УКД В 511.5 **к.т.н. Корчагин И.Ф.**

Решение алгебраических уравнений высоких степеней

(Вторая исправленная редакция)

Аннотация.

Решение представляет собой ограниченную (4-6 членов) последовательность общих приближенных решений заданного уравнения, где каждое следующее решение отличается все большей и большей точностью, вплоть до предельного, истинного значения. Решение находится для каждого из действительных и пар комплексно сопряженных корней уравнения любой степени. Решения просты по форме и практически пригодны как для численных вычислений, так и физических исследований корней. Основу решения составляет последовательность нелинейных отображений уравнения на плоскости все более и более высоких порядков; расчленение образов заданного уравнения на линейные и квадратные подуравнения; решение подуравнений и возврат решений на плоскость оригинала. В работе метод продемонстрирован на уравнениях второй, третей, четвертой и пятой степеней.

1. Отображение и разделение заданного уравнения на элементарные подуравнения.

Рассматриваемое решение – это результат практического использования нового метода нелинейных отображений, чем объясняется применение в настоящей работе, как это может показаться, несколько неоправданным, новых терминов и обозначений.

Так уравнения, в настоящей работе, записываются в канонической знакопеременной форме. Коэффициенты уравнений называются моментами. Знакопостоянная каноническая форма уравнения и названия моментов коэффициентами также применяются, но в других случаях.

В настоящей работе применяется простейшее из нелинейных отображений, так называемое, стандартное или кратное, осуществляемое одночленной функцией (2), в отличие от общего случая, когда любая алгебраическая функция может быть отображена любой алгебраической функцией. (См. в Интернет работу автора “Отображение алгебраических функций”).

Аппаратом отображений является алгебра симметричных моментов, представляющая собой систематизированный метод вычисления моментов уравнений образов через моменты уравнения оригинала. Рассмотренные в настоящей работе упрощенные способы вычисления моментов уравнений образов практически весьма ограничены, в связи с чем в приложении приведена таблица стандартных моментов уравнений до пятой степени при отображении на плоскости до пятого порядка. (См. в Интернет работу автора "Симметричные алгебраические моменты").

С целью упрощения выкладок и пояснений, изложение основного материала настоящей работы проводится на примере уравнения ограниченной степени, например пятой

$$Z^5 - pZ^4 + p_{11}Z^3 - p_{111}Z^2 + p_{1111}Z - p_{11111} = 0 \qquad (1)$$

Отмечаем на дальнейшее, что моменты уравнений обозначаются своими буквами для каждой степени. Буква p – для уравнения пятой степени, и далее соответственно: n – для четвертой, m – для третьей и d – для уравнения второй степени. Индексы около букв обозначающих моменты – это цифры степеней корней – сомножителей (4) слагаемого момента. В рассматриваемом случае (1) мы имеем дело с так называемыми единичными моментами.

Уравнение (1) можно рассматривать как неявно выраженную функцию Z. График этой функции представляет собой пять точек нулей на плоскости комплексной переменной. Других точек нет. Нули функции или, соответственно, корни заданного уравнения будем считать заданными в показательной форме. Считаем также, что уравнение (1) задано на плоскости первого порядка измеряемых величин.

Отобразим заданное уравнение (1) на плоскость ν - того порядка функцией отображения

$$Z_V = Z^V \qquad (2)$$

где ν – целое, положительное число.

Отображение (2) означает однозначный перенос пяти точек корней (других точек нет) заданного уравнения с плоскости Z на плоскость Z_ν. Таким образом на плоскости Z_ν имеем тоже пять точек ν – тых степеней корней заданного уравнения, которые можно и будем рассматривать корнями уравнения образа, соответственно, той же пятой степени

$$Z_V{}^5 - p_V Z^4 + p_{VV}Z^3 - p_{VVV}Z^2 + p_{VVVV}Z_V - p_{VVVVV} = 0 \qquad (3)$$

Моментами уравнения образа, являются суммы произведений соответствующих сочетаний его корней, которые в свою очередь, представляют собой, в силу функции (2) отображения, ν – тые степени корней заданного уравнения

$$p_V = Z_1^V + Z_2^V + Z_3^V + Z_4^V + Z_5^V = \left(Z_1^V + \ldots\right)_5$$
$$p_{VV} = \left(Z_1^V Z_2^V + \ldots\right)_{10}$$
$$p_{VVV} = \left(Z_1^V Z_2^V Z_3^V + \ldots\right)_{10}$$
$$p_{VVVV} = \left(Z_1^V Z_2^V Z_3^V Z_4^V + \ldots\right)_5$$
$$p_{VVVVV} = \left(Z_1^V Z_2^V Z_3^V Z_4^V Z_5^V + \ldots\right)_1 \quad (4)$$

Моменты (4), в обозначении которых используется только одна цифра (ν), называются стандартными или кратными моментами. В формулах (4) применена сокращенная запись моментов, где в скобках указан только первый элемент суммы, а заскобочный индекс указывает на количество слагаемых в скобке и вычисляется как число сочетаний из общего количества корней по их числу в первом слагаемом. Формулы (4) – это универсальная форма записи, так называемых, симметричных моментов, которой с целью преемственности мы будем пользоваться в настоящей работе. Индексы (ν) в обозначении моментов – это степени корней-сомножителей в частных слагаемых симметричного момента.

Отметим некоторые особенности поведения корней уравнения (3) образа.

Во-первых, как уже отмечалось, это однозначность соответствия корням оригинала.

Во-вторых, в силу алгебраичности воздействующей функции (2) отображения и функции заданного уравнения (1) сохраняется чередование, следование модулей корней уравнения-образа чередованию модулей корней уравнения оригинала.

В-третьих, по тому же, сохраняется характер (действительность, комплексность, в том числе знаки, сопряженность) корней уравнения оригинала и уравнения образа, с той лишь оговоркой, что кратные корни уравнения образа мы будем считать комплексно сопряженными, с нулевой мнимой частью, в то время как получены они могут быть как отображением комплексно сопряженных, так и действительных кратных корней уравнения оригинала. Отмеченные свойства корней уравнений оригинала и образа позволяют нам сохранять нумерацию корней, например, в порядке следования величин их модулей для обоих уравнений.

Обозначим через Z_{v1} наибольший по модулю корень уравнения образа и подставим его в свое уравнение (3).

$$Z_{V1}^{5} - p_V Z_{V1}^{4} + p_{VV} Z_V^{3} - p_{VVV} Z_V^{2} + p_{VVVV} Z_V - p_{VVVVV} = 0 \quad (5)$$

Поделим все члены полученного равенства на первое слагаемое и рассмотрим их по отдельности, раскрывая моменты уравнения в соответствии с их формулами (4) и имея в виду, что $Z_{v1}=Z_1^{v}$ (2)

$$\frac{p_v Z_{v1}^{4}}{Z_{v1}^{5}} = \frac{\left(Z_1^{v} + \ldots\right)_5}{Z_{v1}^{5}} Z^4{}_{v1} = 1 + \frac{\left(Z_2\right)^v}{\left(Z_1\right)^v} + \ldots + \frac{\left(Z_5\right)^v}{\left(Z_1\right)^v} \quad (6)$$

$$\frac{p_{VV} Z_{v1}^{3}}{Z_{v1}^{5}} = \frac{\left(Z_1^{v} + \ldots\right)_{10}}{Z_{v1}^{5}} Z^3{}_{v1} = \frac{\left(Z_2\right)^v}{\left(Z_1\right)^v} + \ldots + \frac{\left(Z_5\right)^v}{\left(Z_1\right)^v} \quad (7)$$

Видно, что все слагаемые кроме второго слагаемого (6) равенства (5), представляют собой суммы v –ых степеней чисел меньших единицы. Следовательно, при соответствующем выборе величины v – степени переменной функции, отображения (2), все слагаемые равенства (5), кроме первых двух, могут быть превращены в пренебрежимо малые величины и отброшены.

Соответственно, уравнение образа превратиться, но только для наибольшего по модулю корня, в линейное подуравнение

$$Z_V - p_V = 0 \quad (8)$$

В случае, если первый (Z_{v1}) и второй (Z_{v2}) корни уравнения образа по модулю равны или близки, окажется, что третье слагаемое (7) анализируемого равенства (5) имеет свой предел.

Соответственно, уравнение образа в этом случае превращается в квадратное подуравнение для двух старших по модулю корней уравнения образа

$$Z_V^{2} - p_V Z_V + p_{VV} = 0 \quad (9)$$

Пусть наибольшим по модулю в уравнении образа является только один корень, вычисляемый линейным подуравнением (8). Тогда для оставшихся четырех младших по модулю корней определяющим будет подуравнение четвертой степени

$$p_V Z_V^{4} - p_{VV} Z_V^{3} + p_{VVV} Z_V^{2} - p_{VVVV} Z_V + p_{VVVVV} = 0 \quad (10)$$

полученное из уравнения (3) образа после отбрасывания переменной в высшей степени.

Подуравнение (10) для четырех, малых по модулю корней уравнения образа, будем считать самостоятельным, заданным уравнением четвертой степени. Но среди этих малых корней есть наибольший, который мы обозначим через $Z_{\nu 2}$, т.е как следующий после найденного из корней уравнения образа (3). Далее, используя те же доводы и в той же последовательности, что и при построении первого (8) подуравнения, можно получить подуравнение для вычисления корня $Z_{\nu 2}$ уравнения образа

$$p_V Z_V - p_{VV} = 0 \tag{11}$$

В случае, если следующий корень $Z_{\nu 3}$ уравнения образа равен или близок по модулю корню $Z_{\nu 2}$, то вместо линейного подуравнения (11) мы получим квадратное, определяющее корни $Z_{\nu 2}$ и $Z_{\nu 3}$

$$p_V Z_V^{\ 2} - p_{VV} Z_V + p_{VVV} = 0 \tag{12}$$

Пусть и в самом деле, корни $Z_{\nu 2}$ и $Z_{\nu 3}$ уравнения образа имеют равные модули. Тогда для последних корней $Z_{\nu 4}$ и $Z_{\nu 5}$ уравнения образа определяющим останется подуравнение

$$p_{VVV} Z_V^{\ 2} - p_{VVVV} Z_V + p_{VVVVV} = 0 \tag{13}$$

которое разделится на два линейных, в случае, если корни $Z_{\nu 4}$ и $Z_{\nu 5}$ уравнения образа будут иметь разные по величине модули

$$p_{VVV} Z_V - p_{VVVV} = 0 \tag{14}$$

$$p_{VVVV} Z_V - p_{VVVVV} = 0 \tag{15}$$

Итак, уравнение образа окончательно разбито на элементарные подуравнения (8…15), каждое из которых определяет, как мы будем говорить, ν–тые приближения соответствующих корней уравнения образа и заданного уравнения.

В силу приведенного определения, первым приближением в исчислении корней заданного уравнения являются подуравнения самого же заданного уравнения. И это не формально. Действительно, при переходе от одного образа к другому остается неизменным порядок чередования и характер корней отображений, изменяется только лишь степень приближения корней к своим пределам. Т.е., к примеру, при переходе от образа к образу старший корень заданного уравнения как был, так и остается старшим. Как определялся, так и определяется первым подуровнением (8) уравнения образа.

Возвращаясь к решению подуравнений (8…15), выпишем формулу для первого корня заданного уравнения. Итак, если первый корень заданного уравнения по модулю не равен второму, то в соответствии с функцией отображения (2) и линейным подуравнением (8), его ν–тое приближение равно

$$Z_1(\nu) = \sqrt[V]{p_V} \tag{16}$$

Если корни Z_1 и Z_2 заданного уравнения равны или близки по модулю, то ν–тые их приближения записываются формулой полученной на основании подуравнения (9)

$$Z_{1,2}(\nu) = \sqrt[V]{0.5(p_V \pm \sqrt{p_V{}^2 - 4p_{VV}})} \tag{17}$$

Как это следует из вида остальных подуравнений (10…15) уравнения образа, решения для прочих корней заданного уравнения в их ν–том приближении записываются аналогичными (16 и 17) формулами, остается лишь заменить в них неизвестные моменты уравнений образов выражениями через известные моменты уравнения оригинала.

В приложении 1 к настоящей работе приведена таблица таких зависимостей. При необходимости ее дополнения можно воспользоваться одним из двух приводимых ниже методов, продемонстрированных на моментах уравнения второй степени.

1. Формальный метод.

Первый и второй моменты заданного уравнения равны

$$d_1 = Z_1 + Z_2$$
$$d_{11} = Z_1 Z_2 \tag{18}$$

1.1. Требуется вычислить моменты уравнения образа на плоскости второго порядка, т.е.

$$d_2 = Z_1{}^2 + Z_2{}^2$$
$$d_{22} = Z_1{}^2 Z_2{}^2 \tag{19}$$

Возводим во вторую степень первый момент уравнения оригинала и находим

$$d_1{}^2 = (Z_1 + Z_2)^2 = Z_1{}^2 + Z_2{}^2 + 2Z_1\ Z_1 = d_2 + 2d_{11}$$
$$d_2 = d_1{}^2 - 2d_{11} \tag{20}$$

Возводим во вторую степень второй момент уравнения оригинала и находим

$$d_{11}{}^2 = (Z_1 Z_2)^2 = d_{22} \tag{21}$$

1.2. Требуется вычислить моменты уравнения образа на плоскости третьего порядка, т.е.

$$d_3 = Z_1{}^3 + Z_2{}^3$$
$$d_{33} = Z_1{}^3 Z_2{}^3 \tag{22}$$

Возводим d_1 в третью степень, вычисляем произведение $d_1\ d_2$ и находим

$$d_1^{\ 3} = (Z_1 + Z_2)^3 = Z_1^{\ 3} + Z_2^{\ 3} + 3(Z_1^{\ 2} Z_2 + Z_1 Z_2^{\ 2})$$

$$d_1\ d_{11} = (Z_1 + Z_2)(Z_1 Z_2) = Z_1^{\ 2} Z_2 + Z_1 Z_2^{\ 2}$$

$$d_3 = d_1^{\ 3} - 3 d_1 d_{11} \tag{23}$$

Возводим d_{11} в третью степень и находим

$$d_{11}^{\ 3} = (Z_1 Z_2)^3 = d_{33} \tag{24}$$

и т.д.

2. Аналитикогеометрическийи метод.

Рассматриваемое в настоящей работе стандартное отображение может быть получено произведением уравнений симметрированных с оригиналом. В этом случае:

2.1. Уравнение образа на плоскости второго порядка – это произведение двух противоположных уравнений, раскрывая которое находим

$$Z_2^{\ 2} - d_2 Z_2 + d_{22} = [Z^2 - d_1 Z + d_{11}][(Ze^{i\frac{\pi}{2}})^2 - d_1 (Ze^{i\frac{\pi}{2}})^2 + d_{11}] =$$

$$= (Z^2)^2 - (d_1^{\ 2} - 2d_{22})(Z^2) + d_{11}^{\ 2}$$

$$d_2 = d_1^{\ 2} - 2d_{11}$$

$$d_{22} = d_{11} \tag{25}$$

2.2. Уравнение образа на плоскости третьего порядка – это произведение трех уравнений, диполи которых расположены на трех симметричных лучах, раскрывая которое находим

$$Z_3^{\ 2} - d_3 Z_3 + d_{33} = [Z^2 - d_1 Z + d_{11}][(Ze^{i\frac{\pi}{2}})^2 - d_1 (Ze^{i\frac{\pi}{2}})^2 + d_{11}] \times [(Ze^{i2\frac{2\pi}{3}})^2 - d_1 (Ze^{i2\frac{2\pi}{3}})^2 + d_{11}] =$$

$$= (Z^3)^2 - (d_1^{\ 3} - 3d_1 d_{11})(Z^3) + d_{11}^{\ 3}$$

$$d_3 = d_1^{\ 3} - 3d_1 d_{11}$$

$$d_{33} = d_{11}^{\ 3} \tag{26}$$

Существует более универсальный и в то же время более простой метод вычисления искомых зависимостей. Однако он требует привлечения значительного круга сведений из теории моментов, выходящей за рамки настоящей темы. (См. в Интернет работу автора “Симметричные алгебраические моменты”).

Правильность приведенных в приложении 1 или вновь выведенных выражений связи моментов проверяется подстановкой произвольного набора числовых значений корней.

При вычислении наибольшего корня Z_1 заданного уравнения мы остановились, как на устраивающем нас ν–том приближении (16), в то время как более точным является $(\nu+1)$ – е приближение. Но тогда взяв отношение этих приближений и оставаясь в рамках требуемой точности, можно получить новую (без радикала) форму решения для наибольшего корня

$$Z_1 = \frac{p_{V+1}}{p_V} \tag{27}$$

Точно так же для парного корня. Всегда можно подобрать такую величину степени ν функции отображения, что разница между ν–тым и $(\nu+1)$ – м приближениями окажется пренебрежимо малой, а решение для парных корней (17) можно будет заменить формой без второго радикала

$$Z_{1,2} = \frac{p_{V+1} \pm \sqrt{p^2{}_{V+1} - 4p_{V+1\cdot V+1}}}{p_V \pm \sqrt{p^2{}_V - 4p_{VV}}} = \frac{p_V\, p_{V+1} \pm \sqrt{(p_V{}^2 - 4p_{VV})(p^2{}_{V+1} - 4p_{V+1V+1})}}{2p_V{}^2 - 4p_{VV}} \pm$$

$$\pm \frac{p_V \sqrt{(p_{V+1}{}^2 - 4p_{V+1V+1}) - p_{V+1}\sqrt{p^2{}_V - 4p_{VV}}}}{2p_V{}^2 - 4p_{VV}} \tag{28}$$

2. Решение уравнений второй степени.

В общем случае решение уравнения включает в себя три этапа.

Во-первых, предварительное определение распределения корней по модулю и характеру и численное вычисление действительных корней.

Во-вторых, численное вычисление комплексных корней заданного уравнения.

В-третьих, построение общих решений для различных корней.

Предварительное приближенное, а при необходимости и более точное вычисление корней, рассматривается в графических методах решений уравнений. В настоящей работе, предварительная, качественная оценка и вычисление корней осуществляется методом проб.

Априори полагаем, что корни заданного уравнения действительны и различны по модулю. Тогда, уравнение его образа может быть разбито на линейные подуравнения, каждое из которых определяет один из корней заданного уравнения. Вычисляем первые четыре-пять приближений корней заданного уравнения. Теперь, в случае, если в поведении последовательностей приближений просматривается тенденция стремления корней к своим пределам, следует считать, что сделанное предположение верно.

Построением асимптот пределы корней вычисляются, проверяются подстановкой и при необходимости уточняются вычислительными методами.

В случае, когда в поведении последовательностей приближений предельных тенденций не просматривается априорное предположение, следует признать неверным, корни заданного уравнения или достаточно близки по модулю друг к другу или вообще равны. Разбиение уравнения образа на линейные подуравнения было ошибочным. Такие корни следует объединять подуравнениями второй степени. Требуется произвести новое разделение уравнений образов и вычисление корней.

Рассмотрим пример уравнения второй степени

$$Z^2 - 4Z + 5 = 0 \qquad (29)$$

Воспользовавшись таблицей связи коэффициентов приложения 1 выпишем и вычислим моменты уравнений образов первых шести степеней функции отображения (2)

ν	1	2	3	4	5	6
d_ν	4	6	14	- 14	-76	-234
$d_{\nu\nu}$	5	25	125	625	3125	15625

(30)

Исходя из предположения того, что корни уравнения (29) действительны и различны по модулю, разделяем уравнение образа отображения на плоскости ν–того порядка

$$Z_V{}^2 - d_V Z_V + d_{VV} = 0 \qquad (31)$$

на два линейных подуравнения

$$Z_{V1} - d_V = 0$$

$$d_V Z_{V2} - d_{VV} = 0 \qquad (32)$$

каждое из которых, определяет свой образ корня заданного уравнения.

Воспользовавшись подсчитанными значениями моментов (30), вычисляем приближения корней заданного уравнения

ν	1	2	3	4	5	6
$Z_1(\nu) = \sqrt[\nu]{d_\nu}$	4	2,4	1,6	1,9 i	2,4 i	2,5 i
$Z_2(\nu) = \sqrt[\nu]{d_{\nu\nu} / d_\nu}$	1,25	2,4	2,8	2,6 i	2,1 i	2,0 i

(33)

Видно, что предельных тенденций у приближений ни одного из корней нет, хотя бы потому, что приближения разнохарактерны – действительные и комплексные (i) числа. Т.е исходное предположение о действительности и неодинаковости корней заданного уравнения неверно. Неправомерно, следовательно, и разбиение заданного уравнения на линейные подуравнения. Корни Z_1 и Z_2 уравнения можно рассматривать только в общем подуравнении второй степени, что и делается несколько ниже.

Рассмотрим другой пример уравнения второй степени

$$Z^2 - (-2)Z + (-3) = 0 \tag{34}$$

Воспользовавшись данными таблицы моментов приложения 1, вычисляем и сводим в сетку моменты уравнений первых шести образов отображения функцией (2) уравнения (34)

ν	1	2	3	4	5	6
d_ν	-2	10	-26	82	-242	728
$d_{\nu\nu}$	-3	9	-27	81	-243	729

(35)

Полагая, что корни заданного уравнения (34) действительны и различны, расщепляем уравнение ν – того образа отображения на два линейных подуравнения, соответственно для большего и меньшего по модулю корней

$$Z_{\nu 1} - d_\nu = 0$$

$$d_\nu Z_{\nu 1} - d_{\nu\nu} = 0 \tag{36}$$

Подставляя в подуравнения (36) вычисленные (35) значения моментов, находим соответствующие приближения корней заданного уравнения

ν	1	2	3	4	5	6
$Z_1(\nu) = \sqrt[\nu]{Z_{\nu 1}} = \sqrt[\nu]{d_\nu}$	-2	-3,16	-2,964	-3,011	-2,998	-3,001
$Z_2(\nu) = \sqrt[\nu]{Z_{\nu 2}} = \sqrt[\nu]{d_{\nu\nu} / d_\nu}$	1,5	0,949	1,013	0,996	1,001	0,999

(37)

Предельные значения корней очевидны – это $Z_1 = -3$ и $Z_2 = 1$ и удовлетворяют подстановке в заданное уравнение. Полученные результаты, как видим, полностью подтверждают выводы, сделанные в ходе общего исследования уравнений образов.

Действительно, первое приближение определило знак вычисляемого корня, так что при вычислении последующих приближений приходится только проверять, что нужного знака результат есть (существует).

Действительно, вычисляемые приближения корней даже двумя встречными последовательностями четных и нечетных отображений, асимптотически сходятся к своему предельному значению.

Очевидно также, что каково бы ни было наперед заданное допустимое значение погрешности, всегда найдется такое значение (ν) степени функции отображения, при которой точность вычисления корня уравнения удовлетворит поставленному требованию. Поставленному требованию удовлетворит соответственно и общее решение для корня. Так, например, если удовлетворяет оговоренному требованию точности четвертое приближение для корня Z_1 и пятое приближение для корня Z_2, то общие решения корней, в соответствии с формулами (37) вычисления и таблицей моментов приложения, будут иметь вид

$$Z_1(4) = \sqrt[4]{d_4} = \sqrt{d_1^4 - 2d_1^2 d_{11} + 2d^2_{11}}$$

$$Z_2(5) = \sqrt[5]{d_{55}/d_5} = \sqrt[5]{d_{11}^{\,5}/(d_1^5 - 5d_1^3 d_{11} + 5d_1 d^2_{11})} \tag{38}$$

Полученные общие решения с той же степенью, что и числовые результаты будут удовлетворять оговоренным требованиям точности в процессе исследования корней в функции их физических параметров.

В форме (27) без радикала общее решение для первого корня заданного уравнения имеет вид

$$Z_1 = \frac{d_5}{d_4} = \frac{d^5{}_1 - 5d^3{}_1 d_{11} + 5d_1 d_{11}{}^2}{d^4{}_1 - 2d_1{}^2 d_{11} + 2d^2{}_{11}} \tag{39}$$

Дополнительно проверять получаемые общие решения (38, 39) не следует, так как они получаются как последовательные приближения численных значений корней уравнений образов. Поэтому о проверке следует говорить только применительно к табличным выражениям связи моментов уравнений образов и оригинала.

Общие решения (38-39) выведены для заданного уравнения после того, как найдены распределение и характер его корней, и ориентируясь на них. Пригодность приближенных формул (38-39) для какого-то другого уравнения может быть оценена через относительную погрешность вычисления, например, первого корня

$$\frac{\Delta Z_1(\nu)}{Z_1(\nu)} = \frac{Z_1 - \sqrt[V]{d_V}}{Z_1} = 1 - \sqrt[V]{1 + (Z_2 / Z_1)^V} \qquad (40)$$

Т.е. подставляя численные значения корней нового уравнения в формулу (40) вычисления относительной ошибки, мы получаем возможность заранее оценить, удовлетворяет ли значение приближения формул (38-39) и, если нет, выбрать требуемое значение приближения (ν) и написать соответствующие общие решения. Таким образом, формулы решения (16, 17, 27, 28) с произвольным индексом приближения (ν) практически оказываются общеалгебраическими. Величина степени (ν) функции отображения определяется, исходя из требований, по допустимой относительной погрешности (40) и только после этого проставляется в формулы общего решения.

В связи с постоянной ориентацией проводимых выкладок на первый, наибольший по модулю корень заданного уравнения, отметим полную паритетность корней уравнения, следующую во-первых, хотя бы из того, что построения можно было бы начинать и заканчивать на младших, последних корнях. Во-вторых, старший и младший по модулю корни всегда могут быть поменяны местами линейным или инверсным отображением, в частности, переходом к противоположному уравнению – $A_2(-Z) = 0$.

Продолжим рассмотрение уравнения с комплексно сопряженными корнями (29).

Подуравнения (9) образов (3) представят собой в рассматриваемом случае сами уравнения образов

$$Z_V^{\ 2} - d_V Z_V + d_{VV} = 0 \qquad (41)$$

Соответственно, корни уравнений образов

$$Z_{V\,1,2} = 0{,}5(d_V \pm \sqrt{d_V^{\ 2} - 4d_{VV}}) \qquad (42)$$

представят собой степени корней уравнения оригинала

ν	1	2	3	4	5
$Z_{\nu\,1,2}$	2 ± i	3 ± 4i	2 ± 11i	-7 ±24i	-38 ±41 i
$Z_{1,2} = \sqrt[V]{Z_{V1,2}}$	2 ± i	2 ± i	2 ± i	2 ± i	2 ± i

(43)

Наибольшая сложность из собранных в сетку (43) результатов вычислений приходится на вычисление корней из комплексных чисел в алгебраической форме. По существу, это задача нелинейного отображения на субплоскость. Методика таких вычислений приведена в приложении 2 к настоящей работе на примере чисел – корней (43) анализируемого уравнения.

Предельные решения для комплексных корней уравнения второй степени не могут быть более простыми (42), так как первое приближение уже оказывается предельно точным решением. К тому же, только радикалом продуцируются комплексные числа из действительных.

3. Решение уравнений третьей степени.

Предварительное определение распределения по модулю и характеру корней уравнения третьей степени

$$Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111} = 0 \qquad (44)$$

производим опять же методом пробы, априори полагая, что все корни заданного уравнения (44) действительные и разные по величине числа. Если окажется, что это действительно так, то мы сразу же и вычислим корни заданного уравнения. В противном случае, вычисленным окажется один действительный корень, а два оставшихся парных придется вычислять через соответствующее подуравнение второй степени.

Рассмотрим пример уравнения третьей степени

$$Z^3 - Z^2 + 2 = 0 \qquad (45)$$

Выписываем, пользуясь данными таблицы приложения 1, вычисляем и заносим в таблицу моменты уравнений образов заданного уравнения (45)

ν	1	2	3	4	5	6	7
m_ν	1	1	-5	-7	-9	1	33
$m_{\nu\nu}$	0	4	12	8	40	64	288
$m_{\nu\nu\nu}$	-2	4	-8	16	-32	64	-256

(46)

Полагая, что все корни заданного уравнения (45) – действительные и разные по величине числа, разделяем уравнение ν–того образа его отображения на линейные подуравнения, каждое из которых определяет свой корень заданного уравнения

$$Z_\nu - m_\nu = 0$$

$$m_\nu Z_\nu - m_{\nu\nu} = 0$$

$$m_{\nu\nu} Z_\nu - m_{\nu\nu\nu} = 0 \qquad (47)$$

Решая полученные уравнения (47) и используя значения моментов (46) отображений, вычисляем и заносим в таблицу величины приближений корней заданного уравнения

ν	1	2	3	4	5	6
$Z_1(\nu) = \sqrt[V]{m_V}$	1	1	- 1,72	1,6×ε	- 1,56	1
$Z_2(\nu) = \sqrt[V]{m_V / m_V}$	0	2	- 1,34	1,03×ε	-1,34	2
$Z_3(\nu) = \sqrt[V]{m_{VV} / m_V}$	« - »	- 1	- 0,873	- 1,189	-0,957	- 1,00

(48)

Предельные тенденции двух встречных последовательностей приближений корня Z_3 заданного уравнения имеются. Построением асимптоты определяем, проверяем подстановкой и окончательно принимаем

$$Z_3 = - 1 \qquad (49)$$

Наборы (48) приближений корней Z_1 и Z_2 заданного уравнения хаотичны. Корни Z_1 и Z_2 считаем парными, подлежащими определению через подуравнение второй степени.

$$Z_V{}^2 - m_V Z_V + m_{VV} = 0 \qquad (50)$$

Можно и, просто, исключая найденный корень Z_3 из заданного уравнения (45), понизить степень последнего и вычислять оставшиеся его корни непосредственно.

Рассмотрим второй пример уравнения третьей степени.

$$Z^3 - 4Z^2 + Z - 6 = 0 \qquad (51)$$

Используя данные приложения 1, выпишем, вычислим и сведем в таблицу числовые значения моментов уравнений образов

ν	1	2	3	4	5	6
m_ν	4	14	34	98	274	794
$m_{\nu\nu}$	1	49	181	1393	7501	47449
$m_{\nu\nu\nu}$	- 6	36	-216	1296	-7776	46656

(52)

Предполагаем, что корни заданного уравнения действительны и различны по модулю, потому, уравнение его ν–того образа

$$Z_V^{\ 3} - m_V Z_V^{\ 2} + m_{VV} Z_V - m_{VVV} = 0 \tag{53}$$

разделяем на линейные подуравнения, каждое из которых определяет свой корень заданного уравнения (51)

$$\begin{aligned} Z_1(\nu) &= \sqrt[V]{m_V} \\ Z_2(\nu) &= \sqrt[V]{m_{VV} / m_V} \\ Z_3(\nu) &= \sqrt[V]{m_{VVV} / m_{VV}} \end{aligned} \tag{54}$$

Вычисляем приближения корней заданного уравнения и записываем их в таблицу

ν	1	2	3	4	5	6
$Z_1(\nu)$	4	3,742	3,240	3,146	3,104	3,043
$Z_2(\nu)$	0,25	1,871	1,746	1,942	1,939	1,977
$Z_3(\nu)$	- 6	- 0,857	- 1,06	- 0,982	- 1,004	- 0,997

(55)

Может оказаться, что из рассмотрения полученных результатов не складывается четкого представления о предельных значениях вычисляемых корней. Для получения результатов более близких к предельным может быть использовано очередное приближение или переход к более точным подуравнениям второй степени.

В таблицу результатов (55) нами введено шестое приближение. Оно не убеждает, поэтому вводим в рассмотрение два подуравнения второй степени уравнения образа (53)

$$Z_V{}^2 - m_V Z_V + m_{VV} = 0$$

$$m_V Z_V{}^2 - m_{VV} Z_V + m_{VVV} = 0 \qquad (56)$$

Вычисляем приближения корней

$$Z_{1,2}(v) = \sqrt[V]{0{,}5(m_V \pm \sqrt{m_V{}^2 - 4m_{VV}})}$$

$$Z_{2,3}(v) = \sqrt[V]{m_{VV} \pm \sqrt{m_{VV}{}^2 - 4m_V m_{VVV}} / \sqrt[V]{2m_V}} \qquad (57)$$

и сводим в таблицу для анализа

ν	1	2	3	4	5	6
$Z_1(\nu)$	3,75	2,65	3,24	2,998	3,100	3,000
$Z_2(\nu)$	0,25	2,65	1,88	2,034	1,99	2,0003
$Z_2(\nu)$	1,35	1,56	1,85	1,91	1,97	1,986
$Z_3(\nu)$	-1,1	-1,02	-1,002	1,0004	1,00002	-1,00000

(58)

Как и ожидалось, результаты вычислений в квадратичном приближении значительно быстрее сходятся и обнаруживают предельные значения корней. Определившись с предельными значениями корней и проверив их подставкой, принимаем корни заданного уравнения (51) равными

$$Z_1 = 3, \qquad Z_2 = 2, \qquad Z_3 = -1 \qquad (59)$$

Выбираем из использованных для приближенных вычислений формул (54, 57) формулу общего решения, определяемся с допустимой величиной ошибки, т.е. с выбором степени (ν) функции отображения и выписываем общие решения для корней заданного уравнения, на основе выражений связи для моментов уравнений образов и оригинала, приведенных в приложении 1.

Учитывая то, что при используемом отображении (2) корни уравнений образов являются степенями корней оригинала, решения для корней заданного уравнения можно получить в форме без радикала, выбирая его как отношение $(\nu + 1)$ -того и ν-того приближений. Например, для третьего корня заданного уравнения (51), ограничиваясь допустимой величиной ошибки до 6% и выбирая, соответственно ν = 3, общее решение, согласно формуле вычисления (54.3), можно записать дробно-рациональной функцией

$$Z_3 = m_{111} \frac{m_{11}{}^3 - 3m_1 m_{11} m_{111} + 3m_{111}{}^2}{m_{11}{}^4 - 4m_1 m_{11}{}^2 m_{111} + 2m_1{}^2 m_{111}{}^2 + 4m_{11} m_{111}{}^2} \tag{60}$$

В рамках уравнения третий степени задача может быть поставлена и так: известны корни уравнения

$$Z_3 = -1, \qquad Z_{1,2} = 5 \pm 3i \tag{61}$$

Требуется построить общее решение уравнения, корнями которого являются заданные (61) корни. Причем, относительная ошибка решения, при вычислении корней, не должна превышать 1%.

При построении общего решения исходим из следующих предпосылок.

Наименьший по модулю действительный корень (Z_3) будет определяться линейным подуравнением

$$m_{VV} Z_{V3} - m_{VVV} = 0 \tag{62}$$

Комплексные корни будут определяться из подуравнения второй степени, формулой

$$Z_{1,2}(v) = \sqrt[V]{0,5(m_V \pm \sqrt{m_V{}^2 - 4m_{VV}})} \tag{63}$$

Относительная ошибка вычисления действительного корня в его ν-том приближении, по определению и согласно формуле (62) вычисления, равна

$$\delta(v) = \frac{Z_3 - Z_3(v)}{Z_3} = 1 - \sqrt[V]{\frac{m_{VVV}}{m_{VV} Z_3{}^V}} = 1 - \sqrt[-V]{1 + Z_3{}^V \frac{Z_1{}^V + Z_3{}^V}{Z_1{}^V Z_3{}^V}} \tag{64}$$

Относительная ошибка вычисления комплексных корней (63) полагаем, не выше ошибки вычисления действительного корня, так как комплексные корни вычисляются из подуравнения второй степени, т.е. с меньшими пренебрежениями чем действительный корень.

Вычисляем последовательно величину ошибки (64) для первого, второго, третьего и т.д. приближений, пока рассчетное значение ошибки не уложится в требуемую по условию величину

ν	1	2	3
δ(ν)	0,227	0,014	0,0005

(65)

Итак, мы получили, что уравнение с заданными корнями (61) имеет требуемое предельное решение при отображении на плоскость третьего порядка. Остается лишь, воспользовавшись формулами связи приложения 1, раскрыть рассчетные соотношения (62 и 63), в общие решения

$$Z_{1,2}(3)=\sqrt[3]{0{,}5(m_3 \pm \sqrt{m_3{}^2-4m_{33}})}=\sqrt{0{,}5(m_1{}^3-3m_1m_{11}+3m_{111}) \pm \sqrt{(m_1{}^3-3m_1m_{11}+3m_{111})^2-4(m_{11}{}^3-3m_1m_{11}m_{111}+3m_{111}{}^2)}} \quad (66)$$

Полученное предельное общее решение позволяет с заданной точностью производить численные вычисления и физическое исследование корней уравнения.

4. Решение уравнений четвертой степени.

В общем виде уравнение мы всегда имеем в виду записанным в канонической знакопеременной форме.

$$Z^4 - n_1 Z^3 + n_{11} Z^2 - n_{111} Z + n_{1111} = 0 \quad (67)$$

Однако решаем уравнения только в частной, числовой форме, например

$$Z^4 - 10Z^3 + 34Z^2 - 50Z + 25 = 0 \quad (68)$$

Воспользовавшись таблицей моментов приложения 1 выписываем, вычисляем и заносим в таблицу моменты уравнений оригинала и образов отображений

$$Z_V{}^4 - n_V Z_V{}^3 + n_{VV} Z_V{}^2 - n_{VVV} Z_V + n_{VVVV} = 0 \quad (69)$$

ν	1	2	3	4	5	6
n_ν	10	32	130	612	3050	15392
$n_{\nu\nu}$	34	206	754	-7514	-231326	-3625234
$n_{\nu\nu\nu}$	50	800	16250	382500	9531250	240500000
$n_{\nu\nu\nu\nu}$	25	625	15625	390625	9765625	244140625

(70)

Знание моментов уравнений отображений необходимо прежде всего для выяснения порядка распределения корней заданного уравнения по модулю и характеру. Для чего, полагая для начала, что корни заданного уравнения (68) действительны и различны, разделяем уравнение образа (69) на линейные подуравнения, каждое из которых определяет свой корень в ν-том приближении

$$Z_1(\nu) = \sqrt[V]{n_V}$$

$$Z_2(\nu) = \sqrt[\nu]{n_{VV} / n_V}$$

$$Z_3(\nu) = \sqrt[\nu]{n_{VVV} / n_{VV}}$$

$$Z_4(\nu) = \sqrt[\nu]{n_{VVVV} / n_{VVV}} \qquad (71)$$

Используя найденные значения моментов (70), вычисляем (71) и сводим в таблицу приближения корней заданного уравнения

ν	1	2	3	4	5	6
$Z_1(\nu)$	10	5,657	5,066	4,974	4,976	4,988
$Z_2(\nu)$	3,4	2,537	1,797	$1{,}87\sqrt[4]{-1}$		
$Z_3(\nu)$	1,47	1,97	2,78	$2{,}67\sqrt[4]{-1}$		
$Z_4(\nu)$	0,5	0,884	0,987	1,004	1,005	1,002

(72)

Результаты вычислений показывают, что последовательности приближений корней Z_2 и Z_3 действительных пределов не имеют, так как в четвертом приближении значения корней Z_2 и Z_3 комплексны. Корни очевидно парные, линейные подуравнения, на основе которых они вычислялись, должны быть заменены подуравнением второй степени

$$n_V Z_V^{\ 2} - n_{VV} Z_V + n_{VVV} = 0 \qquad (73)$$

Последовательности приближений корней Z_1 и Z_4 предположительно сходятся. Построением асимптот определяем их пределы, проверяем подстановкой, уточняем и окончательно принимаем равными

$$Z_1 = 5\,, \quad Z_4 = 1 \qquad (74)$$

На основе расчетных формул (71), для корней Z_1 и Z_4 могут быть построены и общие предельные решения, например, с допустимой погрешностью до 1,5%

$$Z_1(3) = \sqrt[3]{n_3} = \sqrt[3]{n_1^{\ 3} - 3n_1 n_{11} + 3n_{111}}$$

$$Z_4(3) = \sqrt[3]{\frac{n_{333}}{n_{333}}} = \sqrt[3]{\frac{n_{1111}^{\ 3}}{n_{111}^{\ 3} - 3n_{11}n_{111}n_{1111} + 3n_1 n_{1111}^{\ 2}}} \qquad (75)$$

Решения могут быть построены и без радикалов, как отношения соответственно четвертого приближения к третьему

$$Z_1(4/3) = \frac{n_1^{\ 4} - 4n_1^{\ 2} n_{11} + 2n_{11}^{\ 2} + 4n_1 n_{111} - 4n_{1111}}{n_1^{\ 3} - 3n_1\ n_{11} + 3n_{111}}$$

$$Z_4(4/3) = n_{1111} \frac{n_{111}^{\ 3} - 3n_{11} n_{111} n_{1111} + 3n_1 n_{1111}^{\ 2}}{n_{111}^{\ 4} - 4n_{11}\ n_{111}^{\ 2} n_{1111} + 2n_{11}^{\ 2} n_{1111}^{\ 2} + 4n_1 n_{111} n_{1111}^{\ 2} - 4n_{1111}^{\ 3}} \tag{76}$$

Относительная ошибка вычислений корней при этом возрастает

$$\frac{Z_1 - \dfrac{n_4}{n_3}}{Z_1} = \frac{5 - 612/130}{5} = 0.058 \tag{77}$$

Однако она может быть уменьшена переходом к следующему приближению

$$\frac{Z_1 - \dfrac{n_5}{n_4}}{Z_1} = \frac{5 - 3050/612}{5} = 0.003 \tag{78}$$

Возвращаясь к парным корням Z_2 и Z_3 заданного уравнения, выпишем формулу вычисления их ν-тых степеней, исходя из подуравнения второй степени (73)

$$Z_{2,3}^{\ \ V} = \frac{n_{VV} \pm \sqrt{n_{VV}^{\ 2} - 4n_V n_{VVV}}}{2n_V} \tag{79}$$

Воспользовавшись подготовленными (70) значениями моментов отображений, вычисляем и заносим в таблицу приближения степеней и самих корней заданного уравнения (68)

ν	1	2	3	4	5	6

$Z^{\nu}_{2,3}(\nu)$	1,7±1,45i	3,219±3,826i	2,9±10,798i	-6,14±24,235i	-37,92±41,0i	-117,76±42,1i
$Z_{2,3}(\nu)$	1,7±1,45i	2,027±0,944i	2,027±0,944i	2,009±0,982i	2,001±0,991i	2,000±0,998i

(80)

Корни заданного уравнения из корней уравнений образов вычисляются в соответствии с методикой изложенной в приложении 2 к настоящей работе. Как это следует из полученных для корней величин действительная и мнимая составляющие приближений самостоятельно, в соответствии с выше изложенными общими выводами, асимптотически сходятся к своим предельным значениям. Для определенности эти предельные значения, хотя бы ориентировочно, необходимо прогнозировать, так как подстановками в заданное уравнение комплексный корень не корректируется. Точному доопределению комплексный корень подлежит вне заданного уравнения и система таких средств для общего случая есть.

В рассматриваемом примере выпишем формулу первого момента заданного уравнения

$$n_1 = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 \tag{81}$$

Подставляя в нее известные значения момента (70) и корней (74), определяем удвоенную действительную часть искомых комплексно сопряженных корней (80)

$$Z_2 + Z_3 = 10 - 5 - 1 = 4 \tag{82}$$

Теперь, с достаточной степенью уверенности, опираясь на результаты вычислений (80), можно положить комплексно сопряженные корни заданного уравнения равными

$$Z_{2,3} = 2 \pm i \tag{83}$$

Подстановка найденных значений корней в заданное уравнение делается только для контроля и уточнения мнимой части вычисленных корней (83).

Общее решение для комплексных корней заданного уравнения строится на основе формулы вычислений (79), заменой моментов уравнений образа на единичные моменты заданного уравнения в соответствии с таблицей приложения 1. Так, если удовлетворительным оказывается третье приближение, то общее решение примет вид

$$Z_{2,3}{}^3 = \frac{n_{11}{}^3 + 3n_{111}{}^2 - 3n_1 n_{11} n_{111} + 3n_1{}^2 n_{1111} - 3n_{11} n_{1111}}{2(n_1{}^3 - 3n_1 n_{11} + 3n_{111})} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{(n_{11}{}^3 + 3n_{111}{}^2 - 3n_1 n_{11} n_{111} + 3n_1^2 n_{1111} - 3n_{11} n_{1111})^2 - 4(n_1{}^3 - 3n_1 n_{11} + 3n_{11})(n_{111}{}^3 - 3n_{11} n_{111} n_{1111} + 3n_1 n_{11111}{}^2)}}{2(n_1{}^3 - 3n_1 n_{11} + 3n_{111})} \tag{84}$$

Подстановка в общее решение (84) значений моментов заданного уравнения дает не истинную величину комплексного корня (83), а приближенную (80), соответствующую третьему отображению. Степень приближения вычисленной величины комплексного корня к его истинному значению, количественно, может быть охарактеризована относительной величиной ошибки для действительной или мнимой части корня.

5. Решение уравнений пятой степени.

Приведенные выше обоснования и примеры решения уравнений младших степеней, представляется, достаточно основательно указывают на принципиальную возможность предельного решения уравнений пятой и более высоких степеней. Разберем однако, и более подробно, пример решения уравнения пятой степени

$$Z^5 - p_1 Z^4 + p_{11} Z^3 - p_{111} Z^2 + p_{1111} Z - p_{11111} = 0 \qquad (88)$$

представляющего собой, помимо прочего, еще и известный психологический барьер.

Пусть в числах уравнение имеет вид

$$Z^5 - (-1{,}2)Z^4 + (-15{,}79)Z^3 - (-12{,}61)Z^2 + (-14{,}17)Z - (-15{,}15) = 0 \qquad (89)$$

Воспользовавшись заданными значениями моментов (89) и формулами связи из приложения, выпишем, вычислим и внесем в таблицу моменты заданного уравнения и уравнений образов

ν	1	2	3	4	5
p_ν	-1,2	33,02	-96,402	708,8802	-2881,696
$p_{\nu\nu}$	-15,79	190,7201	-3529,98	52661,342	-838486
$p_{\nu\nu\nu}$	-12,61	-252,1165	-5551,7932	147873,253	
$p_{\nu\nu\nu\nu}$	-14,17	-181,2941	-5596,4854	148600,369	
$p_{\nu\nu\nu\nu\nu}$	-15,15	229,5225	-3477,2659	52680,578	

(90)

В предположении того, что корни заданного уравнения (89) действительны и различны, расщепляем уравнение его образа

$$Z_V{}^5 - p_V Z_V{}^4 + p_{VV} Z_V{}^3 - p_{VVV} Z_V{}^2 + p_{VVVV} Z_V - p_{VVVVV} = 0 \quad (91)$$

на линейные подуравнения,

$$Z_{V1} - p_V = 0$$

$$p_V Z_{V2} - p_{VV} = 0$$

$$p_{VV} Z_{V3} - p_{VVV} = 0$$

$$p_{VVV} Z_{V4} - p_{VVVV} = 0$$

$$p_{VVVV} Z_{V5} - p_{VVVVV} = 0 \qquad (92)$$

каждое из которых, приближенно определяет свой корень уравнения образа, а в соответствии с функцией отображения (2) и ν-ы приближения корней уравнения оригинала

$$Z_1(\nu) = \sqrt[V]{p_V}$$

$$Z_2(\nu) = \sqrt[V]{p_{VV} / p_V}$$

$$Z_3(\nu) = \sqrt[V]{p_{VVV} / p_{VV}}$$

$$Z_4(\nu) = \sqrt[V]{p_{VVVV} / p_{VVV}} \qquad (93)$$

Используя найденные значения моментов (90) уравнений образов, вычислим и выпишем приближения корней заданного уравнения

N	1	2	3	4	5	4(2)	5(2)
$Z_1(\nu)$	-1,2	-5,7	-4,58	-5,2	-4,92	-4,998	-5,006
$Z_2(\nu)$	13,2	2,40	3,323	2,937	3,11	3,027	3,053
$Z_3(\nu)$	0,799	1,14(i)					
$Z_4(\nu)$	1,12	0,847	1,0026	1,0014			
$Z_5(\nu)$	1,07	1,12(i)					

(94)

Здесь первое приближение (ν=1) указывает нам на знаки корней, не различая их на действительные и комплексные.

Второе приближение дополнило сведения первого указанием на комплексный характер третьего и пятого корней уравнения. Дальнейшее их вычисление в линейном приближении ошибочно и приостанавливается.

Четвертый, положительный, действительный корень оказался между, вероятно, комплексно сопряженными корнями Z_3 и Z_5 , что может быть следствием близости значений модулей корней Z_4 и Z_3, Z_5. В подтверждение тому, третье и четвертое приближения корня Z_4, казалось бы убедительно указывают на наличие его предельного значения. Принимаем корень равным единице

$$Z_4 = 1 \qquad (95)$$

Контрольная подстановка показывает, что найденный предел действительно является корнем заданного уравнения.

При вычислении приближений первого отрицательного корня заданного уравнения обращаем внимание на то, что в многозначном результате вычислений каждый раз действительно есть отрицательное значение, которое и заносится в таблицу (94) для дальнейшего анализа. Исходя из аналогичных рассуждений, вносятся в таблицу (94) результаты вычислений приближений и других корней. Дойдя до пятого приближения корней Z_1 и Z_2 и, желая получить более уверенное представление об их предельных значениях, повторяем их вычисление в четвертом и пятом отображениях, в квадратичном приближении расчетного подуравнения

$$Z_V{}^2 - p_V Z_V + p_{VV} = 0$$

$$Z_{1,2}{}^4(4) = 0{,}5(708{,}88 \pm \sqrt{708{,}88^2 - 4 \times 52661}) = -4{,}998^4; 3{,}027^4$$

$$Z_{1,2}{}^5(5) = 0{,}5(-2882 \pm \sqrt{2882^2 - 4 \times 838486}) = -5{,}006^5; 3{,}053^5 \qquad (96)$$

После внесения результатов вычислений в таблицу (93) для анализа, принимаем предельные значения для корней Z_1 и Z_2 заданного уравнения равными

$$Z_{1,2} = -5;\ 3 \qquad (97)$$

Подстановкой проверяем и убеждаемся в правильности проведенных вычислений.

Для вычисления оставшихся парных корней Z_3 и Z_5 исключаем из заданного уравнения (88) найденные корни Z_1,Z_2 и Z_4, объединив их предварительно в уравнение третей степени

$$Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111} = 0$$

$$m_1 = -1; m_{11} = -17; m_{111} = -15 \qquad (98)$$

и решаем оставшееся квадратное уравнение

$$Z^2 - (p_1 - m_1)Z + (m_1{}^2 - p_1 m_1 + p_{11} - m_{11}) = 0 \qquad (99)$$

Подставляя в формулу решения найденного уравнения (99) второй степени

$$Z_{3,5} = 0,5[(p_1 - m_1) \pm \sqrt{(p_1 + m_1)^2 - 4(m_1{}^2 + p_{11} - m_{11})}\,] \qquad (100)$$

значения моментов уравнений (98) вычисляем парные корни заданного уравнения

$$Z_{3,5} = 0,5[(-1,2 + 1) \pm \sqrt{(-1,2 - 1)^2 - 4(1 - 15,79 + 17)}\,] = -0,1 \pm i \qquad (101)$$

Парными корнями оказались два комплексно сопряженных числа. По модулю, как и предполагалось, найденные корни относительно близки к корню Z_4.

Построенная формула вычисления (99) комплексных корней заданного уравнения одновременно является и общим решением для корней Z_3 и Z_5. Общие решения для действительных корней Z_1, Z_2 и Z_4 строятся тоже по формулам их вычислений, после выбора величин приближений.

Приложение 1

Кратные моменты точек плоскости

1. Моменты двух точек

$d_1 = (Z_1 + \dots)_2 = d_1$

$d_{11} = (Z_1 Z_2 + \dots)_1 = d_{11}$

$d_2 = (Z_1^2 + \dots)_2 = d_1^2 - 2 d_{11}$

$d_{22} = (Z_1^2 Z_2^2 + \dots)_1 = d_{11}^2$

$d_3 = (Z_1^3 + \dots)_2 = d_1^3 - 3 d_1 d_{11}$

$d_{33} = (Z_1^3 Z_2^3 + \dots)_1 = d_{111}^3$

$d_4 = (Z_1^4 + \dots)_2 = d_1^4 - 4 d_1^2 d_{11} + 2 d_{11}^2$

$d_{44} = (Z_1^4 Z_2^4 + \dots)_1 = d_{11}^4$

$d_5 = (Z_1^5 + \dots)_2 = d_1^5 - 5 d_1^3 d_{11} + 5 d_1 d_{11}^2$

$d_{55} = (Z_1^5 Z_2^5 + \dots)_1 = d_{11}^5$

2. Моменты трех точек

$m_1 = (Z_1 + \dots)_3 = m_1$

$m_{11} = (Z_1 Z_2 + \dots)_3 = m_{11}$

$m_{111} = (Z_1 Z_2 Z_3 + \dots)_1 = m_{111}$

$m_2 = (Z_1^2 + \dots)_3 = m_1^2 - 2m_{11}$

$m_{22} = (Z_1^2 Z_2^2 + \dots)_3 = m_{11}^2 - 2 m_1 m_{111}$

$m_{222} = (Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \dots)_1 = m_{111}^2$

$m_3 = (Z_1^3 + \dots)_3 = m_1^3 - 3 m_1 m_{11} + 3m_{111}$

$m_{33} = (Z_1^3 Z_2^3 + \dots)_3 = m_{11}^3 - 3 m_1 m_{11} m_{111} + 3m_{111}^2$

$m_{333} = (Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \dots)_1 = m_{111}^3$

$m_4 = (Z_1^4 + \dots)_3 = m_1^4 - 4 m_1^2 m_{11} + 2m_{11}^2 + 4 m_1 m_{111}$

$m_{44} = (Z_1^4 Z_2^4 + \dots)_3 = m_{11}^4 - 4 m_1 m_{11}^2 m_{111} + 2 m_1^2 m_{111}^2 + 4 m_{11} m_{111}^2$

$m_{444} = (Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 + \dots)_1 = m_{111}^4$

$m_5 = (Z_1^5 + \dots)_3 = m_1^5 - 5 m^3{}_1 m_{11} + 5 m_1^2 m_{111} + 5 m_1 m_{11}^2 - 5 m_{11} m_{111}$

$m_{55} = (Z_1^5 Z_2^5 + \dots)_3 = m_{11}^5 - 5 m_1 m_{11}^3 m_{111} + 5 m_{11}^2 m_{111}^2 + 5 m_1^2 m_{11} m_{111}^2 - 5 m_1 m_{111}^3$

$m_{555} = (Z_1^5 Z_2^5 Z_3^5 + \dots)_1 = m_{111}^5$

3. Моменты четырех точек

$n_1 = (Z_1 + \ldots)_4 = n_1$

$n_{11} = (Z_1 Z_2 + \ldots)_6 = n_{11}$

$n_{111} = (Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots)_4 = n_{111}$

$n_{1111} = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + \ldots)_1 = n_{1111}$

$n_2 = (Z_1^2 + \ldots)_4 = n_1^2 - 2n_{11}$

$n_{22} = (Z_1^2 Z_2^2 + \ldots)_6 = n_{11}^2 - 2 n_1 n_{111} + 2n_{1111}$

$n_{222} = (Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots)_4 = n_{111}^2 - 2 n_{11} n_{1111}$

$n_{2222} = (Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 + \ldots)_1 = n_{1111}^2$

$n_3 = (Z_1^3 + \ldots)_4 = n_1^3 - 3 n_1 n_{11} + 3n_{111}$

$n_{33} = (Z_1^3 Z_2^3 + \ldots)_6 = n_{11}^3 + 3 n_{111}^2 - 3 n_1 n_{11} n_{111} + 3n_1^2 n_{1111} - 3 n_{11} n_{1111}$

$n_{333} = (Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \ldots)_4 = n_{111}^3 - 3 n_{11} n_{111} n_{1111} + 3n_1 n_{1111}^2$

$n_{3333} = (Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 Z_4^3 + \ldots)_1 = n_{1111}^3$

$n_4 = (Z_1^4 + \ldots)_4 = n_1^4 - 4 n_1^2 n_{11} + 2n_{11}^2 + 4 n_1 n_{111} - 4n_{111}$

$n_{44} = (Z_1^4 Z_2^4 + \ldots)_6 = n_{11}^4 + 2n_1^2 n_{111}^2 + 6 n_{1111}^2 - 4 n_1 n_{11}^2 n_{111} - 4 n_{11}^2 n_{1111} - 8 n_1 n_{111} n_{1111} +$
$+ 4n_{11} n_{111}^2 + 4 n_1^2 n_{11} n_{1111}$

$n_{444} = (Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 + \ldots)_4 = n_{111}^4 - 4 n_{11} n_{111}^2 n_{1111} + 2n_{11}^2 n_{1111}^2 + 4 n_1 n_{111} n_{1111}^2 - 4 n_{1111}^3$

$n_{4444} = (Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 Z_4^3 + \ldots)_1 = n_{1111}^4$

$n_5 = (Z_1^5 + \ldots)_4 = n_1^5 - 5 n_1^3 n_{11} + 5 n_1^2 n_{111} - 5 n_1 n_{1111} + 5n_1 n_{11}^2 - 5 n_{11} n_{111}$

$n_{55} = (Z_1^5 Z_2^5 + \ldots)_6 = n_{11}^5 + 5 n_1^2 n_{11} n_{111}^2 + 5 n_{11} n_{1111}^2 - 5 n_1 n_{11}^3 n_{111} - 5 n_{11}^3 n_{1111} -$
$- 5 n_1 n_{11} n_{111} n_{1111} + 5 n_{11}^2 n_{111}^2 - 5 n_1 n_{111}^2 - 5 n_1^3 n_{111} n_{1111} + 5 n_1^2 n_{1111}^2$

$n_{555} = (Z_1^5 Z_2^5 Z_3^5 + \ldots)_4 = n_{111}^5 - 5 n_{111}^3 n_{11} n_{1111} + 5n_{11}^2 n_{111} n_{1111}^2 + 5 n_1 n_{111}^2 n_{1111}^2 -$
$- 5 n_{111} n_{1111}^3 - 5 n_1 n_{11} n_{1111}^3$

$n_{5555} = (Z_1^5 Z_2^5 Z_3^5 Z_4^5 + \ldots)_1 = n_{1111}^5$

4. Моменты пяти точек

$p_1 = (Z_1 + \ldots)_5 = p_1$

$p_{11} = (Z_1 Z_2 + \ldots)_{10} = p_{11}$

$p_{111} = (Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots)_{10} = p_{111}$

$p_{1111} = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + \ldots)_5 = p_{1111}$

$p_{11111} = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 Z_5 + \ldots)_1 = p_{11111}$

$p_2 = (Z_1^2 + \ldots)_5 = p_1^2 - 2p_{11}$

$p_{22} = (Z_1^2 Z_2^2 + \dots)_{10} = p_{11}^2 - 2 p_1 p_{111} + 2p_{1111}$

$p_{222} = (Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \dots)_{10} = p_{111}^2 - 2 p_{11} p_{1111} + 2 p_1 p_{11111}$

$p_{2222} = (Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 + \dots)_5 = p_{1111}^2 - 2 p_{111} p_{1111}$

$p_{22222} = (Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 Z_5^2 + \dots)_1 = p_{11111}^2$

$p_3 = (Z_1^3 + \dots)_5 = p_1^3 - 3 p_1 p_{11} + 3p_{111}$

$p_{33} = (Z_1^3 Z_2^3 + \dots)_{10} = p_{11}^3 - 3 p_1 p_{11} p_{111} - 3 p_{11} p_{1111} + 3p_{111}^2 + 3 p_1^2 p_{1111} - 3 p_1 p_{11111}$

$p_{333} = (Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \dots)_{10} = p_{111}^3 - 3 p_{11} p_{111} p_{1111} - 3p_1 p_{111} p_{11111} + 3 p_1 p_{1111}^2 - 3 p_{1111} p_{11111} +$
$+3 p_{11}^2 p_{11111}$

$p_{3333} = (Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 Z_4^3 + \dots)_5 = p_{1111}^3 - 3 p_{111} p_{1111} p_{11111} + 3p_{11} p_{11111}^2$

$p_{33333} = (Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 Z_4^3 Z_5^3 + \dots)_1 = p_{11111}^3$

$p_4 = (Z_1^4 + \dots)_5 = p_1^4 - 4 p_1^2 p_{11} + 2p_{11}^2 + 4 p_1 p_{111} - 4p_{1111}$

$p_{44} = (Z_1^4 Z_2^4 + \dots)_{10} = p_{11}^4 - 4p_1 p_{11}^2 p_{111} - 4 p_{11}^2 p_{1111} + 4 p_{11} p_{111}^2 + 4 p_1^2 p_{11} p_{1111} +$
$+ 8 p_1 p_{11} p_{11111} + 2 p_1^2 p_{111}^2 - 8 p_1 p_{111} p_{1111} - 4p_1^3 p_{11111} + 6p_{1111}^2 - 4 p_{111} p_{11111}$

$p_{444} = (Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 + \dots)_{10} = p_{111}^4 + 3p_{11}^2 p_{1111}^2 - 4p_1^2 p_{11111}^2 - 4 p_{11} p_{111}^2 p_{1111} -$
$- 8 p_1 p_{11} p_{1111} p_{11111} + 2p_{11}^2 p_{111} p_{11111} + 2 p_1 p_{111} p_{1111}^2 - 2p_{1111}^3 + 4 p_{111} p_{1111} p_{11111} +$
$+ 16 p_{11} p_{11111}^2$

$p_{4444} = (Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 Z_4^4 + \dots)_5 = p_{1111}^4 - 4p_{111} p_{1111}^2 p_{11111} + 2p_{111}^2 p_{11111}^2 + 4 p_{11} p_{1111} p_{11111}^2 -$
$- 4 p_1 p_{11111}^3$

$p_5 = (Z_1^5 + \dots)_5 = p_1^5 - 5 p_1^3 p_{11} + 5p_1^2 p_{111} + 5 p_1 p_{11}^2 - 5p_1 p_{1111} - 5p_{11} p_{111} + 5 p_{11111}$

$p_{55} = (Z_1^5 Z_2^5 + \dots)_{10} = p_{11}^5 - 5p_1 p_{11}^3 p_{111} - 5p_{11}^3 p_{1111} + 5p_{11}^2 p_{111}^2 + 5p_1^2 p_{11}^2 p_{111} +$
$+10 p_1 p_{11}^2 p_{11111} + 5p_1^2 p_{11} p_{111}^2 - 5p_1 p_{11} p_{111} p_{1111} - 15p_{11} p_{111} p_{11111} - 5p_1^3 p_{11} p_{11111} +$
$+5p_{11} p_{1111}^2 + 5p_{111}^3 p_{1111} + 5p_1^2 p_{1111}^2 - 15p_1 p_{1111} p_{11111} - 5p_1 p_{111}^3 - 5 p_1^3 p_{111} p_{1111} +$
$+ 10 p_1^2 p_{111} p_{11111} + 10p_{11111}^2$

Замечания.

Проверка правильности записи момента включает в себя

1. Проверку на постоянство размерности всех слагаемых.

2. Проверку на равенство количества частных моментов в определяемом (кратном) моменте и его выражении через единичные.

Количества частных моментов в кратном и единичных определяется заскобочным индексом в их кратной записи. Например, для кратного момента p_5

$5 = 5^5 - 5x5^3x10 + 5x5^2x10 + 5x5x10^2 – 5x5x5 – 5x10x10 + 5x1 = 5$

Настоящую проверку можно рассматривать как проверку подстановкой

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = Z_5 = 1$$

3. Проверка подстановкой нетривиального набора корней.

Проверка подстановкой является достаточно полной, в то время как за проверками по п.п. 1 и 2 может скрыться и неправильно вычисленный момент.

Приложение 2

Извлечение корней
из комплексных чисел в алгебраической форме.

1. Корень второй степени.

Пусть задано комплексное число, из которого следует извлечь корень второй степени.

В соответствии со степенью извлекаемого корня полагаем, что число задано на плоскости второго порядка. Соответственно обозначаем заданное число –Z_2.

Будем считать, что заданное и комплексно ему сопряженное число являются корнями уравнения второй степени на плоскости второго порядка

$$Z_2^2 - d_2 Z_2 + d_{22} = 0 \tag{1}$$

Построенное уравнение (1) рассматриваем как образ уравнения оригинала второй степени на плоскости первого порядка

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \tag{2}$$

полученное стандартным отображением функцией

$$Z_2 = Z^2 \tag{3}$$

Моменты уравнения образа (1) и оригинала (2) связаны соотношениями

$$\begin{aligned} d_2 &= d_1^2 - d_{11} \\ d_{22} &= d_{11}^2 \end{aligned} \tag{4}$$

а так как моменты уравнения образа определены заданными числами

$$\begin{aligned} d_2 &= Z_2 + \overline{Z_2} \\ d_{22} &= Z_2 \overline{Z_2} \end{aligned} \tag{5}$$

то формулы связи (4) моментов могут быть использованы для вычисления моментов уравнения оригинала

$$d_1 = \pm\sqrt{2\sqrt{Z_2\overline{Z_2}} + Z_2 + \overline{Z_2}}$$

$$d_{11} = \sqrt{Z_2\overline{Z_2}} \qquad (6)$$

Уравнение оригинала (2) определено, а найденные его корни и есть решение поставленной задачи

$$Z_{1..1,2} = 0{,}5(d_1 \pm \sqrt{d_1^{\,2} - 4d_{11}}) = \pm 0{,}5(\sqrt{2\sqrt{Z_2\overline{Z_2}} + Z_2 + \overline{Z_2}} \pm i\sqrt{2\sqrt{Z_2\overline{Z_2}} - Z_2 - \overline{Z_2}}) \qquad (7)$$

Точнее, определены два уравнения оригинала, соответственно для двух значений его первого момента d_1. Т.е поставленная задача имеет два решения – прямое и противоположное.

Пример.

Произведем проверку полученной формулы (7) вычисления. Положим корни уравнения оригинала равными

$$Z_{1\ 1,2} = 2 \pm i \qquad (8)$$

Возведением в квадрат корней уравнения оригинала получаем соответственно корни уравнения образа стандартного отображения на плоскость второго порядка

$$Z_{2\ 1,2} = (2 \pm i)^2 = 3 \pm 4\,i \qquad (9)$$

Подставляя значения корней образа в формулу (7) вычисления корней, получим корни уравнения оригинала

$$Z_{1..1,2} = 0{,}5(\sqrt{2\sqrt{9+16} + 3 + 3} \pm i\sqrt{2\sqrt{9+16} - 3 - 3}) = \pm 2 \pm i \qquad (10)$$

2. Корень третьей степени.

Заданное и ему сопряженное числа считаем корнями уравнения образа

$$Z_3^{\,2} - d_3\,Z_3 + d_{33} \qquad (11)$$

стандартным отображением

$$Z_3 = Z^3 \qquad (12)$$

оригинала

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \qquad (13)$$

Из формул связи моментов уравнений образа и оригинала

$$d_3 = d_1^3 - 3 d_1 d_{11}$$
$$d_{33} = d_{11}^3 \qquad (14)$$

находим выражения для определения моментов оригинала

$$d_{11} = \sqrt[3]{Z_3 \overline{Z_3}}$$

$$d_1^3 - 3\sqrt[3]{Z_3 \overline{Z_3}} d_1 - (Z_3 + \overline{Z_3}) = 0 \qquad (15)$$

Вычислив моменты уравнения оригинала, а затем и его корни, мы решим поставленную задачу. Отмечаем сразу, что системой уравнений (15) определяется три значения для первого момента (d_1) уравнения оригинала. Т.е. мы получили три уравнения оригинала, каждое из которых определит одно из возможных решений поставленной задачи. Причем, в силу того, что по заданию корни уравнения образа комплексно сопряжены, комплексно сопряжены и корни уравнения оригинала и, следовательно, действительны все три значения первого момента (15) уравнения оригинала.

Пример.

Извлечем корень третьей степени из комплексного числа

$$Z_3 = 2 + 11 i \qquad (16)$$

По формулам (15) вычисления моментов уравнения оригинала находим значение второго момента

$$d_{11} = \sqrt[3]{(2+11i)(2-11i)} = 5 \qquad (17)$$

и уравнение третьей степени для вычисления значений первого момента

$$d_1^3 - m_1 d_1^2 - m_{11} d_1 - m_{111} = d_1^3 + (-15) d_1 - 4 = 0 \qquad (18)$$

Корни полученного уравнения, как уже известно, действительны и различны, поэтому вычислять их наиболее целесообразно предельным методом.

Вычислим наименьший по модулю корень уравнения (18), первое приближение которого

$$d_{13}(1) = m_{14} / m_4 = 4/(-15) = -0{,}267 \qquad (19)$$

весьма близко к нулю и сразу довольно таки хорошо удовлетворяет уравнению. Проведя несколько уточняющих вычислительных операций, принимаем корень равным

$$d_{13} = -0{,}2679 \qquad (20)$$

Делением исключаем найденный корень из решаемого уравнения (18) и вычисляем его оставшиеся два корня

$$d_{12} = -3{,}732$$
$$d_{11} = 4 \qquad (21)$$

Для каждого из трех найденных значений (20, 21) первого момента, уравнение оригинала(13), с учетом ранее вычисленного значения (17) для второго момента, определяет пару комплексно сопряженных корней третьей степени из заданного и ему сопряженного комплексных чисел

$$Z_{1,2}\,(d_{11}) = -0{,}134 \pm 2{,}232\ i$$
$$Z_{1,2}\,(d_{12}) = -1{,}866 \pm 1{,}232\ i$$
$$Z_{1,2}\,(d_{13}) = 2 \pm i \qquad (22)$$

Корни третьей степени из комплексного числа, как это видно из полученных результатов (22), расположены в вершинах равностороннего треугольника, что соответствует известным выводам Муавра.

Условно, главным значением корня будем считать корень соответствующий наибольшей величине первого момента уравнения оригинала.

3. Корень четвертой степени.

По-прежнему, считаем заданное число и его комплексно сопряженное корнями уравнения образа

$$Z_4^2 - d_4 Z_4 + d_{44} = 0 \qquad (23)$$

стандартного отображения на плоскость четвертого порядка функцией

$$Z_4 = Z^4 \qquad (24)$$

уравнения оригинала

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \qquad (25)$$

Из табличных формул связи моментов уравнений образа и оригинала

$$d_4 = d_1^4 - 4\, d_1^2\, d_{11} + 2\, d_{11}^2$$
$$d_{44} = d_{11}^4 \qquad (26)$$

находим формулы для определения моментов уравнения оригинала через известные кратные моменты

$$d_4 = Z_{41} + \overline{Z_{41}}$$
$$d_{44} = Z_{41}\overline{Z_{41}} \qquad (27)$$
$$d_{11} = \sqrt[4]{Z_{41}\overline{Z_{41}}}$$
$$d_1^{\ 4} - 4\sqrt[4]{Z_{41}\overline{Z_{41}}}d_1^{\ 2} + 2\sqrt[4]{Z_{41}\overline{Z_{41}}} - (Z_{41} + \overline{Z_{41}}) = 0 \qquad (28)$$

Найденные формулы определяют четыре значения для первого момента уравнения оригинала (25)

$$d_{1.1,2,3,4} = \pm\sqrt{2\sqrt[4]{Z_{41}\overline{\overline{Z_{41}}}} \pm 2\sqrt{Z_{41}\overline{\overline{Z_{41}}}} + (Z_{41} + \overline{Z_{41}})} \qquad (29)$$

Т.е. мы получаем четыре уравнения оригинала

$$Z_2 - (\pm\sqrt{2\sqrt[4]{Z_{41}\overline{\overline{Z_{41}}}} \pm 2\sqrt{Z_{41}\overline{\overline{Z_{41}}}} + Z_{41} + \overline{Z_{41}}})Z + \sqrt[4]{Z_{41}\overline{\overline{Z_{41}}}} = 0 \qquad (30)$$

каждое из которых определяет свою пару корней четвертой степени из заданного и ему сопряженного комплексных чисел.

Пример.

Пусть требуется извлечь корень четвертой степени из числа

$$Z_4 = -7 \pm 24\ i \qquad (31)$$

Подставляем заданное число в формулы (28, 29) определяющие моменты уравнения оригинала

$$d_{11} = \sqrt[4]{(-7+24i)(-7-24)i} = 5$$
$$d_{1.1,2,3,4} = \pm\sqrt{2\times 5 \pm \sqrt{2\times 25 + (-7-7)}} = \pm 4;\pm 2 \qquad (32)$$

Выписываем соответствующие найденным моментам четыре уравнения оригинала

$$Z^2 - (\pm 4)\ Z + 5 = 0$$
$$Z^2 - (\pm 2)\ Z + 5 = 0 \qquad (33)$$

Корни полученных уравнений (33) и являются корнями четвертой степени из заданного числа (31)

$$Z_{1,2} = \pm 2 \pm i$$
$$Z_{3,4} = \pm 1 \pm 2\,i \qquad (34)$$

4. Корень пятой степени.

Комплексное число, из которого требуется извлечь корень пятой степени и ему сопряженное число обозначаем буквами Z_{51} и Z_{51} и считаем их корнями уравнения образа на плоскости пятого порядка измеряемых величин

$$Z_5^{2} - d_5 Z_5 + d_{55} = 0 \qquad (35)$$

полученным стандартным отображением функцией

$$Z_5 = Z^5 \qquad (36)$$

уравнения оригинала

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \qquad (37)$$

Моменты уравнений образа и оригинала связаны между собой соотношениями

$$d_{55} = d_{11}^{5}$$
$$d_5 = d_1^{5} - 5\,d_1^{3}\,d_{11} + 5\,d_1\,d_{11}^{2} \qquad (38)$$

С другой стороны, моменты уравнения (35) образа могут быть выражены через заданные числа

$$d_5 = Z_{51} + \overline{Z}_{51}$$
$$d_{55} = Z_{51}\,\overline{Z}_{51} \qquad (39)$$

Подстановка выражений кратных моментов в систему уравнений (38) связи позволяет построить определяющие соотношения для моментов уравнения оригинала

$$d_{11} = \sqrt[5]{Z_{51}\overline{Z_{51}}}$$
$$d_1^{\,5} - 5\sqrt[5]{Z_{51}\overline{Z_{51}}}\,d_1^{\,3} + 5\sqrt[5]{\left(Z_{51}\overline{Z_{51}}\right)^2}\,d_1 - (Z_{51} + \overline{Z_{51}}) = 0 \qquad (40)$$

Как и в предыдущих случаях полученные соотношения (40) определяют число значений первого момента и соответственно количество уравнений оригинала равное степени извлекаемого из заданного числа корня.

Пример.

Извлечем корни пятой степени из комплексно сопряженных чисел

$$Z_{51,2} = -38 \pm 41i \tag{41}$$

Для чего, прежде всего, вычисляем моменты уравнения оригинала (40)

$$d_{11} = \sqrt[5]{(-38+41i)(-38-41i)} = 5$$

$$d_1^5 - 25d_1^3 + 125d_1 + 76 = 0 \tag{42}$$

Здесь, для вычисления корней уравнения (42) относительно значений первого момента строим таблицу коэффициентов уравнений образов и оригинала

ν	1	2	3	4
p_ν	0	50	0	750
$p_{\nu\nu}$	- 25	375	6250	171875
$p_{\nu\nu\nu}$	0	6250	- 114000	27701025
$p_{\nu\nu\nu\nu}$	125	15625	1519925	171940625
$p_{\nu\nu\nu\nu\nu}$	-76	5776	-438976	33362176

(43)

и находим приближения корней уравнения оригинала в линейной аппроксимации уравнения образа

ν	1	2	3	4
$d_{11}(\nu)$	-	± 7,07	-	± 3,758
$d_{12}(\nu)$	-	± 2,74	-	± 3,89
$d_{13}(\nu)$	-	4,083	2,64	3,563
$d_{14}(\nu)$	-	- 1,581	- 2 371	- 1,578
$d_{15}(\nu)$	- 0,608	- 0,608	- 0,661	- 0,665

(44)

В силу перевозбужденности матрицы моментов (43) уравнений относительно большим количеством нулевых моментов и повышенной кучностью корней, предельной последовательности для приближений корней d_{11} и d_{12} в таблице (44) результатов не усматривается. Для корней d_{13} и d_{14} можно усмотреть точки встречно сближающихся последовательностей приближений и принять в качестве предельных значений средние арифметические от двух последних результатов

$$d_{13}\,(3;\,4) = 0{,}5\,(2{,}64 + 3{,}503) = 3{,}10$$

$$d_{14}\,(3;\,4) = -0{,}5\,(2{,}371 + 1{,}578) = -\,1{,}975 \qquad (45)$$

Наконец, для корня d_{15} предельное значение может быть принято равным

$$d_{15} = -0{,}666 \qquad (46)$$

После подстановки принятых предельных значений и дополнительных вычислений принимаем корни равными

$$d_3 = 3{,}138;\;\; d_4 = -2{,}0596;\;\; d_5 = -0{,}66603 \qquad (47)$$

Исключаем из уравнения (42) для первого момента найденные корни $d_{3,4,5}$.

Из оставшегося уравнения второй степени

$$d_1^2 + 1{,}274\, d_1 - 13{,}844 = 0 \qquad (48)$$

находим первые два значения первого момента уравнения оригинала

$$d_{11} = -4{,}412$$

$$d_{12} = 4{,}0 \qquad (49)$$

Подставив в уравнение оригинала (37) главное значение первого (49) и второго (42) моментов, вычисляем главные значения корней пятой степени из заданных (41) чисел

$$Z_{1,2} = 2 \pm i \qquad (50)$$

Остальные четыре пары корней равномерно распределены по окружности на плоскости уравнения оригинала.

5. Некоторые выводы.

Как видно, основной трудностью при вычислении корней из комплексных чисел является определение значений первого момента уравнения оригинала. Первый момент определяется как корень уравнения, степень которого равна степени извлекаемого из заданного числа корня. Определяющее уравнение обязательно четно- или нечетносимметрично, а корни его только действительны и различны по модулю, что существенно упрощает его анализ и решение.

При необходимости многократных вычислений корней из комплексных чисел, уравнения, определяющие первые моменты оригиналов, целесообразно табулировать.
Например, уравнение пятой степени (40), в относительной форме может быть приведено к виду

$$\delta^5 - 5\delta^3 + 5\delta - \overline{\alpha_5} = 0 \qquad (51)$$

где переменное равно

$$\delta^5 = d_1 \, (Z_{51} \, Z_{51})^{-1/10} \qquad (52)$$

а свободный коэффициент

$$\alpha_5 = (Z_{51}Z_{51})(Z_{51}Z_{51})^{-1/2} = e^{i\gamma} + e^{-i\gamma} = 2\cos\gamma \qquad (53)$$

находится в весьма ограниченном интервале [-2, +2].

Литература.

1.”Симметричные алгебраические моменты” - 2003

2.”Отображение алгебраических функций”   - 2003

3.”Анализ и синтез математических моделей физических процессов”   - 2004

Все работы размещены в Интернете на сайте Компании Безопасность по адресу

http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html

E-mail: office@bezopasnost.ru

Корчагин Игорь Федорович

115191, г. Москва , ул. 3-ая Рощинская д.6

тел. 134-3311,232-0040,737-9268