}^2 + 25a_{22} = a_{21}^2 + 25a_{022} = 0 \quad (30)$$

Требуемое качество (20) функции-образа по части удалённости вершины параболы от действительной оси можно записать формулой

$$p_2(Z_{21} - Z_{22}) = a_{022} \quad (31)$$

С учётом функции отображения (23) вычисляем разность корней функции-образа

$$Z_{21} - Z_{22} = (Z_1^2 - Z_2^2) + q_1(Z_1 - Z_2) = (Z_1 - Z_2)(d_1 + q_1) \quad (32)$$

Имея в виду, что разность корней оригинала равна

$$(Z_1 - Z_2)^2 = d_2 - 2d_{11} = d_1^2 - 4d_{11} = -4a_{02} \quad (33)$$

из приведённых соотношений (33,31,32,25,26) можно получить формулу вычисления первого параметра ( $q_1$ ) отображения

$$q_1 = \frac{2p_2 - d_1 \sqrt{-a_{02}}}{\sqrt{-a_{02}}} \quad (34)$$

В комментариях (20) к введению параметра ( $p_2$ ) удалённости вершин параболы была выбрана его величина ( $p_2=3$ ), что определяет частное значение параметра ( $q_1$ ) отображения

$$q_1 = \frac{2 * 3 - 8 * 1}{1} = -2 \quad (35)$$

Далее, последовательно могут быть найдены численные значения: инварианта второго порядка (26) функции-образа

$$a_{022} = -1 * (-2 + 8)^2 = -36 \quad (36)$$

коэффициенты (29) функции-образа

$$a_{21} = \pm \sqrt{-25(-36)} = -30 \quad (37)$$

(здесь знак минус выбран в соответствии с требованиями)

$$a_{22} = \frac{24}{25} * a_{21}^2 = 864 \quad (38)$$

Наконец, корни функции-образа из системы уравнений (28,27)

$$Z_{21} = \frac{2\alpha}{2\alpha - 1} a_{21} = -36 \quad (39)$$

$$Z_{22} = 2a_{21} - Z_{21} = -24$$

Фигура обновлённой, с учётом пожеланий (требований),

функции математической модели представлена на рис.3. Естественно, она полностью совпадает с намеченным эскизом после нанесения масштабной сетки. Характеристики синтезированной функции

$$A_{22}(Z_2) = Z_2^2 + 2 * 30 * Z_2 + 864 \quad (40)$$

соответствуют заданным требованиям (27,31,36,39)

$$\alpha(Z_{21} - Z_{22}) = Z_{21}$$

$$p_2(Z_{21} - Z_{22}) = a_{022}$$

$$3[-36 - (-24)] = -36$$

$$3[-36 - (-24)] = -36$$

Рисунок фигуры функции (рис.3) позволяет различать две разновидности математических моделей.

Первая – характеризуется постоянством значения функции  $A_{22}(Z) = const$  или выходного параметра макета. Такой макет описывается уравнением. Корни ( $Z_1$  и  $Z_2$ ) уравнения – это значения аргумента образующей функции в нулях. Каждый из корней определяет соответствующий входной параметр макета.

Точка линии образующей функции в нуле,  $A_{22}(Z_1$  или  $Z_2)$  – это рабочая точка процесса. Фиксированный выбором комплекующих элементов выходной параметр макета, его функция в переходном режиме работы.

Изменение входного параметра макета, в любую сторону от значений определяемых корнями ( $Z_1$  или  $Z_2$ ) модели, выводит макет из рабочего состояния, так как соответствующей рабочей точки нет. Новая рабочая точка может появиться только после изменения величин коэффициентов  $a_{21}, a_{22}$ . Т.е. после изменения величин номиналов элементов составляющих макет, или после включения автоматической обратной связи на регулирующий элемент.

Другая разновидность математической модели предполагает наличие непрерывной взаимной связи между изменяющимся входом и соответственно изменяющимся выходом макета. Математическая модель в этом случае – функция, а макет – регулируемый процесс. Здесь могут быть выбраны взаимосвязанные интервалы изменения входного и выходного параметров математической модели и макета.

## 2.5. Вычисление номиналов физических элементов синтезированной функции модели

### 2.5.1. Новая трактовка понятия отображение

До настоящего времени, намеренно, отображение трактовалось как перенос функции оригинала из своего пространства, в пространство образа, в пространство другого измерения. Такая трактовка возможна и она помогла более осязательно воспринять отображение.

Здесь же мы будем говорить о преемственности оригинала и образа, о едином устройстве, процессе, явлении и пространстве соответственно. Следовательно, необходимо перейти и к новой трактовке отображения и рассматривать оригинал и образ не как функции в разных пространствах, а как функции (оригинал и образ) в одном и том же пространстве, в одной и той же системе координат.

Наиболее естественно альтернативная трактовка воспринимаются в случае линейного отображения. Здесь, в равной степени естественно говорить как о переносе функции оригинала на другую плоскость, так и о перемещении ее по плоскости аргумента пространства оригинала в другое положение. Точно такое же допустимо и в случае нелинейного отображения. Ведь речь идет только о трактовке (о сервисе).

Далее мы будем говорить об одном пространстве. Значения аргумента функции - образа (23) будем размещать на плоскости аргумента ( $Z_1$ ) функции - оригинала. Ведь на плоскости  $Z_1$  есть числа равные  $Z_2$ . Значения функции - образа (24) будем размещать на оси ординат функции - оригинала (22). Ведь на оси  $A_2(Z)$  есть числа равные  $A_{22}(Z_2)$ . Другими словами, мы по-численно совмещаем оси ординат и аргумента разных пространств. Если в том есть необходимость, то предварительно, физически (механически) деформируем плоскости аргументов, и, наконец, совмещаем их. Чисто меха-

тически, эта операция означает объединение символов (букв) обозначающих переменные и коэффициенты оригинала и об

раза. Это не замена переменного функции, не отображение, сопровождающееся перерасчётом коэффициентов функции.

Это операция по замене символов переменного и коэффициентов функции. Операция, не изменяющая численных значений коэффициентов. Операция механического (не аналитического) переноса функции из одного пространства в другое.

Если возникают трудности с размерностью, то предварительным отображением всегда можно перейти к безразмерной форме, как заданной функции, так и всех её последующих отображений, сократив все их слагаемые на наименование.

Итак, преобразования закончены. Обновлённую функцию (40) математической модели можно записать в обычных обозначениях, без сложных индексов

$$B_2(Z) = Z^2 - 2b_1Z + b_2 \quad (41)$$

Громоздкие индексы были необходимы только для того чтобы систематизировать сложные буквенные преобразования при переходе от функции-оригинала к функции-образу.

Теперь синтезированная модель (40,42) расположена над той же плоскостью ( $Z_1$ ) величин первого порядка, что и функция-оригинал (22). Синтезированная функция (42) стала новым оригиналом. У неё тот же по размерности входной параметр и тот же выходной, что и у функции-оригинала (22). Но у неё новые значения коэффициентов и расположение корней, новая и по-новому размещенная фигура.

Новое толкование отображения можно обосновать, используя понятие «симметризованного оригинала» [6], где не формально, а по существу, (заменой переменного) функция-образ размещается над плоскостью аргумента оригинала, где её главная из центрально симметричных ветвей и рассматривается в качестве отображения.

Новой математической модели (42) соответствует и новый физически воплощающий её макет. Однако, старыми и неизменными остаются принцип работы макета, его «*основное качественное свойство*», операторы уравнений связи его



Коэффициенты математической модели, полученные в результате её математического описания, представляют собой функции

$$\begin{aligned}
 q_1 &= q_1(R, L, C, H, G, \dots) \\
 q_2 &= q_2(R, L, C, H, G, \dots) \\
 &\dots\dots\dots \\
 q_\nu &= q_\nu(R, L, C, H, G, \dots)
 \end{aligned}
 \tag{42.2}$$

физических элементов макета, численно определённые их номиналами.

Количество коэффициентов функции математической модели-оригинала равно её порядку ( $\nu$ ). Могут среди коэффициентов оказаться и взаимозависимые, однако, здесь будем считать, что связи между коэффициентами отсутствуют.

Полагаем также, что порядки величины функций оригинала и образа совпадают.

Для функции математической модели-образа, т.е. для синтезируемой модели, картина несколько другая.

При переходе от оригинала к образу и при полном сохранении «*основных качественных свойств*» макета-оригинала, формулы технологических связей физических элементов (42.1) и коэффициентов (42.2) не изменяются. Преобразование тождественно, оригинал и образ совпадают.

В случае же, когда реализуются хотя бы какие ни будь требования, коэффициенты синтезируемой модели численно вычисляются (как моменты) через известные моменты модели-оригинала. А, с другой стороны, они по-прежнему остаются инвариантными преобразованию функциями (42.2) относительно физических элементов макета-образа.

Получается, что  $\nu$  численно определённых коэффициентов функции-образа представляют собой систему уравнений (подобную 42.2) относительно физических элементов комплекующих макет-образ. Совместно с  $\sigma$  уравнениями (42.1), инвариантных преобразованию технологических связей элементов макета, коэффициенты функции-образа составят систему из  $(\sigma + \nu)$  уравнений относительно физических элементов макета-образа.

Очевидно, что ранг функциональной матрицы построенной системы уравнений равен количеству ( $\sigma$ ) физических

элементов макета, так как физические элементы макета должны определяться однозначно.

Следовательно, в полученной системе уравнений (42.1,2) технологических связей физических элементов и коэффициентов модели, решаемая, относительно физических элементов макета, любая подсистема из  $\sigma$  (без повторений) уравнений.

Общее число таких подсистем равно числу сочетаний из  $\sigma + \nu$  уравнений по числу  $\sigma$  физических элементов в макете. Не все подсистемы несут в себе позитивный смысл. Так, подсистема уравнений (42.1), как уже было отмечено, определяет тождественное «преобразование» оригинала. Любая из подсистем, в которой отсутствуют главные из технологических связей между физическими элементами, может не сохранить «основные качественные свойства» оригинала.

Обоснованное построение расчётной подсистемы требует серьёзного анализа уравнений при отборе, так как с решением подсистемы завершается аналитический синтез обновлённой математической модели.

### 2.5.3. Пример вычисления номиналов физических элементов синтезированной модели

Пусть макет-оригинал некоторого устройства состоит из физических элементов  $R, L, C$ . А уравнения коэффициентов и технологических связей физических элементов выражаются формулами

$$\begin{aligned}
 2a_1 &= R_1 + L_1 + C_1 & C_1 &= L_1 + l_1 \\
 a_2 &= R_1 C_1 + R_1 L_1 & \alpha_1 C_1 + \alpha_2 L_1 + R_1 &= 0 \\
 & & C_1 L_1 &= \beta R_1^2
 \end{aligned} \tag{43}$$

Математическая модель - оригинал описывающая работу устройства (43) – это анализируемая нами функция

(10,11,22), а её синтезированный образ (41) – это аналитический продукт, описывающий работу обновлённого устройства.

В соответствии с изложенным, требуем, чтобы уравнения коэффициентов математической модели – образа и технологических связей элементов обновлённого макета, выражались теми же, инвариантными отображению форм

мулами (43), операторами

$$\begin{aligned}
 2b_1 &= R_2 + L_2 + C_2 & C_2 &= L_2 + l_2 \\
 b_2 &= R_2 C_2 + R_2 L_2 & \alpha_1 C_2 + \alpha_2 L_2 + R_2 &= 0 \\
 & & C_2 L_2 &= \beta R_2^2
 \end{aligned} \quad (44)$$

Однако, в обновлённой модели изменены все численные значения как коэффициентов функций, так и номиналы физических элементов макета.

Формулы выражения коэффициентов (43) функции-оригинала через физические элементы макета-оригинала получены при построении функции математической модели. Этими формулами были вычислены численные значения (11) коэффициентов ( $a_1$  и  $a_2$ ) функции-оригинала. Номиналы физических элементов ( $R_1, L_1, C_1$ ) макета-оригинала были вычислены из системы уравнений технологических связей (43).

Теперь известны формулы выражения (44) и численные значения коэффициентов ( $b_1$  и  $b_2$ ) синтезированной функции-образа. Предстоит же вычислить численные значения номиналов физических элементов ( $R_2, L_2, C_2$ ) макета функции-образа.

Для этого необходимо построить расчетную подсистему, выбрав три уравнения из пяти (44) и решить её.

Предположим, нам известно, что «*основное качественное свойство*» модели целиком определяется одним первым из уравнений (44) технологических связей физических элементов модели. Это уравнение в обязательном порядке должно войти в расчетную подсистему, а чтобы укомплектовать её полностью, можно выбрать любую пару из оставшихся уравнений, кроме двух технологических (!). Здесь нас ждёт тождественное преобразование.

Любая из выбранных подсистем даст, в результате, модель учитывающую заложенные к макету-образу требования (20,21), она не учтёт лишь специфики оставшихся вне расчётной подсистемы уравнений связи (44).

Выбираем, в качестве расчётной, подсистему состоящую из первого уравнения технологических связей (44) и двух уравнений коэффициентов (44).

Представим уравнения расчётной подсистемы разрешёнными относительно одного из параметров, например ( $R$ )

$$\begin{aligned} R + (L + C) &= 2b_1 \\ R(L + C) + 0 &= b_2 \end{aligned} \quad (45)$$

общий подстрочный индекс около символов элементов здесь опущен.

Необходимым условием существования подсистемы уравнений (45) является требование неравенства нулю её определителя

$$(L + C)^2 \neq 0 \quad (46)$$

Полагаем, что это условие выполняется, так как макет, как предполагается, работает.

Достаточным условием совместности уравнений системы (45) является требование равенства нулю остатка от деления одного из уравнений на другое (алгоритм Евклида). Иными словами, достаточное условие – это требование наличия общего множителя у уравнений системы. Остаток определяем как результат подстановки выделенного параметра ( $R$ ) из одного уравнения (45) в другое

$$[2b_1 - (L + C)](L + C) = b_2 \quad (47)$$

откуда может быть определена сумма ( $L + C$ ) номиналов элементов

$$(L + C) = b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - b_2} \quad (48)$$

Подключая к вычислениям основное уравнение технологической связи (44) физических элементов макета, можно

найти и номиналы элементов ( $L, C$ ) макета синтезированной математической модели.

Повторное макетирование устройства в соответствии с обновлённой (41) математической моделью и проверка макета в работе может потребовать новой доработки в части положения рабочей точки или каких бы то ни было доводок характеристик модели. Незначительная доработка или корректировка характеристик модели проводится без повторного отображения, на основе анализа общих решений функции модели выраженных через элементы макета.

Общие решения это раскрытая объективная закономерность, связывающая характеристики исследуемого проекта с величинами физических элементов, из которых он состоит.

Так в рассматриваемом примере (43,44), исходя из общего решения (16), можно найти

$$Z_{1,2} = b_1 \pm i\sqrt{b_{02}} = \frac{R + L + C \pm i\sqrt{(R + L + C) - LR(L + C)}}{2} \quad (50)$$

а, с допуском до 3%, из предельного решения (18) – соответственно

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt[4]{d_1^2 - 4d_1^2 d_{11} + d_{11}^2} = \\ &= \sqrt[4]{(R + L + C)^4 - 4(R + L + C)R(L + C) + 2R^2(L + C)} \end{aligned} \quad (51)$$

Исследование общих решений (50,51), с учётом конструкции и расположения фигуры функции модели в собственном пространстве (рис. 3), покажет какой из физических элементов макета и в какую сторону следует изменить для того, чтобы “сдвинуть” рабочую точку или какую-либо другую характеристику процесса в требуемом направлении. Формулы общего решения (50, 51) необходимы также для предварительного «ощупывания» макета-оригинала. Использование их может позволить вообще отказаться от отображения в процессе

синтезирования модели-образа, но уже на объективной, систематизированной основе.

### 3. Функции третьего порядка

#### 3.1.Обобщённая фигура функции

Анализ математической модели третьего порядка по-прежнему основан на исследовании обобщённого рисунка фигуры функции. Действительной функции от комплексного переменного  $Z=X+iY$ , раскрывающей физическую основу исследуемого процесса.

Аналитически, будем рассматривать функцию в центральной системе координат (первый коэффициент равен нулю)

$$A_3(Z) = Z^3 + 3a_{02}Z - a_{03} \quad (52)$$

Это позволяет упростить выкладки. Построение же фигуры функции, для общности, будет проводиться в периферийной системе, т.е. со сдвигом центра тяжести фигуры на величину первого коэффициента -  $a_1$  (рис.4).

Аналогично функции второго порядка, действительная функция третьего порядка, в параметрах переменной, записывается системой из двух формул

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_3(Z) &= X^3 + 3[(iY)^2 + a_{02}]X - a_{03} \\ i \operatorname{Im} A_3(Z) &= (iY)[(iY)^2 + 3X^2 + 3a_{02}] = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

Фигура графика функции состоит из четырёх ветвей (рис.4)

Ветвь  $A - A'$  фигуры

$$\begin{aligned} Y &= 0 \\ \operatorname{Re} A_3(Z) &= X^3 + 3a_{02}X - a_{03} \end{aligned} \quad (54)$$

полученная из совместного решения формул системы (53) определяет действительные корни образуемых в горизонтальных сечениях уравнений.

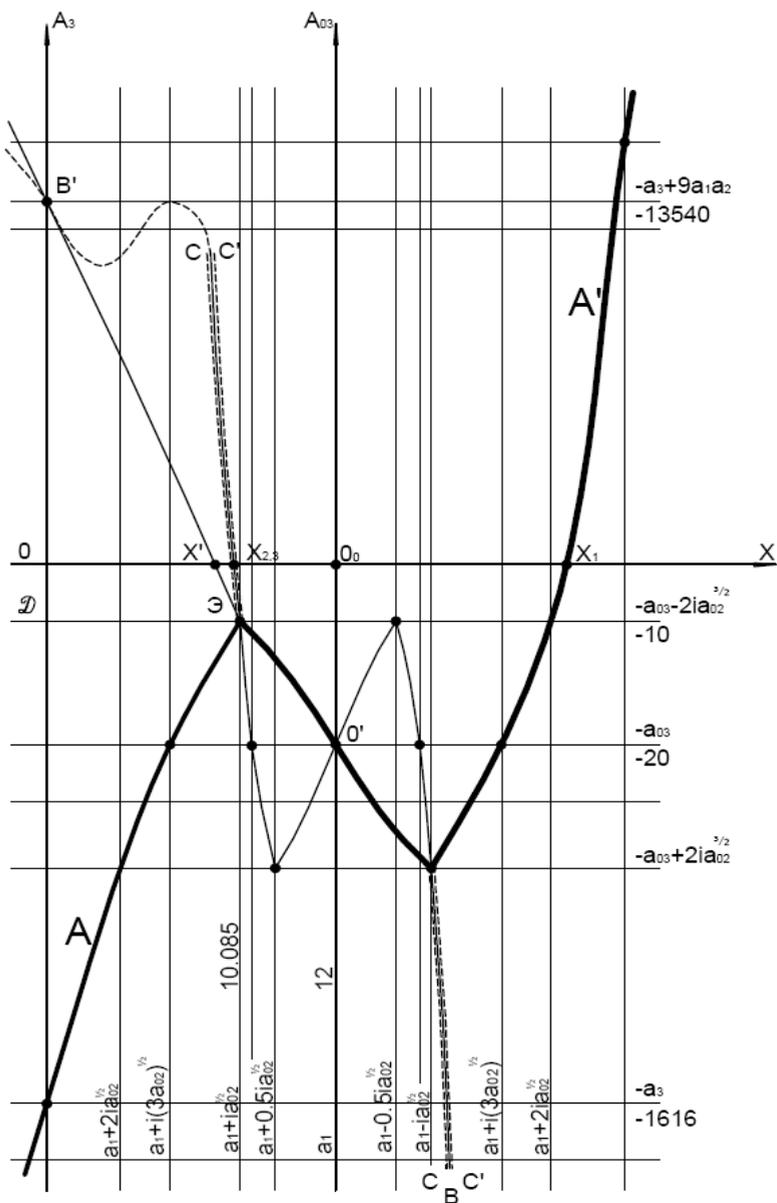


Рис. 4. Фигура функции третьего порядка

Кривая лежит в плоскости  $A_3 0X$  плоскость листа, и нанесена более плотной линией.

Ветвь  $B - B'$  фигуры

$$\begin{aligned}
 Y &\neq 0 \\
 -\operatorname{Re} A_{03}(Z) &= (2X)^3 + 3a_{02}(2X) + a_{03}
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

полученная из совместного решения формул системы (53), по форме, – вдвое сжатая в поперечнике кривая  $A - A'$ . Ветвь определяет середины корней образуемых уравнений. Причём, корней как комплексных, так и действительных. Кривая  $B - B'$ , как и кривая  $A - A'$ , лежит в плоскости листа рисунка и нанесена более тонкой линией.

Ветви  $C - C'$  фигуры проекции, которых на плоскость аргумента записываются уравнением (53)

$$\begin{aligned}
 Y &\neq 0 \\
 0 &= (iY)^2 + 3X^2 + 3a_{02}
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

представляют собой пространственные параболы второго порядка, лежащие в изогнутой плоскости нормальной к плоскости  $A_3 0X$  листа. Вершины парабол  $C - C'$  соприкасаются с точками экстремумов ветви  $A - A'$ . Осевыми линиями парабол являются отходящие ветви кривой  $B - B'$ . Параболы  $C - C'$ , в своих сечениях, определяют комплексные корни образуемых функцией (53) уравнений.

Для функции третьего порядка, из анализа двух её производных достаточно просто определяются координаты точек экстремумов и перегиба. Дополняя эти точки точками пересечения оси ординат линиями фигуры функции (53), представляем их координаты на выносных линиях (рис.4). Полученная сетка известных координатных линий позволяет произвести оценку знаков и величин корней любого из частных образованных функцией (53) уравнений. При необходимости, построенная сетка может быть дополнена промежуточными линиями и превращена в вычислительную сетку.

### 3.2. Анализ числового примера функции третьего порядка

Рассмотрим числовой пример уравнения третьей степени и его образующей функции

$$\begin{aligned} A_3(Z) &= Z^3 - 36Z^2 + 421Z - 1616 = \\ &= Z^3 - 3a_1Z^2 + 3a_2Z - a_3 = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Выписываем биномиальные коэффициенты заданного уравнения (57)

$$\begin{aligned} a_1 &= 12 \\ a_2 &= 140,3 \\ a_3 &= 1616 \end{aligned} \quad (58)$$

Вычисляем инварианты линейного отображения уравнения (57)

$$\begin{aligned} a_{02} &= -a_1^2 + a_2 = -11\frac{1}{3} \\ a_{03} &= 2a_1^2 - 3a_1a_2 + a_3 = 20 \end{aligned} \quad (59)$$

ориентируясь на обобщённый рисунок фигуры функции (рис. 4), знаки первого коэффициента ( $a_1$ ) и инварианта третьего порядка ( $a_{03}$ ), заключаем, что центр собственной системы отсчёта образующей функции заданного уравнения (57) находится во втором квадранте плоскости ( $A_{03}, 0', a_{03}$ ).

Двигаясь по оси ( $a_{03}$ ) в направлении оси ординат системы отсчёта образующей функции заданного уравнения, вычисляем ординаты экстремума ( $\mathcal{E}$ ) линии  $A - A'$  фигуры образующей функции

$$-a_{03} - 2i(a_{02})^{\frac{3}{2}} = -10 \quad (60)$$

и точки ( $B'$ ) пересечения линии  $B - B'$  с осью ординат

$$-a_3 + 9a_1a_2 = 13540 \quad (61)$$

Сопоставляя полученные значения величин ординат, заключаем, что действительный корень  $X_1$  заданного уравнения (57) положителен, комплексные корни  $X_{2,3}$  имеют положительную действительную часть .

С целью более точного вычисления величин корней определяем абсциссу экстремума ( $\mathcal{E}$ ) (57) линии  $A - A'$

$$a_1 + ia_{02}^{1/2} = 10,085 \quad (62)$$

Из аппроксимирующих треугольников  $B'D\mathcal{E}$  и  $B'OX'$  приближённо определяем действительную часть комплексно сопряжённых корней заданного уравнения

$$X' = \frac{D\mathcal{E} * OB'}{B'D} = \frac{10,085 * 13540}{13550} = 10,07756 \quad (63)$$

Мнимую часть корней определяем из уравнения системы (53) образующей функции, но в периферийной системе координат, по найденному значению действительной части корней

$$(iY) = \sqrt{-3(X')^2 + 6a_1(X') - 3a_2} = \sqrt{-0,0873} = i0,295 \quad (64)$$

Действительный корень  $Z_1$  заданного уравнения (57) получаем из формулы для его первого коэффициента по найденным комплексно сопряжённым корням  $Z_2$  и  $Z_3$

$$Z_1 = 3a_1 - Z_2 - Z_3 = 15,84 \quad (65)$$

Для сравнения и оценки корректности рисунка фигуры (рис. 4) отметим, что истинно, корни заданного (57) уравнения соответственно равны

$$\begin{aligned} Z_1 &= 16 \\ Z_{2,3} &= 10 \pm i \end{aligned} \quad (66)$$

Можно сделать вывод, - построенная фигура функции третьего порядка соответствует действительности. Достаточно простая операция оценки характера и численного значения корней позволяет получить наглядный, доверительный и весьма точный результат.

Теперь, когда обобщенная фигура функции построена, выявляется возможность более точного вычисления численного значения корней заданного уравнения (57) и построения его общего решения. Из построения фигуры функции (рис.4) и аналитических выражений (57,55) следует, что в центральной системе координат  $(A_{03}, O_0, X)$  действительный корень  $(X_{01})$  заданного уравнения (57) и действительный корень  $(X_{023})$  функции средин (55) корней связаны соотношением

$$2X_{023} = X_{01} \quad (67)$$

т.е. вычисляя один из корней, второй находим из простого отношения.

К тому же, действительный корень функции средин (55) есть действительная часть комплексно сопряжённых корней заданного (57) уравнения.

Вычисляем численное значение действительного корня заданной функции (57,58,59), в четвёртом приближении, в центральной системе координат, где в соответствии с таблицей моментов

$$\begin{aligned} 3a_{01} &= m_{01} = 0 \\ 3a_{02} &= m_{011} = -11 \\ a_{03} &= m_{0111} = 20 \\ m_4 &= 2m_{011} = 2(-11)^2 = 242 \\ m_{44} &= m_{011}^2 + 4m_{011}m_{011} = -2959 \\ m_{444} &= m_{011}^4 = 20^4 \\ Z_{01}(4) &= \sqrt[4]{m_4} = \sqrt[4]{242} = 3,94 \end{aligned} \quad (68)$$

Делаем повторное отображение с плоскости четвёртого порядка на следующую плоскость четвёртого порядка, т.е., в результате на плоскость шестнадцатого порядка, где

$$m_{16} = m_4^4 - 4m_4^2 m_{44} + 2m_{44}^2 + 4m_4 m_{444} = 427778 * 10^4 \quad (69)$$

и вычисляем тот же корень в шестнадцатом приближении

$$Z_{01}(16) = \sqrt[16]{m_{16}} = 3,999 \quad (70)$$

После проверки, принимаем корень равным

$$Z_{01} = X_{01} = 4 \quad (71)$$

т.е. четвёртое приближение даёт ошибку до 0,5%, а шестнадцатое до 0,006% по отношению к истинному значению

$$Z_1 = a_1 + Z_{01} = 16 \text{ корня.}$$

Откуда действительная часть комплексно сопряжённых корней уравнения (57), в центральной системе  $A_{03} 0_0 X$  координат (67,71), равна

$$X_{02,3} = \frac{1}{2} X_{01} = 2 \quad (72)$$

а в своей собственной (периферийной), в соответствии с рисунком (4), равна

$$X_{2,3} = a_1 - X_{02,3} = 10 \quad (73)$$

Комплексная часть сопряжённых корней, в центральной системе координат вычисляется из уравнения проекции (53) фигуры функции на плоскость аргумента

$$(iY)^2 = -3X^2 - 3b_{02} = -3 * 2^2 - (-11) = -1 \quad (74)$$

по известному значению действительной части (72).

Таким образом, комплексные корни заданного уравне-

ния (57) получаются (72,74) равными: в центральной системе координат

$$Z_{02,3} = X_{02,3} \pm iY = 2 \pm i \quad (75)$$

и в периферийной (73,74), заданной –

$$Z_{2,3} = X_{2,3} + iY = 10 + i \quad (76)$$

Высокая степень точности найденных численных величин корней переходит и на общие приближённые, предельные решения. Так, если ограничиться точностью до 0,5%, то предельное общее решение может быть построено в четвёртом приближении.

Общее решение для действительного корня заданного уравнения (57), в соответствии с рисунком (4) и вычисленным значением (68) в центральной системе координат, может быть представлено формулой

$$\begin{aligned} Z_1 &= a_1 + Z_{01} = a_1 + \sqrt[4]{m_4} = a_1 + \sqrt[4]{2(3a_{02})^2} = \\ &= a_1 + \sqrt[4]{2} \sqrt{|3a_{02}|} = 15,94 \end{aligned} \quad (77)$$

Общие решения для комплексно сопряжённых корней

$$Z_{2,3} = X_{2,3} \pm iY \quad (78)$$

строим отдельно для действительной и мнимой частей.

Действительная часть, в соответствии с рис.4 и другими (68,71,72,73) промежуточными результатами, может быть записана формулой

$$X_{2,3} = a_1 - \frac{1}{2} Z_{01} = a_1 - \frac{\sqrt[4]{2}}{2} \sqrt{|3a_{02}|} = 10,028 \quad (79)$$

Мнимая часть корней вычисляется по его найденной действительной части (79) из уравнения (53), проекции фигуры образующей функции на плоскость аргумента, (68,71,74) и может быть представлена формулой

$$\begin{aligned}
 iY &= \sqrt{-(3X_{2,3} + 3a_{02})} = i\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt{2(3a_{02})^2} + 3a_{02}} = \\
 &= i\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4} + 1 * \text{sign}(a_{02})\right)|3a_{02}|} = i0,817
 \end{aligned}
 \tag{80}$$

Общие решения (77,79,80) для корней заданного (57) уравнения оказались зависящими только от инварианта второго порядка. Но тогда, выразив инвариант ( $a_{02}$ ) через физические элементы макета, формулы общего предельного решения (77,79,80) можно использовать для проведения корректировок математической модели описываемого заданным (57) уравнением процесса.

### 3.3. Синтез математической модели

На рисунке 5а представлена фигура модели заданного уравнения (57) в собственной системе координат. Там же (рис.5с), графически высказано требование к новой (синтезируемой) функции – иметь все три корня действительными, расположенными на «поясе»  $a_{03}$  фигуры функции и быть отрицательными.

Заданное преобразование намечаем выполнить в два этапа. Линейное (по горизонтали, оставаясь в заданной плоскости  $Z = X + iY$  аргумента и плоскости  $A_3 0X$  пространства) отображение в положение рис.5в; и, во-вторых, нелинейное смещение по вертикали (оставаясь в плоскости  $A_3 0X$ ) из положения рис.5в в новое положение рис.5с. (Можно рассматривать и другие пути преобразования.)

Линейное отображение осуществляем функцией

$$V = q_0 Z + q_1 Z^0 \tag{81}$$

Получаем уравнение-образ

$$B_3(V) = V^3 - 3g_1 V^2 + 3g_2 V - g_3 = 0 \tag{82}$$

и его коэффициенты

$$\begin{aligned}g_3 &= q_1^3 + 3a_1q_1^2 + 3a_2q_1 + a_3 \\g_2 &= q_1^2 + 2a_1q_1 + a_2 \\g_1 &= q_1 + a_1\end{aligned}\tag{83}$$

выраженными через параметр ( $q_1$ ) отображения и коэффициенты (58) заданного (57) уравнения. Параметр отображения  $q_0$  и переменное в нулевой степени ( $Z^0$ ) функции отображения выполняли служебную, технологическую роль (с ними было проще производить выкладки). Теперь они отброшены, приравнены единице.

Параметр отображения  $q_1$  после прикидки, выбираем так, чтобы первый коэффициент уравнения-образа оказался равным, что-то около  $1 \div 2$ , принимаем

$$g_1 = -2a_1\tag{84}$$

Тогда, (83), параметр отображения  $q_1 = -3a_1$ , а корни синтезируемой модели будут приблизительно вдвое (что и предполагалось) больше по модулю чем у оригинала (57).

Промежуточная математическая модель принимает вид (82,83,84)

$$B_3(V) = V^3 + (6a_1)V^2 + (9a_1^2 + 3a_2)V + (9a_1a_2 - a_3)\tag{85}$$

все значения которой, согласно требованиям, уменьшаем на величину ( $a_{03}$ ) третьего инварианта линейного отображения уравнения оригинала (57)

$$\begin{aligned}C_3(V) &= B_3(V) - a_{03} = V^3 - 3c_1V^2 + 3c_2V - c_3 = \\&= V^3 + (6a_1)V^2 + (9a_1^2 + 3a_2)V + (2a_1^3 - 12a_1a_2 + 2a_3)\end{aligned}\tag{86}$$

и получаем выражение новой математической модели, и общие формулы перерасчёта коэффициентов функции-оригинала (57) в коэффициенты функции-образа (86)

$$\begin{aligned}3c_1 &= -6a_1 = -72 = m_1 \\3c_2 &= 9a_1^2 + 3a_2 = 1717 = m_{11} \\c_3 &= 2a_1^3 - 12a_1a_2 + 2a_3 = -13560 = m_{111}\end{aligned}\tag{87}$$

Таким образом, окончательно обновлённое уравнение математической модели и его образующая функция принимают вид

$$C_3(V) = V^3 - (-72)V^2 + 1717V - (-13560) = 0\tag{88}$$

Анализ функции обусловлен постоянным определением численных значений различных точек её «тела», т.е. постоянным численным решением уравнений в различных сечениях фигуры функции.

Численные, близкие к точным значения корней, проще и быстрее вычислять через повторные стандартные отображения (68,69), функциями отображения порядков кратных двум или четырём. Это известная «Идея Лобачевского, Грегфе». «Идея», потому, что им не было известно нелинейное отображение. «Идея» не могла быть доказанной и соответствующим образом осуществлённой. «Идея» вне какой бы то ни было системы, «вручную», реализовывала то, что теперь мы называем повторным стандартным отображением на плоскость второго порядка. Назван был этот метод «квадрированием» и применялся, и применяется лишь для численного решения уравнений.

Численные решения уравнений доступны и предельному методу. Предельные решения это общие решения. Решения, в которых корни выражаются через коэффициенты уравнения. Однако ещё более просто численные решения получаются через повторные отображения Лобачевского, Грегфе.

Так повторные отображения на плоскость четвёртого порядка осуществляются стандартными функциями порядков кратных четырём (4,16,64,256...).



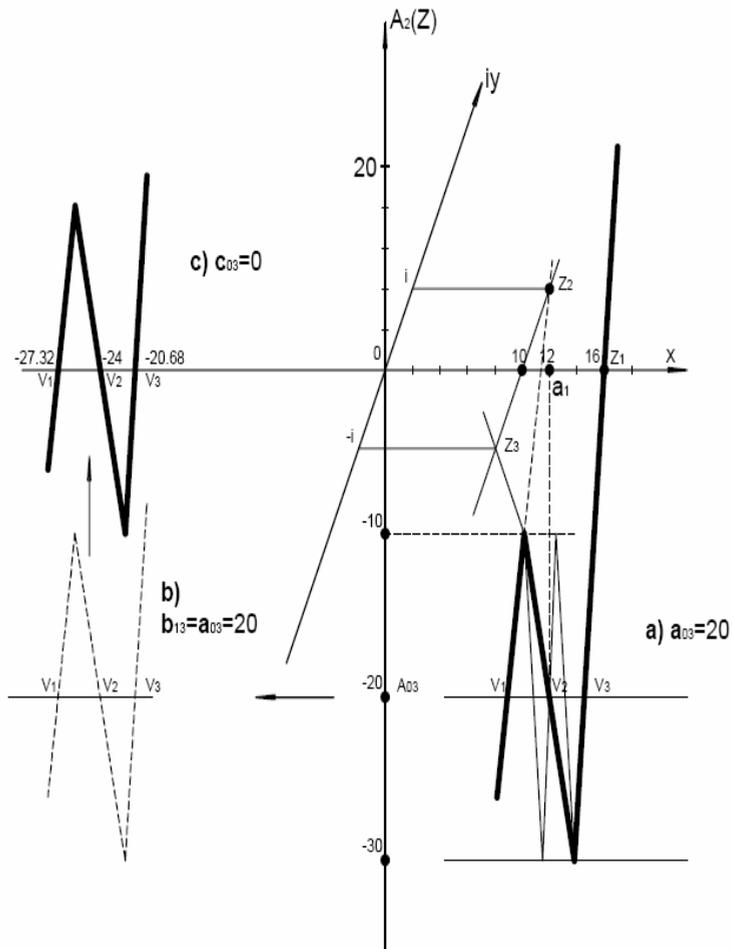


Рис. 5. Заданная функция третьего порядка и ее синтезируемый образ.

- a) Заданное положение
- b) Промежуточное положение
- c) Требуемое положение

Численное решение анализируемой функции (88) оказывается значительно проще в силу её особых частных свойств.

Так, средний  $Z_2$  корень функции совпадает с центром тяжести фигуры и, следовательно, равен первому коэффициенту (87)

$$Z_2 = c_1 = -24 \quad (92)$$

частное от деления синтезированной функции (86) на решение (92) представляет собой уравнение второго порядка

$$Z^2 - 2c_1 Z + 3c_2 - 2c_1^2 = 0$$

и равный нулю остаток

$$c_{03} = 2c_1^3 - 3c_1 c_2 + c_3 = 0$$

что позволяет вычислить два оставшихся корня новой математической модели (88,87,93)

$$Z_{1,3} = c_1 \pm \sqrt{3c_1^2 - 3c_2} = 24 \pm \sqrt{11} = 24 \pm 3,32 \quad (93)$$

Корни и другие характерные точки фигуры обновлённой математической модели точно соответствуют заложенным требованиям, в чём можно убедиться, делая контрольные вычисления по формулам на выносных линиях (рис.4,5) фигуры образующей функции.

Итак, обновлённая, удовлетворяющая сформулированным требованиям математическая модель синтезирована.

Напомним, однако, ещё раз, основные этапы проделанной работы, привязав их к анализируемому примеру (57).

3.3.1. Воплощение идеи по созданию задуманного устройства началось с разработки принципиальной схемы и построения системы уравнений технологических связей физических элементов комплектующих макет-оригинал.

Предположим, что для анализируемого примера (57) система уравнений технологических связей имела вид

$$\begin{aligned}L - 2M &= l \\ RC + \alpha LC + M^2 &= 0 \\ RCL + \beta LM^2 + RCM &= 0 \\ R^2 C^2 + \delta M^2 L^2 &= 0\end{aligned}\tag{94}$$

3.3.2. Решение построенной системы, определило численные значения номиналов физических элементов комплектующих макет-оригинал.

Предположим, что они оказались соответственно равными  $R = R_1, L = L_1, C = C_1, M = M_1$  (Здесь мы, для общности, не указываем самих численных значений физических элементов).

3.3.3. Математически описали проектируемое устройство в стационарном (или переходном) режиме работы. Получили рабочую функцию (или уравнение), которое назвали математической моделью проектируемого устройства. Коэффициенты математической модели представили собой некоторые функции физических элементов комплектующих модель-оригинала.

Предположим, что для анализируемого примера (57) эти функции выглядят так

$$\begin{aligned}3a_1 &= R_1 + L_1 + C_1 + M_1 = 36 \\ 3a_2 &= R_1 L_1 + R_1 C_1 + M_1^2 = 421 \\ a_3 &= R_1 L_1 C_1 = 1616\end{aligned}\tag{95}$$

Причём, численные значения коэффициентов, полученные после подстановки численных значений физических элементов, предполагаем, совпали с численными значениями коэффициентов анализируемой функции-оригинала (57).

3.3.4. Провели анализ функции-оригинала (57) математической модели. Сформулировали и сформировали требования к функции-образу.

3.3.5. Через отображение синтезировали обновлённую математическую модель (88).

В процессе отображения определили численные значения коэффициентов математической модели-образа через численные значения коэффициентов модели-оригинала (87,88). С другой стороны, исходя из требования сохранности «*основных качественных свойств*» модели, было распространено действие операторов (95) зависимости коэффициентов от физических элементов макета-оригинала на коэффициенты макета-образа. Т.е., было наложено требование на совместность системы уравнений

$$\begin{aligned}3c_1 &= R + C + M = -72 \\3c_2 &= RL + RC + M^2 = 1717 \\c_3 &= RLC = -13560\end{aligned}\tag{96}$$

аналогичной системе (95) для модели-оригинала. Разница систем в том, что первая (95) определяет коэффициенты через известные физические элементы, а вторая (96) наоборот – физические элементы через известные коэффициенты.

3.3.6. Из семи уравнений (четыре технологических-95 и три функциональных-96) построенной системы, выбрали расчётную подсистему из четырёх (по числу физических элементов макета) уравнений. Решение подсистемы определило номиналы четырёх физических элементов макета-образа.

3.3.7. При подборе уравнений для расчётной подсистемы руководствовались двумя ограничениями. Подсистема не может состоять только из технологических уравнений, так как это было бы тождественным преобразованием. Во-вторых, в подсистему должны быть включены уравнения технологических связей физических элементов, обеспечивающие преемственность «*основного качественного свойства*» модели. Уравнения, не включённые в расчётную подсистему, не вносят своей, быть может, полезной, специфики в решение. Однако отсутствие их не исключает закладывавшихся в модель-образ требований, так как последние уже включены в процессе синтеза функции. Закладывавшиеся в модель-образ требования учтены связями, наложенными на коэффициенты функции-образа.

## 4. Функции четвёртого порядков

### 4.1. Обобщённая фигура функции

Действительная функция четвёртого порядка над плоскостью комплексной переменной представляется системой

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_{04}(Z) &= \\ &= X^4 + 6a_{02}X^2 - 4a_{03}X + a_{04} + (iY)^2[6X^2 + 6a_{02} + (iY)^2] \quad (98) \\ i \operatorname{Im} A_{04}(Z) &= (iY)[X^3 + 3a_{02}X - a_{03} + (iY)^2 X] = 0 \end{aligned}$$

Здесь, аналитически, имеется в виду, что функция размещена в своей центральной системе координат ( $a_1 = 0$ ).

Графически, функция представляет собой линейчатую пространственную фигуру. И разместили мы её, для общности, в периферийной системе координат, там, где первый коэффициент отличен от нуля.

Основной кривой фигуры является плоская парабола четвёртого порядка

$$\begin{aligned} Y &= 0 \\ \operatorname{Re} A_{04}(Z) &= X^4 + 6a_{02}X^2 - 4a_{03}X + a_{04} \end{aligned} \quad (99)$$

в полной аналогии с тем как это было в случаях с функциями второго и третьего порядков.

Парабола лежит в плоскости  $A_4OX$  системы координат (плоскость листа рисунка) и в точках пересечения с плоскостью аргумента определяет действительные корни образуемого уравнения. На рисунке парабола вычерчена более плотной линией и обозначена буквами  $A - A'$ .

Линии  $B - B$  и  $B' - B'$  фигуры, по аналогии со средними линиями фигур образующих функций второго и третьего порядков, построены (обращаем внимание!) умозрительно, как геометрические места середин всевозможных пар участков корнеобразующих кривых  $A - A'$  и  $C - C'$ . Естественно, что при таком методе построения, тщательная эксперименталь-

ная проверка результатов становится неотъемлемой частью работы.

Аналитически, линии  $B$  получаются исключением из выражений системы (98) неравной нулю мнимой части ( $iY$ ) переменной ( $Z$ )

$$Y \neq 0$$

$$A_{04}(Z) = -\frac{1}{X^2} [4X^6 - 12a_{02}X^4 + (a_{04} - 9a_{02}^2)X^2 + a_{03}^2] \quad (100)$$

Из анализа полученной формулы (100) шестиветвевой кривой следует, что она чётносимметрична и имеет разрыв на вертикали центра тяжести фигуры. Причём, на совмещённом рисунке кривых  $A$  и  $B$  разрыв расширяется в интервал  $DE$ , где каждая из частей кривых  $B$  продолжается из другой половины разорванной надвое точки пересечения сопряжённых частей линии  $B$ . Линии  $B - B$  и  $B - B'$  могут быть представлены произведением сопряжённых парабол третьего порядка. Кривые  $B$  лежат в плоскости  $A_4OX$  (листа рисунка) и вычерчены более тонкими линиями.

Исключением действительной части  $X$  переменной  $Z$  из системы (98), могут быть получены кривые  $C - C'$  фигуры. Кривые  $C - C'$  лежат в полуплоскостях нормальных к плоскости  $A_4OX$  и изогнутых отходящими ветвями линий  $B$  являющихся осевыми линиями парабол  $C - C'$ . Линии  $C - C'$ , условно, изображены штриховыми отрезками вдоль отходящих ветвей линий  $B$ , определяющих действительные части комплексных корней образуемых уравнений. Сами кривые  $C$ , в своих сечениях определяют комплексные корни образуемых функцией уравнений.

В случаях, когда действительная часть  $X$  комплексного корня найдена, мнимая его часть, в периферийной системе координат, определяется из уравнения системы (98) образующей функции

$$(iY)^2 = -\frac{X^3 - 3a_1X^2 + 3a_2X - a_3}{X - a_1} \quad (101)$$

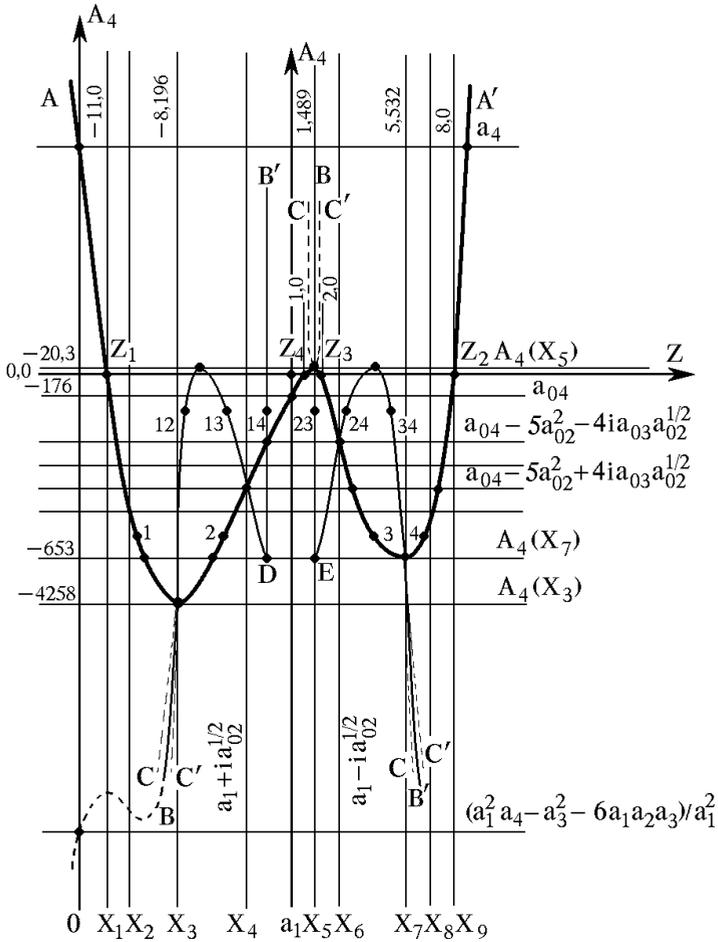


Рис. 6. фигура функции четвертого порядка

Уравнение в системе 98 – это проекция парабол  $C$  на плоскость аргумента, уравнение связи параметров  $(X$  и  $Y)$  переменной  $Z$ .

На рисунке (6) не показано, однако следует иметь в виду, что миди – линии  $(B)$ , на рисунке (6) – это линии 14 и 23, как кривые третьего порядка, пересекают отходящие ветви линии  $A$ , на рисунке 6 – это линии 1 и 4, как кривые четверто-

го порядка, образуя тем самым недостающие многоугольники корней.

Фигуры функции четвёртого порядка отличаются друг от друга знаком смещения внутреннего экстремума кривой  $A - A'$  от вертикальной оси симметрии ( $a_1$ ) и знаком разности ординат нижних экстремумов (рис.6). Координаты точек перегиба и инварианта ( $a_{04}$ ) определяются достаточно простыми выражениями приведёнными на выносных линиях рисунка фигуры функции.

Вычисление абсцисс  $X_3, X_5, X_7$  экстремумов образующей функции (98) производим с нужной точностью формулами предельного решения уравнений [7]. Решению, в данном случае, подлежит уравнение третьей степени

$$Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111} = 0 \quad (102)$$

полученное, как производная исследуемой (98) функции. Здесь следует учитывать, что корни  $Z_1, Z_2, Z_3$  найденные предельным методом размещены в убывающем порядке [1] по модулю

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt[3]{m_v} \\ Z_2 &= \sqrt[3]{m_{vv} / m_v} \\ Z_3 &= \sqrt[3]{m_{vvv} / m_{vv}} \end{aligned} \quad (103)$$

и индексы их не совпадают с индексам абсцисс экстремумов ( $X_3, X_5, X_7$ ) приведёнными на рисунке рис.6.

#### 4.2. Анализ числового примера функции четвёртого порядка

Рассмотрим пример уравнения четвёртой степени

$$Z^4 - 95Z^2 + 270Z - 176 = 0 \quad (104)$$

и, соответственно, образующую его функцию четвёртого по -  
 ряда.

Уравнение задано в центральной системе координат, где  
 первый коэффициент равен нулю ( $a_1 = 0$ ). Следовательно,  
 остальные коэффициенты заданного уравнения являются  
 его инвариантами линейного отображения [5]

$$\begin{aligned} n_{011} &= 6a_{02} = -95 \\ n_{0111} &= 4a_{03} = -270 \\ n_{01111} &= -176 \end{aligned} \quad (105)$$

Уравнение для вычисления абсцисс экстремумов (102)  
 функции образующей заданное (104) уравнение, находим как  
 производную образующей функции (104)

$$Z^3 - 47,5Z + 67,5 = 0 \quad (106)$$

Уравнение, как и заданное (как, в прочем, и все последующие,  
 образованные производными) размещёно в центральной сис-  
 теме координат. Соответственно, первый коэффициент равен  
 нулю, центральные моменты пропорциональны инвариантам и  
 равны

$$\begin{aligned} m_{011} &= -47,5 \\ m_{0111} &= -67,5 \end{aligned} \quad (107)$$

корни, в четвёртом приближении, имеют численные значения  
 (103)

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt[4]{m_{04}} = \sqrt[4]{2m_{011}^2} = -8,196 \\ Z_2 &= \sqrt[4]{\frac{m_{044}}{m_{04}}} = \sqrt[4]{\frac{(m_{011}^4 + 4m_{011}m_{0111}^2)}{2m_{011}^2}} = 5,532 \\ Z_3 &= \sqrt[4]{\frac{m_{0444}}{m_{044}}} = \sqrt[4]{\frac{m_{0111}^4}{(m_{011}^4 + 4m_{011}m_{0111}^2)}} = 1,489 \end{aligned} \quad (108)$$

В соответствии с обозначениями на обобщённом рисунке (6) образующей функции, принимаем абсциссы её экстремумов равными

$$\begin{aligned} X_3 &= Z_1 = -8,196 \\ X_5 &= Z_3 = 1,489 \\ X_7 &= Z_2 = 5,532 \end{aligned} \tag{109}$$

полагая точность их (109), по результатам подстановки достаточной.

По найденным значениям абсцисс вычисляются ординаты экстремумов функции образующей заданное (104) уравнение

$$\begin{aligned} A_4(X_3) &= -4258 \\ A_4(X_5) &= 20,3 \\ A_4(X_7) &= -653 \end{aligned} \tag{110}$$

Сравнивая ординаты внутреннего экстремума  $A_4 = 20,3$  и инварианта (105) четвёртого порядка  $a_{04} = -176$ , на рисунок (6) фигуры образующей функции наносится след  $Z$  плоскости аргумента, совпадающий с действительной осью  $X$  этой плоскости. Ось ординат пространства, в соответствии с формулой (104) заданного уравнения, это вертикаль проходящая через точку пересечения ветви (2) линии  $A - A'$  фигуры функции с плоскостью сечения на ординате -  $a_{04}$ . Т.е., вертикаль  $a_1 = 0$ .

После нанесения на рис.6 осей системы отсчёта и числовых значений координат экстремумов образующей заданное уравнение функции (104) видно, что она имеет четыре действительных корня, из которых один отрицателен.

Численные значения корней заданного (104) уравнения тоже вычисляем предельным методом и тоже, сразу, в четвёртом приближении. Выписываем и подставляем моменты отображения на плоскость четвёртого порядка имея в виду,

что оригинал находится в центральной системе координат, т.е.  $n_1 = 0$  (105)

$$\begin{aligned}
 n_4 &= 2n_{011}^2 - 4n_{01111} = 2(-95) - 4(-176) = 17346 \\
 n_{44} &= n_{011}^4 + 6n_{01111}^2 - 4n_{011}^2 n_{01111} + 4n_{01111}^2 n_{011} = 6029 * 10^4 \\
 n_{444} &= n_{011}^4 - 4n_{011} n_{01111}^2 + 2n_{011}^2 n_{01111}^2 - 4n_{01111}^3 = \\
 &= 101978 * 10^4 \\
 n_{4444} &= n_{01111}^4 = 95951 * 10^4
 \end{aligned} \tag{111}$$

Вычисляем корни заданного (104) уравнения в четвёртом приближении

$$\begin{aligned}
 Z_1(4) &= \sqrt[4]{n_4} = \sqrt[4]{17346} = -11,5(-11) \\
 Z_2(4) &= \sqrt[4]{n_{44}/n_4} = 7,7(8) \\
 Z_3(4) &= \sqrt[4]{n_{444}/n_{44}} = 2,03(2) \\
 Z_4(4) &= \sqrt[4]{n_{4444}/n_{444}} = 0,985(1)
 \end{aligned} \tag{112}$$

проверяем их подстановкой, уточняем, при необходимости повторным отображением или подбором и принимаем окончательно для них значения, указанные в скобках за результатами вычислений,

Результаты вычислений сведены в рисунок (7) фигуры функции образующей заданное (104) уравнение в собственной системе координат.

Следствием анализа фигуры математической модели, размещения на ней рабочих точек и других её характеристик может появиться желание представить функцию в виде и расположенной так, как это показано на рисунке (8в). Фигура симметрична относительно вертикали в точке  $(a_1)$  первого коэффициента. Средняя линия, определяющая основания парных корней, гладкая. Все корни действительны и отрицательны.

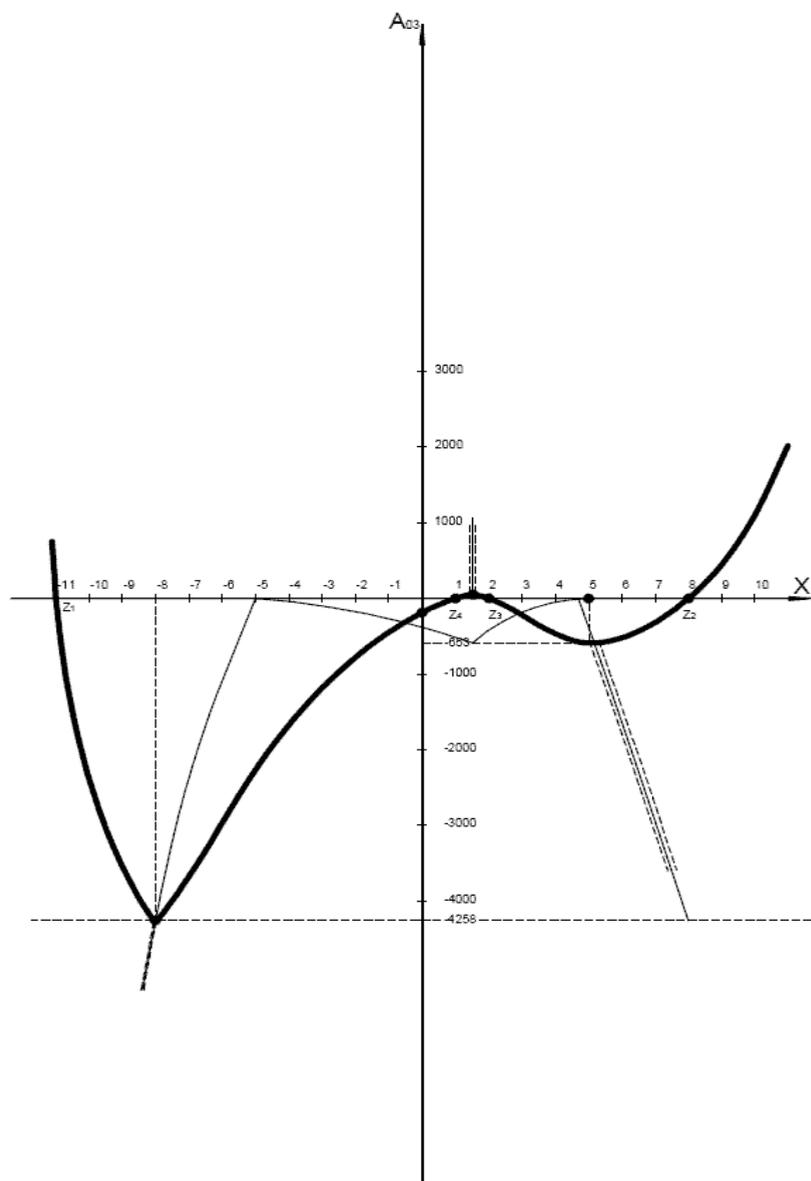


Рис. 7. Фигура образующей функции заданного (104) уравнения

Определяющими являются два требования – чётная симметричность относительно центральной вертикали и отрицательность корней. Первое требование – это симметрия и изящество функции (почему бы и нет) реализуется приравниванием нулю инварианта третьего порядка функции-образа. Второе требование - это устойчивость описываемого процесса, реализующеся выбором, соответствующего знака и величины, первого коэффициента функции-образа или, просто, выбором (назначением) знака и величины наименьшего по модулю отрицательного корня  $V_4$  уравнения-образа. Канонизировать подобные операции было бы неуместно, в связи с массой возможных подходов и не меньшей массой обстоятельств, включая субъективные, которые следует учесть. И вообще, отображение позволяет весьма произвольно подойти к вопросу реконструкции модели. Здесь уместны любые творческие начинания и фантазии.

### 4.3. Синтез математической модели

Осуществим синтез модели, ограничивая, для начала, своё новаторство двумя намеченными выше пожеланиями.

Два требования. Значит, функция отображения должна иметь два свободных параметра и быть, например, полином второй степени

$$V_2 = q_0 Z^2 + q_1 Z^1 + q_2 Z^0 \quad (113)$$

Функция-образ заданного оригинала (104), в общем случае, будет имеет вид

$$B_{24}(V_2) = V_2^4 - 4b_{21}V_2^3 + 6b_{12}V_2^2 - 4b_{23}V_2 + b_{24} \quad (114)$$

а её коэффициенты, через моменты ( $n$ ) функции-оригинала и параметры ( $q$ ) функции отображения будут

выражаются формулами [6]

$$\begin{aligned}
 4b_{21} &= (V_{21} + \dots)_4^1 = [(q_0 Z_1^2 + q_1 Z_1^1 + q_2 Z_1^0) + \dots]_4^1 = \\
 &= (n_2 q_0 + \dots)_3 = n_2 + n_1 q_1 + n_0 q_2 \\
 6b_{22} &= (V_{21} V_{22} + \dots)_6^1 = (n_{22} q_{00} + \dots)_6 = n_{22} + n_{21} q_1 + n_{20} q_2 + \dots \\
 4b_{23} &= (V_{21} V_{22} V_{23} + \dots)_4^1 = (n_{222} q_{000} + \dots)_{10} = \\
 &= n_{222} + n_{221} q_1 + n_{220} q_2 + n_{220} q_1^2 + \dots \\
 b_{24} &= (n_{2222} q_{0000} + \dots)_{15} = n_{2222} + n_{2221} q_1 + n_{2220} q_2 + n_{2211} q_1^2 + \dots
 \end{aligned}$$

Согласно требованиям к синтезируемой (114) функции, её третий инвариант должен равняться нулю

$$b_{023} = 2b_{21}^2 - 3b_{21}b_{22} + b_{23} = 0 \quad (116)$$

а первый коэффициент должен быть отрицательным и таким, чтобы все корни функции-образа были тоже отрицательными. Т.е. - параметрическая задача. После прикидки, можно положить первый коэффициент функции-образа ( $b_{21}$ ) равным, например

$$b_{21} = -180 \quad (117)$$

что, пока ещё, не завершает построение системы уравнений (116,117) относительно параметров  $q_1, q_2$  функции отображения определяющей, в конечном счёте, численные значения коэффициентов (115) функции-образа (114).

Второе из требований к обновляемой математической модели может быть сформировано заданием значения ближайшего к нулю и, соответственно наименьшего по модулю, отрицательного корня функции-образа. Например

$$V_{24} = -125 \quad (118)$$

Этому корню функции-образа соответствует минимальный по модулю корень ( $Z_1 = 1$ ) (112) [6] функции-оригинала,

а объединяет корни в одну формулу функция отображения (113) (при  $q_0 = 1$ )

$$-125 = 1 + q_1 + q_2 \quad (119)$$

Построенное уравнение и будет дополнять уравнение инварианта (116) до полной системы. Решение системы (116,119) позволяет вычислить величины параметров ( $q_1, q_2$  отображения, а затем и коэффициенты (115) обновлённой модели.

На рисунке (8) отображение представлено двухступенчатым (8а,8в). Заданная функция (104) (рис.7) сначала симметрирована и приведена в центральную систему координат (рис.8а). Т.е. положено, что в системе коэффициентов (115) функции-образа равны нулю первый и третий коэффициенты.

$$\begin{aligned} b_{021} &= 0 \\ b_{023} &= 0 \end{aligned} \quad (120)$$

Появившийся нулевой индекс в обозначении коэффициентов означает, что функция расположена в центральной системе координат.

В соответствии с заданием (104,105) и таблицами моментов [1] раскрываем первое из равенств системы (120)

$$2b_{021} = n_2 + n_1q_1 + n_0q_2 = -2(-95) + 4q_2 = 0 \quad (121)$$

и находим численное значение второго параметра  $q_2$  функции отображения (113)

$$q_2 = -47,5 \quad (122)$$

Аналогично, раскрываем второе равенство системы

$$\begin{aligned} 4b_{023} &= n_{222} + n_{221}q_1 + n_{220}q_2 + n_{220}q_1^2 + n_{210}q_1q_2 + n_{200}q_2^2 + \\ &+ n_{111}q_1^3 + n_{110}q_1^2q_2 + n_{100}q_1q_2^2 + n_{000}q_2^3 = \\ &= -270q_1^3 + 9729q_1^2 - 51300q_1 + 72900 = 0 \end{aligned} \quad (123)$$

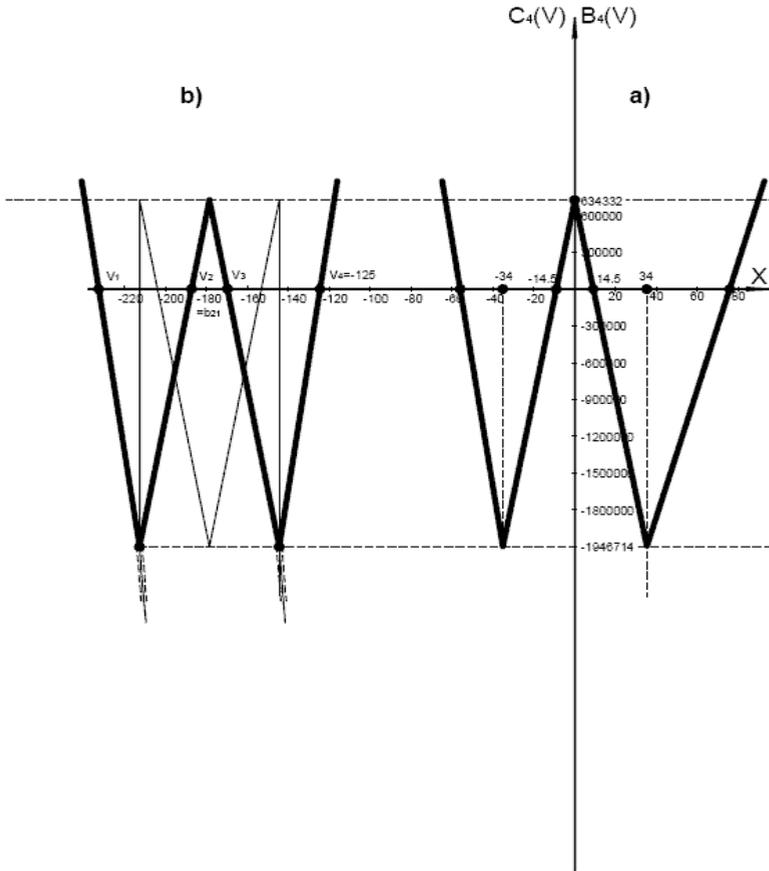


Рис. 8. Желательный вид и расположение функции математической модели (104)  
 а) промежуточный  
 б) окончательный

получаем уравнение, предельное решение которого, в четвёртом приближении, даёт три возможных значения для первого параметра отображения

$$q_{11,2,3} = 29,96; 3,304; 2,736$$

Выбираем для параметра среднее значение  $q_1 = 3,304$ , так как ему соответствуют наименьшие величины коэффициентов ( $b_{22}$  и  $b_{24}$ ) функции-образа, вычисляемые по формулам определяющей системы (115)

$$\begin{aligned} 6b_{022} &= (n_{22}q_{00} + \dots) = -3225 \\ b_{024} &= (n_{2222}q_{0000} + \dots) = 634322 \end{aligned} \quad (124)$$

Итак, симметричная, центрально размещённая функция-образ (рис.8а) заданного уравнения (104) определяется биквадратной формой

$$B_{24}(V_2) = V_2^4 + 3225V_2^2 + 634332 \quad (125)$$

Корни и координаты экстремумов построенной функции вычислены и нанесены на рисунок фигуры (рис.8а). Рисунок позволяет наглядно произвести завершающий этап преобразования – линейное отображение в такую периферийную (рис.8в) систему координат, в которой все корни функции промежуточной стадии (рис.8а) станут отрицательными.

Пусть, после прикидки, будет принято, что первому коэффициенту синтезируемой функции следует быть равным ( $b_{21} = -180$ ) (117). В этом случае, в случае, когда первый коэффициент функции-образа определён, линейное отображение как таковое можно не производить. Все остальные коэффициенты функции-образа определяются из формул инвариантов второго, третьего и четвёртого порядков линейного отображения (117,121,123,124) [6]

$$\begin{aligned} b_{22} &= b_{21}^2 + b_{022} = 31863 \\ b_{23} &= -2b_{21}^3 + 3b_{21}b_{022} - b_{023} = -5541480 \\ b_{24} &= -3b_{21}^4 - 6b_{21}^2b_{022} + 4b_{21}b_{023} + b_{024} = 945807132 \end{aligned} \quad (126)$$

Таким образом, окончательно, обновлённая функция математической модели (104) принимает вид

$$B_{24}(V) = V^4 - 4(-180)V^3 + 6(31863)V^2 - 4(-5541480)V + 945807132 \quad (127)$$

## 5. Функции моделей пятого порядка

Построение пространственной фигуры функции пятого порядка

$$A_5(Z) = Z^5 - 5a_1Z^4 + 10a_2Z^3 - 10a_3Z^2 + 5a_4Z - a_5 \quad (130)$$

также основано на представлении её системой из действительной и приравненной нулю мнимой частей

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_5(Z) &= A_5(X) + 10(iY)^2 A_3(X) + 5(iY)^4 A_1(X) \\ i \operatorname{Im} A_5(Z) &= (iY)[(iY)^4 + 10(iY)^2 A_2(X) + 5A_4(X)] = 0 \end{aligned} \quad (131)$$

где символами  $A_v$  обозначены операторы целых рациональных функций в биномиальной знакопеременной форме, причём -  $A_4 = A_5'$ ,  $A_3 = A_5''$ ,  $A_2 = A_5'''$ ,  $A_1 = A_5''''$ .

По-прежнему, первое из выражений системы (131) представляет собственно функцию, а второе – условие действительности заданной (130) функции. Геометрически, второе из выражений (131) представляет собой проекцию первого на плоскость аргумента пространства. Второе выражение (уравнение) системы (131) взаимосвязывает действительный и мнимый параметры аргумента функции (130) и позволяет вычислить другой, если известен один из них.

В своём общем виде, пространственная линейчатая фигура действительной функции пятого порядка представлена на рисунке (9).

Фигура функции пятого порядка, как и все предыдущие (и последующие) состоит из трёх разновидностей кривых. Это, во-первых, плоская действительная кривая  $A_5(X)$  от действительного аргумента, лежащая в действительной плоскости  $A_5 OX$  пространства (плоскость листа рисунка). На рисунке (9) кривая вычерчена плотной линией и обозначена буквами

$A - A$ . В сечении фигуры плоскостью аргумента линия  $A - A$  определяет действительные корни образуемого уравнения. Следует отметить, что точки линии  $A - A$  не являются корнями образуемых уравнений и имеют размерность функции. Корнями являются точки плоскости аргумента имеющие размерность аргумента.

Второй разновидностью кривых фигуры функции (131) являются линии, точки которых определяют середины корней образуемых уравнений. Причём, как середины действительных, так и середины комплексных корней. На рисунке характерные участки линий средин и линий действительных корней ( $A - A$ ) обозначены поясняющими индексами. Линия средин, также как и линия действительных корней, лежит в действительной плоскости  $A_5 OX$  пространства, в плоскости листа рисунка. На рисунке линии средин обозначены буквами  $B$  и вычерчены тонкими линиями.

Если построение линии ( $A - A$ ) действительных корней функции осуществляется по контрольным точкам, то линии  $B$  функции умозрительно и графически построены как линии средин корней образуемых функцией уравнений.

Линий  $B$  средин корней у функции пятого порядка две. Одна ( $B - B$ ) имеет шесть экстремумов и, соответственно, является функцией седьмого порядка. Вторая ( $B' - B'$ ) имеет два экстремума и является функцией третьего порядка. Линия  $B' - B'$  средин, третьего порядка, своими отходящими ветвями (23 и 34) пересекается с отходящими ветвями (1 и 5) линии  $A - A$  действительных корней, как с более крутыми линиями пятого порядка. Благодаря этим пересечениям, спектр многоугольников корней образуемых уравнений дополняется недостающими конструкциями.

Линии  $B$  и  $B'$  имеют характерные разрывы. Характерность разрывов линий заключается в том, что линий просто не существует в целом интервале  $D - E$  изменения аргумента (рис.9). Линия  $B$  терпит разрыв между своими ветвями 13 и 14, а линия  $B'$  - между ветвями 23 и 24.

Линии  $B$  и  $B'$  в своих продолжениях за точками экстремумов линии  $A$  определяют середины комплексно сопряжённых корней образуемых уравнений. Полностью, комплексные корни определяются сечениями линий  $C - C$  фигуры функции. До точек экстремумов линий  $A$ , линии  $B$  определяют середины действительных корней.

Линии  $C - C$  представляют собой параболы лежащие в изогнутых по отходящим ветвям линий  $B$  и  $B'$ , нормальных к плоскости  $A_5 O X$  полуплоскостях. Параболы  $C - C$  своими вершинами касаются точек экстремумов линий  $A - A$ . Причём, точки экстремумов линий  $A - A$  и вершин парабол линий  $C - C$  принадлежит линиям  $A - A$ . Линии ( $A - A$ ) определяющие действительные корни и линии ( $B, B'$ ) определяющие середины корней образуемых (131) уравнений, как линии лежащие в одной плоскости ( $A_5 O X$ ), имеют своей проекцией на плоскости аргумента пространства действительную ось ( $X$ ). Линии  $C - C$  проектируются в параболы или эллипсы, аналитически определяемые уравнением анализируемой системы (131). Поэтому, это уравнение позволяет определять мнимую часть  $Y$  корней образуемых функцией (131) уравнений по найденной действительной  $X$  части. И наоборот.

Проведённое описание фигуры относится в своей мере к функциям любого порядка. Описание и построение – в большей части умозрительно и нуждается в экспериментальной проверке и подтверждении. Переходим к примеру.

Рассмотрим в качестве примера графическое решение уравнения пятой степени

$$A_5(Z) = Z^5 - 63Z^3 - 72Z^2 + 890Z + 2100 = 0 \quad (132)$$

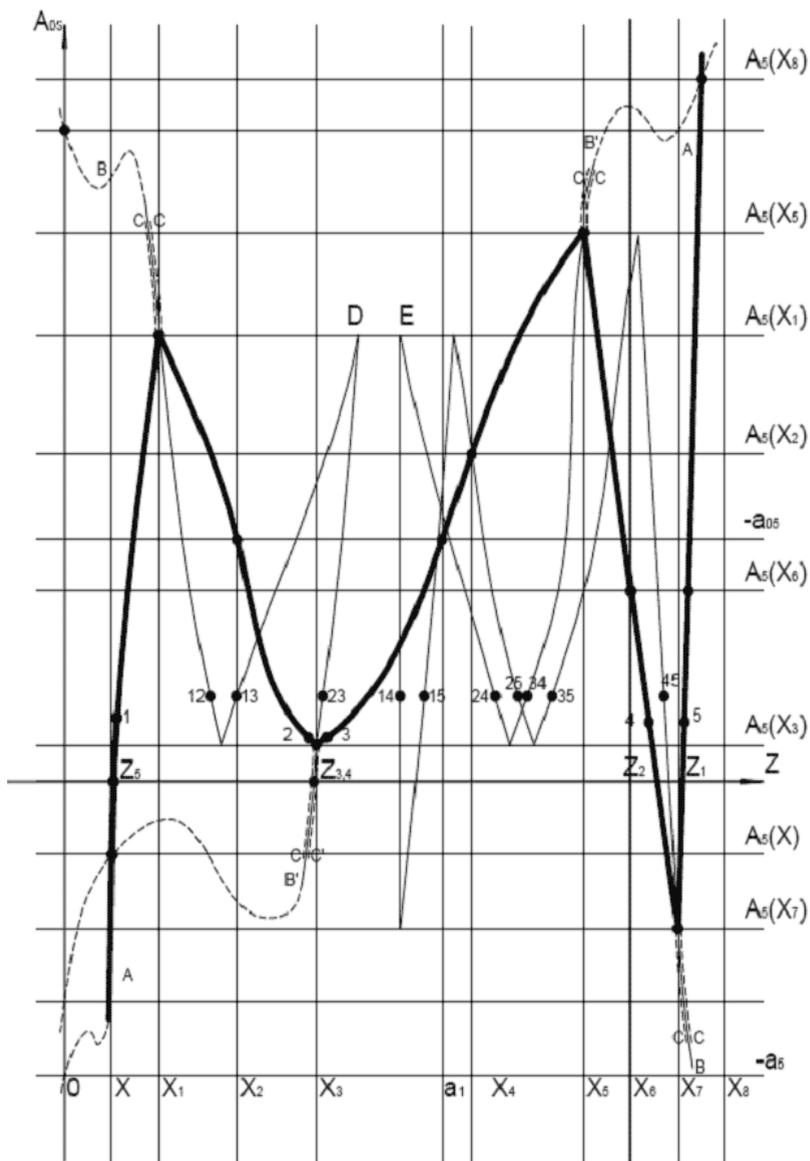


Рис.9. Общий вид функции пятого порядка

основываясь на результатах построения обобщенного рисунка фигуры образующей функции (рис.9).

Первый коэффициент заданного (132) уравнения равен нулю ( $a_1 = 0$ ). Это означает, что образующая уравнение функция и, соответственно, само уравнение (132) расположены в своей центральной системе координат. Т.е. ось ординат пространства (рис.9) совпадает с вертикалью  $X = a_1, Y = 0, A_5 = \text{var}$ . Соответственно, все коэффициенты заданного уравнения (132) являются инвариантами линейного отображения.

Выписываем инварианты уравнения

$$\begin{aligned}
 10a_{02} &= -63 & a_{02} &= -6,3 \\
 10a_{03} &= 72 & a_{03} &= 7,2 \\
 5a_{04} &= 890 & a_{04} &= 178 \\
 a_{05} &= -2100 & &
 \end{aligned}
 \tag{133}$$

а подставляя значения пятого инварианта на выносную линию фигуры функции (рис.9), находим, что секущая плоскость аргумента, в которой лежит заданное уравнение (132), расположена ниже центра тяжести фигуры (точка в пересечении линий  $a_1$  и  $-a_{05}$ ) на 2100 единиц. Для уточнения места расположения секущей плоскости вычисляем координаты точек экстремумов линии  $A - A$  образующей заданное уравнение функции, ориентируясь на общий вид функции (рис.9).

Абсциссы точек экстремумов вычисляем как корни уравнения четвёртой степени

$$\begin{aligned}
 A'_5(Z) &= A_4(Z) = Z^4 + 6a_{02}Z^2 - 4a_{03}Z + a = \\
 &= Z^4 + 6(-6,3)Z^2 - 4(7,2)Z + 178 = \\
 &= Z^4 + (-37,8)Z^2 - 28,8Z + 178 = Z^4 + n_{011}Z^2 - n_{011}Z + n_{0111} = 0
 \end{aligned}$$

полученного дифференцированием образующей функции заданного уравнения (132). Корни вычисляем предельным методом, разбивая построенное уравнение (132) на два подуравнения второй степени, после отображения на плоскость четвёртого порядка

$$\begin{aligned} Z_4^2 - n_4 Z_4 + n_{44} &= 0 \\ n_4 Z_4^2 - n_{44} Z_4 + n_{4444} &= 0 \end{aligned} \quad (135)$$

Заимствуя формулы моментов для уравнения образа [3] и подставляя численные значения моментов оригинала (134), вычисляем численные значения моментов уравнения образа

$$\begin{aligned} n_4 &= 2n_{011}^2 - 4n_{01111} = 2(-37,8)^2 - 4 * 178 = 2145,68 \\ n_{44} &= n_{011}^4 - 4n_{011}^2 n_{01111} + 6n_{01111}^2 + 4n_{011} n_{01111}^2 = 1088942,337 \\ n_{444} &= n_{01111}^4 - 4n_{011} n_{01111}^2 n_{01111} + 2n_{011}^2 n_{01111}^2 - 4n_{01111}^3 = 90994912,2 \\ n_{4444} &= n_{01111}^4 = 1003875856 \end{aligned}$$

Вычисляем абсциссы экстремумов (135) в четвёртом приближении

$$\begin{aligned} Z_{1,2}(4) &= \pm 6,146; \pm 5,357 \\ Z_{3,4}(4) &= \pm 2,997; \pm 1,546 \end{aligned} \quad (137)$$

а затем и в шестнадцатом

$$\begin{aligned} Z_{1,2}(16) &= \pm 6,030; \pm 4,985 \\ Z_{3,4}(16) &= \pm 3,058; \pm 1,900 \end{aligned} \quad (138)$$

Здесь отброшены, попутно полученные мнимые значения корней (134), так как в соответствии с обобщённым рисунком (рис.9) фигуры образующей функции абсциссы экстремумов могут принимать только действительные значения.

Для выбора величины, а также определения знака корня  $Z_1(138)$ , следует воспользоваться приближением однозначно определяющим знак. Таким приближением является любое нечётное приближение. Проще всего первое, но оно не всегда доступно. Тогда можно обратиться, например, к третьему (134)

$$\text{sign} Z_1(3) = \text{sign} \sqrt[3]{3n_{0111}} = + \quad (139)$$

Знаки остальных корней (138) выбираются из условия равенства нулю первого коэффициента заданного уравнения (134) или также, как и первого ( $Z_1$ ) корня. Знак и характер корня инвариантны приближению (и отображению).

Итак, абсциссы экстремумов линии  $A - A$  фигуры образующей заданное уравнение (132) функции принимаем равными (рис.9)

$$\begin{aligned} Z_1 = X_7 &= 6,03 \\ Z_2 = X_1 &= -4,985 \\ Z_3 = X_3 &= -3,058 \\ Z_4 = X_5 &= 1,9 \end{aligned} \tag{140}$$

а ординаты, соответственно, имеют значения (132)

$$\begin{aligned} A_5(X_1) &= 592 \\ A_5(X_3) &= 239 \\ A_5(X_5) &= 3123 \\ A_5(X_7) &= -1006 \end{aligned} \tag{141}$$

Добавим к полученным точкам экстремумов две произвольные точки на отходящих ветвях линии  $A - A$ . Например, с абсциссами  $Z_6 = 7,5$  ;  $Z_7 = -6,5$  и ординатами, соответственно,

$$\begin{aligned} A_5(Z_6) &= -1028 \\ A_5(Z_7) &= 1877 \end{aligned} \tag{142}$$

Наносим точки экстремумов (141) и контрольные точки (142) на координатную сетку, соединяем их прямыми и получаем линию  $A - A$  образующей функции заданного уравнения (132) в своей собственной системе отсчёта (рис.10). При необходимости могут быть относительно просто вычислены и нанесены точки перегибов функции и точки, лежащие на одном уровне с точками перегибов и экстремумов. Однако, и приведённого построения достаточно, чтобы производить числен-

ную оценку корней заданного уравнения (132). На подрисунках (10а, в, с) произведены дополнительные построения, позволяющие графически найти значения действительных корней

$$\begin{aligned} Z_2 &= -6,16 \\ Z_3 &= 5,10 \\ Z_1 &= 6,95 \end{aligned} \tag{143}$$

а затем комплексных. Действительную часть  $X$  корней находим из условий их сопряжённости и равенства нулю первого коэффициента заданного уравнения (132)

$$2X = Z_3 + Z_4 = -Z_1 - Z_2 - Z_5 = -6 \tag{144}$$

Мнимую часть  $iY$  вычисляем из уравнения системы (131) определяющего проекцию фигуры образующей функции на плоскость аргумента

$$iY = \pm \sqrt{-5A_2 \pm \sqrt{25A_2^2 - 5A_4}} = \pm i \tag{145}$$

по известной (144) действительной части.

Сравнивая найденные графически значения корней заданного уравнения (132) с их истинным значением, приведенным в скобках

$$\begin{aligned} Z_1 &= 6,95(7) \\ Z_2 &= -6,16(-6) \\ Z_3 &= 5,1(5) \\ Z_{4,5} &= 3 \pm i(3 \pm i) \end{aligned} \tag{146}$$

можно утверждать, что построенная фигура функции пятого порядка соответствует действительности. В дальнейшем подобного рода проверок производить не следует. Фигуры

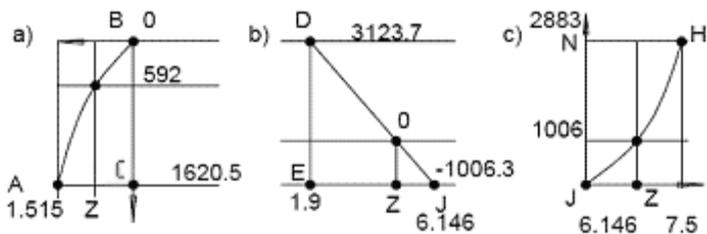
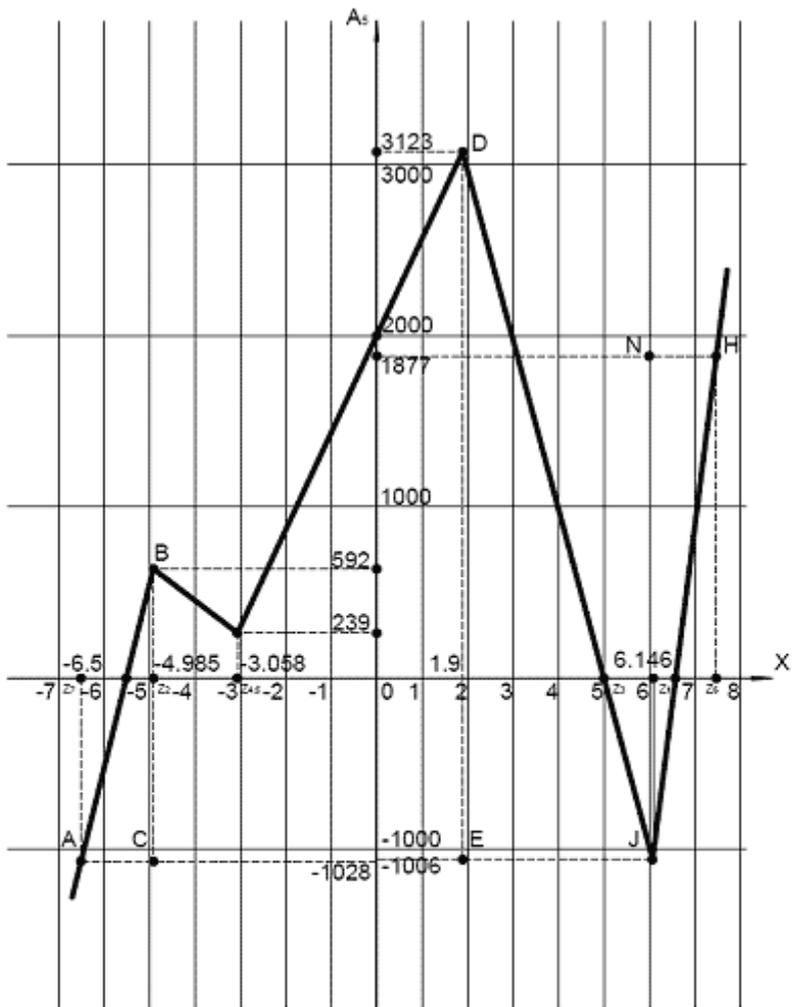


Рис.10. Образующая функция заданного (132) уравнения

функций строились впервые, поэтому необходимо было убедиться в правильности применяемых закономерностей построения. Но это только один раз.

После того, как построена частная фигура заданной функции (уравнения), порядок и объем работ по ее дальнейшему исследованию и синтезу остаются такими же, как и в предыдущих, рассмотренных случаях. Это – построение и анализ общих решений, компоновка новых требований, синтез обновленной функции и вычисление номиналов физических элементов обновленного макета.

## Литература

1. Корчагин И. Ф. «Симметричные алгебраические моменты» - 2003  
<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>
2. Корчагин И. Ф. «Отображение алгебраических функций» - 2003  
<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>
3. Корчагин И. Ф. «Решение алгебраических уравнений высоких степеней» – 2003  
<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>
4. Корчагин И. Ф. «Общее предельное решение алгебраических уравнений» - 2005  
<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>
5. Корчагин И. Ф. «Анализ и синтез математических моделей физических устройств и процессов»-2004  
<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>
6. Корчагин И. Ф. «Алгебраические уравнения» . — М.: Физматкнига, 2006.
7. Корчагин И. Ф. «Теория отображения алгебраических функций» . — М.: Физматкнига, 2006.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Научное издание

*КОРЧАГИН Игорь Федорович*

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ И АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ**

Подписано в печать 28.02.2006. Формат 60x84/16.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,7. Уч.-изд. л. 5,0

Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство «Физматкнига»

141700, г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 6Б

Тел. (095) 408-76-81, (095) 409-93-28

Отпечатано в ГУП Типография «Наука» АИЦ РАН

1210099, Москва, Шубинский пер., 6

Качество печати соответствует качеству представленных пленок

НАБОР КНИГИ И ОРИГИНАЛ-МАКЕТ ВЫПОЛНЕН АВТОРОМ

Заказ книг — в интернет-магазине **[WWW.FIZMATKNIGA.RU](http://WWW.FIZMATKNIGA.RU)**

Или по тел. (495) 408-76-81, (495) 409-93-28,

а также по адресу:

141700, г. Долгопрудный Московской области,

Институтский пер., 6Б

Издательство «Физматкнига»