И.Ф. КОРЧАГИН

ТЕОРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Москва
ФИЗМАТКНИГА
2006

УДК В511
К66

Корчагин И. Ф. Теория отображения алгебраических функций. — М.: Физматкнига, 2006. — 96 с. ISBN 5-89155-145-4.

В работе представлен систематизированный (т. е. единый и обобщенный) метод преобразования любой алгебраической функции-оригинала, посредством любой алгебраической функции отображения в любую алгебраическую функцию-образ.

Назначение отображения следует усматривать в возможности направленного преобразования функций, используемого, например, для решения алгебраических уравнений, синтеза (функций) математических моделей, исследования (функций) неизвестных естественных явлений и т. д.

Книга рассчитана на студентов, аспирантов, инженеров и научных работников физико-технических и математических специальностей.

ISBN 5-89155-145-4
9 785891 551459

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Построение отображений..4

1.1. Основные определения.. 4

1.1.1. Функция-оригинал 5
1.1.2. Функция отображения..6
1.1.3. Функция-образ...7

1.2. Вычисление коэффициентов функции-образа 8
1.3. Вычисление параметров отображения преобразующей функции………………………………………………………… 14

2. Симметричные моменты 19

2.1. Основные определения...19
2.2. Свойства моментов 25
2.3. Вычисление моментов 37

2.3.1. Моменты двух точек плоскости……………………… 38
2.3.2. Моменты трёх точек плоскости………………………… 40
2.3.3. Моменты четырёх точек плоскости…………………… .43
2.3.4. Моменты пяти точек плоскости………………………… 48
2.3.5. Кратные моменты…………………………………………54

3. Отображения 58

3.1. Отображение линейными функциями....................................62
3.2. Отображение функциями второго порядка 69
3.3. Отображение дробно-рациональными функциями 75
3.4. Отображение стандартными функциями...............................79
3.5. Отображения многомерными функциями..............................85

1. Построение отображений

1.1. Основные определения

Отображение – это преобразование некоторой заданной функции (функции-оригинал)

$$\underline{P_\upsilon(Z)=Z^\upsilon - p_1 Z^{\upsilon-1} + p_{11} Z^{\upsilon-2} - p_{111} Z^{\upsilon-3} + \ldots + (-1)^\upsilon p_{111\ldots}} \qquad \underline{(1)}$$

обусловленное заменой независимого переменного.

Замена переменного осуществляется в общем случае также некоторой функцией. Функцией преобразования или отображения

$$Z_\mu(Z)=Z^\mu + q_1 Z^{\mu-1} + q_2 Z^{\mu-2} + \ldots + q_\mu \qquad (2)$$

Результатом преобразования является некоторая новая функция (функция-образ)

$$P_{\mu\upsilon}\left(Z_{\mu}\right)=Z_{\mu}^{\upsilon}-p_{\mu_1}Z_{\mu}^{\upsilon-1}+p_{\mu\mu}Z_{\mu}^{\upsilon-2}-\ldots+\left(-1\right)^{\upsilon}p_{\mu\mu\mu\ldots}\cdot Z_{\mu}^{\upsilon-\upsilon} \quad (3)$$

1.1.1. Функция-оригинал

Под функцией-оригиналом в дальнейшем понимается действительная алгебраическая функция комплексного переменного [7].

Основным свойством алгебраических функций, используемым для реализации отображений, является то, что эти функции единственным образом определяются количеством точек на своем «теле», равным порядку величины преобразуемых функций. В качестве этих определяющих точек могут быть приняты любые точки «тела» функций, в частности, это могут быть корни функций (точки $Z_1, Z_2, Z_3 \ldots Z_{\upsilon}$ плоскости аргумента, в которых функции принимают нулевые значения) [7].

Известно, что коэффициенты алгебраических функций однозначно определяются формулами Виета

$$\begin{aligned}
&p_1=Z_1+Z_2+Z_3\\
&p_{11}=Z_1Z_2+Z_1Z_3+\ldots\\
&p_{111}=Z_1Z_2Z_3+Z_1Z_2Z_4+\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&p_{111}\ldots=Z_1Z_2\ldots Z_{\upsilon}
\end{aligned} \quad (4)$$

и, соответственно, однозначно определяют функцию (1). Действительно, равенство двух функций с одинаковыми коэффициентами, даже тождественно, выполняется при любом значении переменной.

Коэффициенты (4) заданного полинома (1) будем считать всегда известными как количественно (численно), так и в функции физических параметров описываемого полиномом устройства или процесса.

Форма записи (1) функции-оригинала может быть определена как каноническая, знакопеременная, с коэффициентами в форме симметричных моментов [7]. Эта форма записи наиболее удобна для проведения операций отображения.

Всякая алгебраическая функция в полиномиальной форме (1) может рассматриваться как образующая (уравнения) функция [6, 5].

Алгебраическое уравнение является функцией приравненной нулю (или какой-либо константе).В связи с чем, отображение функции одновременно представляет собой и отображение образуемого ею уравнения.

Однако, говоря об отображении функции, мы будем иметь в виду преобразование и перемещение ее линейчатой пространственной фигуры [5]. Говоря же об отображении уравнения, мы будем иметь в виду преобразование и перемещение его плоского графического многоугольника корней [7].

Функцию-оригинал всегда будем считать заданной над плоскостью величин первого порядка измерения. Порядок величин коэффициентов и функций, как оригинала, так и образа определяется как соответствующая степень аргумента этих форм.

1.1.2. Функция отображения

Функция отображения (2) - это новое переменное, над плоскостью задания которого строится функция-образ.

Функция расположена в своем пространстве, но над той же плоскостью аргумента, что и функция-оригинал. В качестве функций отображения рассматриваются только алгебраические функции, так как их применение позволяет выразить моменты (коэффициенты) функций-образов через моменты (коэффициенты) функции-оригинала и тем самым совершить (завершить) построение функции-образа и осуществить само отображение.

Функция отображения (2) – это функция зависимости новой переменной от старой.

Подстановка ее (2) в функцию-образ (3) представляет собой разложение функции-оригинала по функциям отображения над плоскостью аргумента функции-оригиала. Эту подстановку, в общем случае, мы называем симметрированным по μ-той степени оригиналом [7]. Здесь μ – порядок величины функции отображения.

Функция отображения устанавливает однозначное соответствие между точками плоскостей аргумента функции-оригинала и функции-образа. Функцию отображения с целью удобства построения коэффициентов функции-образа, будем записывать в знакопостоянной, канонической форме.

Коэффициенты функции отображения произвольны. Значения коэффициентов выбираются в зависимости от требований налагаемых на свойства функции-образа. В связи с чем,

коэффициенты функции отображения называются ещё и параметрами отображения.

Порядок (μ) величины функции отображения определяется требованиями к функции- образу и, поэтому, тоже является параметром отображения.

1.1.3. Функция-образ

Функция-образ представляет собой алгебраически преобразованную *алгебраическую функцию-оригинал, в связи с чем она тоже является алгебраической функцией*.

Следовательно, как и функция-оригинал, функция-образ определяется единственным образом своими корнями и будет рассматриваться как действительная функция от комплексного аргумента [7]. Действительность функции-образа является следствием действительности её коэффициентов определяемых алгебраическими функциями через действительные коэффициенты функции-оригинала (4).

Функция-оригинал, как алгебраическая функция, графически, представляет собой υ-линейчатую пространственную фигуру [7]. В общем, такую же (по величине порядка), но искаженную и по-новому, в своей системе координат, расположенную фигуру представляет собой и функция-образа.

В зависимости от постановки задачи и с целью лучшего ее понимания и представления, отображение может трактоваться или как перенос в другое пространство и искажение фигуры-оригинала в фигуру-образ, или как перемещение внутри одного пространства, искажение и переориентация одной и той же фигуры [7].

Функцию-образ, как и функцию-оригинал, с целью более технологичного вычисления коэффициентов, будем записывать в знакопеременной канонической форме [6], в моментах.

1.2. Вычисление коэффициентов функции-образа

Каждой точке (Z) плоскости аргумента функции-оригинала отображающая функция (2) ставит в однозначное соответствие свою точку (Z_υ) плоскости аргумента функции-образа. Наряду с прочими точками функция отображения «переносит» и точки корней $(Z_1, Z_2, Z_3 ... Z_\upsilon)$ функции-оригинала, как будем полагать,

$$
\begin{aligned}
&Z_{\mu 1}(Z_1) = Z_1^{\mu} + q_1 Z_1^{\mu-1} + q_2 Z_1^{\mu-2} + ... + q_\mu \\
&Z_{\mu 2}(Z_2) = Z_2^{\mu} + q_1 Z_2^{\mu-1} + q_2 Z_2^{\mu-2} + ... + q_\mu \\
&............ \\
&Z_{\mu\upsilon}(Z_\upsilon) = Z_\upsilon^{\mu} + q_1 Z_\upsilon^{\mu-1} + q_2 Z_\upsilon^{\mu-2} + ... + q_\mu
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

в точки корней функции-образа. Почему «будем полагать»? Потому, что можем, и будем полагать и по-другому. Например, при построении резольвент уравнений. Т.е., в случае, когда порядки величин функций оригинала и образа не совпадают.

Подставив поочередно корни (5) в функцию-образ (3), получим систему линейных уравнений

$$
\begin{aligned}
&Z_{\mu 1}^{\upsilon} - p_{\mu} Z_{\mu 1}^{\upsilon-1} + p_{\mu\mu} Z_{\mu 1}^{\upsilon-2} - p_{\mu\mu\mu} Z_{\mu 1}^{\upsilon-3} + \ldots + (-1)^{\upsilon} p_{\mu\mu\ldots} = 0 \\
&Z_{\mu 2}^{\upsilon} - p_{\mu} Z_{\mu 2}^{\upsilon-2} + p_{\mu\mu} Z_{\mu 2}^{\upsilon-2} - p_{\mu\mu\mu} Z_{\mu 2}^{\upsilon-3} + \ldots + (-1)^{\upsilon} p_{\mu\mu\ldots} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&Z_{\mu\upsilon}^{\upsilon} - p_{\mu} Z_{\mu\upsilon}^{\upsilon-1} + p_{\mu\mu} Z_{\mu\upsilon}^{\upsilon-2} - p_{\mu\mu\mu} Z_{\mu\upsilon}^{\upsilon-3} + \ldots + (-1)^{\upsilon} p_{\mu\mu\ldots} = 0
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

единственным образом определяющую коэффициенты $(p_{\mu}, p_{\mu\mu} \ldots)$ и соответственно саму функцию-образ (3) [7]. Построенная система уравнений (6) является теперь уже не словесным, а аналитически записанным требованием отображения корней функции-оригинала в корни функции-образа.

Решение системы (6) безусловно, должно совпадать с формулами Виета для коэффициентов функции-образа

$$
\begin{aligned}
&p_{\mu} = Z_{\mu 1} + Z_{\mu 2} + Z_{\mu 3} \\
&p_{\mu\mu} = Z_{\mu 1} Z_{\mu 2} + Z_{\mu 1} Z_{\mu 3} + \ldots \\
&p_{\mu\mu\mu} = Z_{\mu 1} Z_{\mu 2} Z_{\mu 3} + Z_{\mu 1} Z_{\mu 2} Z_{\mu 4} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&p_{\mu\mu\mu\ldots\ldots} = Z_{\mu 1} Z_{\mu 2} \ldots . Z_{\mu\nu}
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

так как в противном случае между произвольными коэффициентами $(p_{\mu}, p_{\mu\mu}, \ldots)$ алгебраической функции (3) должна существовать связь, что невозможно.

Выразим коэффициенты (7) функции-образа через корни функции-оригинала, используя формулы взаимозависимости (5) заданные функцией отображения (2). Т.е., произведём подстановку корней (5) функции-образа в выражения моментов (7) функции-образа.

Так для коэффициента первого порядка функции-образа имеем

$$
\begin{aligned}
p_{\mu} &= \left(q_0 Z_1^{\mu} + q_1 Z_1^{\mu-1} + q_2 Z_1^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu} Z_1^{\mu-\mu}\right) + \\
&+ \left(q_0 Z_2^{\mu} + q_1 Z_2^{\mu-1} + q_2 Z_2^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu} Z_2^{0}\right) + \\
&+ \left(q_0 Z_3^{\mu} + q_1 Z_3^{\mu-1} + q_2 Z_3^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu} Z_3^{0}\right) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left(q_0 Z_1^{\mu} + q_1 Z_1^{\mu-1} + q_2 Z_1^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu} Z_{\upsilon}^{0}\right) = \\
&= q_0\left(Z_1^{\mu} + Z_2^{\mu} + \ldots + Z_{\upsilon}^{\mu}\right) + \ldots = q_0 r_{\mu} + q_1 r_{\mu-1} \ldots q_{\mu} r_0
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Здесь формулы корней дополнены симметрирующими сомножителями q_0 и Z_{ν}^{0}, а в последнем равенстве введено новое обозначение для сумм степеней корней (симметричные моменты, о которых речь пойдет ниже).

Для коэффициента второго порядка картина более сложна

$$
\begin{aligned}
p_{\mu\mu} &= \left(q_0 Z_1^{\mu} + q_1 Z_1^{\mu-1} + q_2 Z_1^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu} Z_1^{\mu-\mu}\right) \times \\
&\times \left(q_0 Z_2^{\mu} + q_1 Z_2^{\mu-1} + q_2 Z_2^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu} Z_2^{0}\right) + \\
&+ \left(q_0 Z_1^{\mu} + q_1 Z_1^{\mu-1} + q_2 Z_1^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu} Z_1^{0}\right) \times \\
&\times \left(q_0 Z_3^{\mu} + q_1 Z_3^{\mu-1} + q_2 Z_3^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu} Z_3^{0}\right) + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left(q_0 Z_{\upsilon-1}^{\mu} + q_1 Z_{\upsilon-1}^{\mu-1} + q_2 Z_{\upsilon-1}^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu} Z_{\upsilon-1}^{0}\right) \times \\
&\times \left(q_0 Z_{\upsilon}^{\mu} + q_1 Z_{\upsilon}^{\mu-1} + q_2 Z_{\upsilon}^{\mu-2} + \ldots + q_{\mu} Z_{\upsilon}^{0}\right) + \ldots = \\
&= q_0 q_0 r_{\mu\mu} + q_0 q_1 r_{\mu\mu-1} + q_0 q_2 r_{\mu\mu-2} + \ldots
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Еще более сложна для осознания и словесного описания формула коэффициента третьего порядка. Что же касается коэффициентов старших порядков, то выведение их формул зависимости от корней оригинала практически невозможно. Оказалось, однако, что искомые формулы зависимости (4, 8, 9) обладают уникальным свойством симметрии относительно своих переменных (корней), свойством, которое позволило развить алгебру коэффициентов, как функций-оригиналов, так и функций-образов. «Алгебру симметричных моментов», позволяющую относительно просто производить вычисление коэффициентов образов в функции известных единичных моментов (4) оригиналов и осуществить тем самым отображение функций. Неизвестными, пока, в формулах (7,8,9) определяющих моменты функции-образа остаются параметры (q) отображения.

Пример 1.

Рассмотрим пример формирования коэффициентов функции-образа третьего порядка в пространстве над плоскостью третьего порядка.

Итак, считаем заданной функцию третьего порядка

$$M_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111} \tag{10}$$

Отображение производим тоже функцией третьего порядка

$$Z_3 = q_0 Z^3 + q_1 Z^2 + q_2 Z^1 + q_3 Z^0 \tag{11}$$

где, в частности, корни (Z_1, Z_2, Z_3) заданной (10) функции-оригинала, полагаем, отображаются в корни (Z_{31}, Z_{32}, Z_{33}) функции-образа

$$\begin{aligned} Z_{31} &= q_0 Z_1^3 + q_1 Z_1^2 + q_2 Z_1^1 + q_3 Z_1^0 \\ Z_{32} &= q_0 Z_2^3 + q_1 Z_2^2 + q_2 Z_2^1 + q_3 Z_2^0 \\ Z_{33} &= q_0 Z_3^3 + q_1 Z_3^2 + q_2 Z_3^1 + q_3 Z_3^0 \end{aligned} \tag{12}$$

Для функции-образа, на плоскости её аргумента, сформировано три корня (12), следовательно, она должна быть функцией третьего порядка

$$M_3(Z_3) = Z_3^3 - 3a_{31} Z_3^2 + 3a_{32} Z_3^1 - a_{33} \tag{13}$$

однако возможно отображение и в функцию другого порядка. Здесь потребуется, всего лишь, в определенном смысле, симметричная связь трех корней заданной функции с корнями функции-образа. Ниже пример такого отображения будет рассмотрен.

Вычисляем коэффициент первого порядка функции-образа (13) рассматриваемого примера. В соответствии с формулами Виета

$$3a_{31} = Z_{31} + Z_{32} + Z_{33} = \tag{14}$$

и подставив выражения (12) корней образа через корни оригинала, получаем

$$\begin{aligned} &= q_0\left(Z_1^3 + Z_2^3 + Z_3^3\right) + q_1\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right) + \\ &+ q_2\left(Z_1 + Z_2 + Z_3\right) + q_3\left(Z_1^0 + Z_2^0 + Z_3^0\right) = \\ &= q_0 m_3 + q_1 m_2 + q_2 m_1 + 3q_3 = \left(q_0 m_3 + \ldots\right)_4 \end{aligned} \tag{15}$$

где в последнем равенстве, для сумм степеней корней введены специальные обозначения (симметричные моменты), которые ниже будут раскрыты через моменты функции-оригинала.

Для второго коэффициента функции-образа

$$3a_{32} = Z_{31}Z_{32} + Z_{31}Z_{33} + Z_{32}Z_{33} = \tag{16}$$

после замены корней образа выражениями (12) через корни функции-оригинала получаем

$$\begin{aligned} &= \left(q_0 Z_1^3 + q_1 Z_1^2 + q_3 Z_1^0\right)\left(q_0 Z_2^3 + q_1 Z_2^2 + q_3 Z_2^0\right) + \ldots \\ &\ldots = q_0 q_0\left(Z_1^3 Z_2^3 + Z_1^3 Z_3^3 + Z_2^3 Z_3^3\right) + \\ &+ q_0 q_1\left(Z_1^3 Z_2^2 + Z_1^3 Z_3^2 + Z_2^3 Z_3^2 + Z_1^2 Z_2^3 + Z_1^2 Z_3^3 + Z_2^2 Z_3^3\right) + \ldots \end{aligned} \tag{17}$$

формулу, содержащую сорок восемь слагаемых, выписывать, обрабатывать и группировать которые весьма затруднительно и нецелесообразно без специального аппарата. С использованием же аппарата симметричных моментов второй коэффициент (17) функции-образа может быть сразу записан лаконичной формулой

$$=\left(q_{00}m_{33}+\ldots\right)_{10} \tag{18}$$

содержание, которой будет раскрыто во втором разделе работы.

Третий коэффициент – момент функции-образа (13) также раскрывается через формулу Виета

$$\begin{aligned} a_{33} &= \left(q_0 Z_1^3 + q_1 Z_1^2 + q_2 Z_1^1 + q_3 Z_1^0\right)\times \\ &\times\left(q_0 Z_2^3 + q_1 Z_2^2 + q_2 Z_2^1 + q_3 Z_2^0\right)\left(q_0 Z_3^3 + q_1 Z_3^2 + q_2 Z_3^1 + q_3 Z_3^0\right)= \\ &= q_0 q_0 q_0 Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \ldots = \left(q_{000}m_{333}+\ldots\right)_{20} \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь потребуется упорядочить шестьдесят четыре начальных слагаемых в двадцать окончательных. Последние можно сосчитать как сочетания с повторениями из четырех (0, 1, 2, 3) возможных значений индекса при параметре (q) отображения по числу мест для его подстрочных индексов (три).

Сложные моменты корней функции-оригинала входящие в формулы (15, 18, 19) коэффициентов функции-образа, как уже упоминалось, достаточно просто могут быть выражены через известные, единичные моменты оригинала. Неизвестными остаются параметры отображения (q). Каждый из которых определяется своим условием, накладываемым на функцию-образ. Количество условий (требований) накладываемых на функцию-образ определяет, таким образом, количество параметров отображения и соответственно порядок величины функции отображения.

Однако для выбранной функции отображения, безусловно, не все ее параметры могут быть востребованы для конкретного преобразования. Количество параметров и сложность функции накладывают определённую специфику на отображение.

Отображение называется линейным, когда преобразование переменной оригинала в переменную образа осуществляется линейной функцией.

Требования к соотношению корней или коэффициентов образа, при линейном отображении, тоже не могут быть более сложными, чем линейные.

Отображение нелинейно, когда преобразование переменного функции-оригинала в переменное функции-образа осуществляется нелинейной функцией.

Требования к соотношению корней или коэффициентов функции-образа при нелинейном отображении могут быть нелинейными.

1.3 Вычисление параметров отображения преобразующей функции

Основное назначение отображения заключается в обеспечении возможности построения новых, теоретически обоснованных алгоритмов вычислительной математики; в обеспечении возможности построения общих решений функций (уравнений); в обеспечении возможности построения функций с наперед заданными свойствами, в том числе, в возможности синтезирования функций математических моделей, и т. д.

Требования к синтезируемой функции-образу (3), всегда и в основном, могут быть сформулированы на двух уровнях. На уровне значений или соотношений υ ее корней. Или, на уровне значений и соотношений υ ее коэффициентов (моментов). Других составляющих у функций просто нет. Однако реализовать требования к функции-образа возможно только на уровне соотношений между её коэффициентами, так как, в конечном счёте, функция выражается только через коэффициенты. К тому же, применяемый в процессе отображения аппарат симметричных моментов позволяет раскрывать моменты функции-образа в функции моментов оригинала, но не позволяет выражать корни функции-образа через моменты оригинала. Таким образом, если требования к функции-образа сформулированы на уровне корней, то они предварительно должны быть переведены на уровень соотношений между коэффициентами. Покажем, что такой переход, в общем случае, возможен.

Итак, пусть требования к функции-образа сформулированы на уровне её корней. Т.е. задано некоторое количество (μ) соотношений между ν корнями функции-образа

$$
\begin{aligned}
&f_1 = f_1(Z_1, Z_2, \ldots Z_\upsilon\ ) \\
&f_2 = f_2(Z_1, Z_2, \ldots Z_\upsilon\ ) \\
&\ldots\ldots. \\
&f_\mu = f_\mu(Z_1, Z_2, \ldots Z_\upsilon\ )
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Будем исходить из предположения, что количество связей (μ) накладываемых на корни функции-образа совпадает с порядком функции отображения и соответственно с количеством параметров функции (2) отображения. По крайней мере, функцию отображения мы всегда можем выбрать таковой. Более того, реализация каждого из требований (связи) осуществляется выбором требуемого значения соотетствующего параметра, т.е. количество связей должно быть равно количеству параметров отображения и соответственно порядку величины функции отображения.

Дополним построенные μ соотношений (20) связи корней функции- образа её ν коэффициентами по Виета

$$
\begin{aligned}
&p_\mu = p_\mu(Z_1, Z_2, \ldots Z_\upsilon\ ) \\
&p_{\mu\mu} = p_{\mu\mu}(Z_1, Z_2, \ldots Z_\upsilon\ ) \\
&\ldots\ldots. \\
&p_{\mu\mu\ldots} = p_{\mu\mu\ldots}(Z_1, Z_2, \ldots Z_\upsilon\ )
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Разрешая первый коэффициент (p_μ) выписанной системы (21) относительно первого корня (Z_1) функции-образа и подставляя его в выражения остальных коэффициентов (21) и их связей (20), исключаем первый корень.

Разрешая второй коэффициент $(p_{\mu\mu})$ (21) относительно второго корня (Z_2) функции-образа и подставляя его в выражения остальных коэффициентов (21) и их связей (20), исключаем из системы (20, 21) второй корень.

Продолжая начатый процесс исключения и разрешая на ν-том этапе ν-тый коэффициент $\left(p_{\mu\mu\ldots}\right)$ (21) относительного ν-того корня $\left(Z_{\upsilon}\right)$ функции-образа, исключаем последний корень из функций требуемых связей (20). Функции требуемых связей (20) корней переходят тем самым на новый уровень. Уровень связи коэффициентов функции-образа

$$
\begin{aligned}
&g_1 = g_1\left(p_{\mu}, p_{\mu\mu}, \ldots p_{\mu\mu\ldots}\right)\\
&g_2 = g_2\left(p_{\mu}, p_{\mu\mu}, \ldots p_{\mu\mu\ldots}\right)\\
&\ldots\ldots.\\
&g_{\mu} = g_{\mu}\left(p_{\mu}, p_{\mu\mu}, \ldots p_{\mu\mu\ldots}\right)
\end{aligned}
\qquad (22)
$$

Количество этих связей остается прежним, т.е. равным μ. Поэтому, заменяя в полученных (22) функциях связи коэффициенты $\left(p_{\mu}\right)$ их выражениями (8, 9...) через известные моменты функции-оригинала и параметры отображения, мы получим систему μ уравнений относительно μ параметров функции отображения (2)

$$
\begin{aligned}
&h_1 = h_1\left(q_1, q_2, \ldots, q_{\mu}\right)\\
&h_2 = h_2\left(q_1, q_2, \ldots, q_{\mu}\right)\\
&\ldots\ldots\ldots.\\
&h_{\mu} = h_{\mu}\left(q_1, q_2, \ldots, q_{\mu}\right)
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

Решение построенной системы, возможно неоднозначно, определяет параметры отображения функции-оригинала в функцию-образ. И позволяет, таким образом, несколькими способами реализовывать требования к синтезируемой функции.

В случае, когда требования к функции-образу заданы значениями или соотношениями (22) между ее коэффициентами, переход к системе уравнений (23) относительно параметров отображения соответственно упрощается.

. *Пример 2*

Рассмотрим вычисление параметров отображения на примере функции третьего порядка

$$M_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111}$$

В общем случае образ функции над плоскостью μ-того порядка будет иметь вид

$$M_3(Z_3) = Z_3^3 - 3a_{\mu 1} Z_\mu^2 + 3a_{\mu 2} Z_\mu^1 - a_{\mu 3} \tag{24}$$

Мы желаем (требуем), чтобы функция-образ имела вид

$$\begin{gathered} Z_\mu^3 - 3b_{\mu 1} Z_\mu^2 + 3b_{\mu_1}^2 Z_\mu^1 - b_{\mu 1}^3 + b_{\mu 3} = \\ = (Z_\mu - b_{\mu 1})^3 + b_{\mu 3} \end{gathered} \tag{25}$$

накладывая тем самым условия на коэффициенты функции-образа,

$$\begin{aligned} 3a_{\mu 1} &= 3b_{\mu 1} \\ 3a_{\mu 2} &= 3b_{\mu 1}^2 \\ a_{\mu 3} &= -b_{\mu 1}^3 + b_{\mu 3} \end{aligned} \tag{26}$$

или в коэффициентах общего вида функции-образа (24)

$$\begin{aligned} a_{\mu 2} &= a_{\mu 1}^2 \\ a_{\mu 3} &= -b_{\mu 1}^3 + b_{\mu 3} \end{aligned} \tag{27}$$

Получено, таким образом, одно (27) условие, но нелинейное, второго порядка. Откуда следует, что функция отображения (2) должна быть функцией второго порядка $(\mu = 2)$, а параметр отображения должен быть только один (например q_1), второй же из двух возможных, не нужен. Полагаем $q_2 = 0$.

Итак, для рассматриваемого примера (24) и требования (27.1) к функции образа, отображающая функция должна иметь вид

$$Z_2 = Z^2 + q_1 Z \tag{28}$$

Выражая требуемую связь коэффициентов (27.1) функции образа через корни образа

$$\begin{aligned} &-a_{\mu 1}^2 + a_{\mu 2} = \\ &= -\frac{1}{9}(Z_{21} + Z_{22} + Z_{23})^2 + \frac{1}{3}(Z_{21}Z_{22} + Z_{21}Z_{23} + Z_{22}Z_{23}) = \end{aligned} \tag{29}$$

и подставляя последние выраженными через корни оригинала (28)

$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{9}\left[\left(Z_1^2 + q_1 Z_1\right) + \left(Z_2^2 + q_1 Z_2\right) + \left(Z_3^2 + q_1 Z_3\right)\right]^2 + \\ &+ \frac{1}{3}\left[\left(Z_1^2 + q_1 Z_1\right)\left(Z_2^2 + q_1 Z_2\right) + \left(Z_1^2 + q_1 Z_3\right)\left(Z_3^2 + q_q Z_3\right) + \right. \\ &\left. + \left(Z_2^2 + q_1 Z_2\right)\left(Z_3^2 + q_1 Z_3\right)\right] = q_1^2\left(-m_1^2 - 3m_{11}\right) + \\ &+ q_1\left(3m_{21} - 2m_1 m_2\right) + \left(3m_{22} - m_2^2\right) = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

находим уравнение, которому должен удовлетворять параметр отображения (q_1). В полученной формуле, как и ранее, коэффициенты построенного уравнения сгруппированы в известные симметричные моменты, через которые и выражается параметр отображения.

2. Симметричные моменты

2.1. Основные определения

Симметричный момент – это результат обоснованного правилами комбинаторики раскрытия матриц корней алгебраических уравнений (функций). Одновременно, симметричный момент – это аппарат, позволяющий, удерживая под контролем ситуацию, производить операции с выражениями, содержащими большое количество слагаемых.

Симметричные моменты – это коэффициенты полиномиальных функций, алгебраических уравнений и образов их отображений.

Только аппарат симетричных моментов позволил вычислить, т.е. представить в форме функций коэффициентов оригиналов, коэффициенты образов, и таким образом осуществить отображение.

Симметричные моменты – это матрицы и определители, раскрытые неинверсионно (знакопостоянные суммы). Известные, раскрываемые инверсионно определители и матрицы – это другой класс моментов, называемых несимметричными. Т.е., симметричный момент знакопостоянен, а несимметричный знакопеременен. И вся разница.

Симметричным, момент (коэффициент) назван потому, что представляет собой симметрично зависящую от своих переменных многомерную функцию. Если переменные обозначаются одной буквой и отличаются друг от друга цифровыми индексами, то симметрия функции проявляется в возможности циклической перестановки индексов при неизменности (постоянстве) функции.

Моментом, изучаемая форма названа потому, что определение её совпадает с определением механических моментов точечных масс.

«Природным» феноменом, реализующим понятие симметричный момент, является коэффициент алгебраической функции.

Таким образом, для прикладных наук симметричные моменты – это физические моменты, ожидания, дисперсии и т.д. Для математики симметричные моменты – это действенный аппарат и коэффициенты полиномиальных функций.

Ниже, речь пойдёт об алгебре моментов точек расположенных на плоскости. Алгебра эта возможна только потому, что произвольный набор точек плоскости может быть описан аналитически, алгебраическим уравнением. Т. е., точки плоскости мы будем рассматривать как корни некоторого уравнения. Причём, известными будем считать не корни, а коэффициенты уравнения описывающего эти точки. Моменты точек будем считать определёнными, если они будут выражены через коэффициенты описывающего уравнения.

Итак, пусть нам задано четыре точки Z_1, Z_2, Z_3 и Z_4 на плоскости комплексного переменного. Аналитически, эти точки записываются уравнением четвертой степени

$$Z^4 - n_1 Z^3 + n_{11} Z^2 - n_{111} Z + n_{1111} = 0 \tag{1}$$

где заданные точки теперь являются корнями уравнения (1).

Коэффициенты уравнения (1), в соответствии с формулами Виета, представляют собой функции корней

$$\begin{aligned}
n_1 &= Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 \\
n_{11} &= Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4 \\
n_{111} &= Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4 \\
n_{1111} &= Z_1 Z_2 Z_3 Z_4
\end{aligned} \tag{2}$$

Структурно, приведенные функции (2) будем рассматривать как суммы сочетаний из общего количества корней по числу, соответствующему порядку коэффициента, или как результат раскрытия матриц суммой сочетаний её элементов, без инверсий, из числа столбцов по числу строк

$$n_1 = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4$$

$$n_{11} = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4$$

$$n_{111} = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_4 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4 \qquad (3)$$

$$n_{1111} = \begin{vmatrix} Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \end{vmatrix} = Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$$

Горизонтальная прямоугольная матрица, таким образом, является табличной формой записи симметричного момента или коэффициента алгебраической функции.

Правила раскрытия матриц, т.е. представления их в строчной записи, суммой по сочетаниям иллюстрируются приведённым примером (3). При этом, сомножителями слагаемого могут быть элементы только разных строк и столбцов матрицы, а число сомножителей в каждом слагаемом постоянно и равно числу строк матрицы. *Слагаемые строчной записи матрицы называются частными моментами. Частный момент, индексы сомножителей которого расположены в порядке следования цифр натурального ряда, начиная с единицы, называется головным частным моментом матрицы. Отрезок прямой, на котором расположены элементы головного частного момента, называется главной диагональю матрицы.*

Подряд выписанные индексы головного момента образуют число в υ-ичной системе счисления , где υ-число столбцов матрицы. Число соответствующее каждому последующему частному моменту строчной записи матрицы получается прибавлением единицы к предыдущему. Однако, числа выбираются только такие, в которых цифры разрядов (слева направо, от старшего к младшему) следуют только в возрастающем порядке (другие опускаются).

Требование строгости выполнения правил раскрытия матриц непринципиально и имеет целью достижение единообразия и технологичности последующих операций.

Количество сочетаний из υ элементов по α определяется формулой [1]

$$\frac{\upsilon!}{\alpha!(\upsilon-\alpha)!}$$

Математически, функции коэффициентов (2) представляют собой однородные алгебраические функции многих переменных. Физически, их можно рассматривать как моменты точек корней. Причем моменты, не зависящие от циклической перестановки индексов корней, т.е. симметричные моменты. Симметричные относительно индексов переменных (или самих переменных).

Раскрытая, полная форма записи моментов, представленная формулами (3) Виета, громоздка и непригодна в общем случае для оперирования. Например, для перемножения моментов (3) первого (n_1), второго (n_{11}) и третьего (n_{111}) порядков друг на друга пришлось бы обрабатывать 4*6*4=96 слагаемых. В связи с чем вводится сокращенная, компактная, операционная форма записи через головной частный момент (остальные частные моменты являются «производными» головного)

$$\begin{aligned}
&n_1 = Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 = (Z_1 + \ldots)_4 \\
&n_{11} = Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4 = (Z_1 Z_2 + \ldots)_6 \\
&n_{111} = Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 Z_3 + Z_1 Z_3 Z_4 + Z_2 Z_3 Z_4 = (Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots)_4 \\
&n_{1111} = Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 = (Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + \ldots)_1
\end{aligned} \qquad (4)$$

В приведённых формах, подстрочный заскобочный индекс означает количество слагаемых сочетаний полной записи (2) момента, т. е. соответствующее биномиальное число.

Результатом проведения операций над моментами может оказаться и более сложная форма, обусловленная появлением показателей степеней у корней уравнения. Например, симметричный момент вида

$$\begin{aligned} n_{311} &= Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + Z_1^1 Z_2^3 Z_3^1 + Z_1^1 Z_2^1 Z_3^3 + \\ &+ Z_1^3 Z_2^1 Z_4^1 + Z_1^1 Z_2^3 Z_4^1 + Z_1^1 Z_2^1 Z_4^3 + \ldots \\ &+ Z_2^3 Z_3^1 Z_4^1 + Z_2^1 Z_3^3 Z_4^1 + Z_2^1 Z_3^1 Z_4^3 = \\ &= \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3 \end{aligned} \quad (5)$$

представленный в своем *обозначении, полной записи и сокращенной* записи.

Обозначение симметричного момента – это буква [n] с подстрочными цифровыми индексами (311) Индексы – это степени корней, входящих в первое головное слагаемое полной записи момента. Пишутся индексы в строго убывающем порядке (слева направо), исходя из соображений унификации и технологичности последующих операций. Количество слагаемых симметричного момента зависит от количества корней или степени уравнения. Поэтому каждому уравнению определенной степени соответствует свое множество моментов. Соответственно каждое из этих множеств обозначается своей постоянной буквой. Моменты уравнения второй степени – буквой d, третьей – m, четвертой – n, пятой – p. Далее – произвольной. Это тоже унифицирующая условность.

Количество подстрочных индексов в обозначении симметричного момента указывает на количество корней сомножителей в каждом слагаемом его полной записи.

Сумма подстрочных индексов указывает на порядок величины симметричного момента.

Полная запись симметричного момента представляет собой сумму сочетаний перестановок или перестановок сочетаний. В первом случае складываются суммы строк, а во втором – столбцов полной записи (5). Условно, с целью обеспечения технологичности последующих операций, принимаем перестановки более старшим, ранее выполняемым действием. Т.е. принимаем полную запись (5) как сумму сумм строк или сумму сочетаний перестановок (5).

Сокращенная запись симметричного момента содержит замкнутый в скобки головной частный момент полной записи, за которым стоят знаки продолжения суммирования. При этом, повторяемся, запись подстрочных индексов производится строго в возрастающем порядке, а надстрочных – в убывающем.

Подстрочный заскобочный индекс означает количество суммируемых сочетаний (при фиксированном значении верхних индексов) из полного количества корней по числу корней, входящих в частный момент.

Надстрочный заскобочный индекс означает количество суммируемых перестановок с повторениями верхних индексов корней в частном моменте при фиксированном значении нижних индексов.

В соответствии с приведенными определениями все частные моменты симметричного момента должны иметь один порядок величины, определяемый суммой степеней частного момента. Все частные моменты симметричного момента должны содержать одно и то же количество сомножителей. Общее количество частных моментов в симметричном моменте определяется произведением заскобочных индексов сокращенной записи. Количество частных моментов в симметричном моменте фиксировано.

Симметричный момент (5) можно представить в форме, раскрытой по одному из заскобочных индексов, например, по верхнему

$$n_{311} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3 = \left[\left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + Z_1^1 Z_2^3 Z_3^1 + Z_1^1 Z_2^1 Z_3^3\right) + \ldots\right]_4^1 \qquad (8)$$

Эта форма интересна тем, что содержит общий множитель слагаемых головного момента и позволяет, в конечном счете, произвести представление момента в функции коэффициентов заданного уравнения.

Симметричные моменты, в обозначении которых в качестве индексов фигурируют только единицы, считаются известными, заданными и называются единичными.

Единичные моменты – это коэффициенты заданного алгебраического уравнения или функции и всегда считаются известными величинами.

Симметричные моменты в обозначении которых используется только одна цифра, но не единица, называются кратными или стандартными.

Стандартные моменты являются коэффициентами образов простейших нелинейных отображений.

Симметричные моменты, в обозначении которых употреблены разные цифры, называются смешанными.

Такие моменты являются коэффициентами образов общих нелинейных отображений.

В зависимости от количества разных сомножителей в частном моменте симметричные моменты называются одно-, двух- и т.д. корневыми.

2.2. Свойства моментов

Симметричный момент – это алгебраическая функция многих переменных, функция, в равной степени, симметрично, зависящая от каждого из своих переменных.

Из алгебраичности моментов следует, что как и к любым алгебраическим функциям, к симметричным моментам применимы все алгебраические операции, результатом же воздействия может явиться только алгебраическая функция – симметричный момент.

Таким образом,

симметричные моменты можно складывать и вычитать, при этом и сумма, и разность будут тоже симметричными моментами,

т.е. не зависящими от циклической перестановки индексов формами.

Симметричные моменты можно умножать и делить друг на друга и на число, при этом и произведение, и частное будут тоже симметричными моментами, т.е. не зависящими от циклической перестановки индексов формами.

Действия над моментами обладают свойствами коммутативности, дистрибутивности и ассоциативности.

Особенностью сложения и вычитания является то, что эти операции выполняются для моментов одного и того же порядка величины.

Важным следствием операции сложения является симметричность второго слагаемого, если симметричны сумма и первое слагаемое.

Произведение симметричных моментов симметрично в силу симметричности сомножителей. Так, произведение

$$\begin{aligned} n_1 \cdot n_{11} &= (Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4)\times \\ &\times (Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_4 + Z_2 Z_3 + Z_2 Z_4 + Z_3 Z_4) = \end{aligned} \tag{9}$$

допускает циклическую замену своих индексов сколь угодно раз, так как допускает её каждый из сомножителей (9). Произведение (9) может содержать слагаемые только третьего порядка, реализуемые однокорневыми, двух или трехкорневыми симметричными моментами, т.е. ничего не может быть другого, кроме моментов с весовыми множителями

$$\begin{aligned} &= \alpha_1 n_3 + \alpha_2 n_{21} + \alpha_3 n_{111} = \\ &= \alpha_1 \left(Z_1^3 + \ldots\right)_4^1 + \alpha_2 \left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_6^2 + \alpha_3 \left(Z_1 Z_2 Z_3\right)_4^1 = \end{aligned} \tag{10}$$

Остается только лишь выяснить значение числовых множителей около симметричных моментов произведения (10), что делается по результатам анализа произведения (10) моментов в раскрытой, полной форме их записи. Так, видно, что множитель α_1 около момента n_3 равен нулю, так как головной частный момент его $\left(z_1^3\right)$ произведением (9) не формируется. Множитель α_2 равен единице, так как головной частный момент $\left(z_1^2 z_2\right)$ произведением (9) формируется один раз.

Множитель α_3 равен трем, головное слагаемое $(z_1 z_2 z_3)$ момента n_{111} произведением (9) формируется три раза.

$$=\left(Z_1^2 Z_2^1+\ldots\right)_6^2+3\left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1+\ldots\right)_4^1=n_{21}+3n_{111} \qquad (11)$$

В правильности полученного результата убеждаемся после проверки постоянства количества частных моментов в заданном произведении (9) и итоговом его выражении (11), ибо, количество частных моментов в симметричном строго фиксировано полным комбинаторным комплектом

$$6\cdot 4=6\cdot 2+3\cdot 4=24$$

Из формул (9), (11) приведенного примера можно получить выражение смешанного момента через единичные моменты

$$n_{21}=n_1 n_{11}-3n_{111} \qquad (12)$$

Вычисление коэффициентов разложения (α) произведения может быть осуществлено и систематизированным, общим методом.

Действительно, корни уравнения могут быть выбраны произвольно, и при любом их наборе произведение моментов (9) и его выражения (10,11) должны выполняться. Но тогда, набрав необходимое количество групп корней и подставив их поочерёдно в выражения произведения (9,10), можно построить систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов и решить её.

В качестве примера, рассмотрим произведение моментов более простого, трёхкорневого уравнения

$$m_1 m_{11}=(Z_1+Z_2+Z_3)(Z_1 Z_2+Z_1 Z_3+Z_2 Z_3)= \qquad (7.1)$$

его, аналогично предыдущему построенное, разложение

$$=\alpha_1\left(Z_1^3+\ldots\right)_3+\alpha_2\left(Z_1^2 Z_1^1+\ldots\right)_3^2+\alpha_3\left(Z_1 Z_2 Z_3+\ldots\right)_1= \qquad (8.1)$$

и, аналогично предыдущему, методом подбора, вычисленные коэффициенты разложения произведения соответственно равны

$$=0\left(Z_1^3+\ldots\right)_3+1\left(Z_1^2 Z_1^1+\ldots\right)_3^2+3\left(Z_1 Z_2 Z_2+\ldots\right)_1 \qquad (9.1)$$

фиксируем их значения: $\alpha_1=0, \alpha_2=1, \alpha_3=3.$

Найдём теперь коэффициенты произведения общим методом.

Назначаем три тройки корней (попроще)

$$Z_{1,2,3}=1,1,1, \quad Z_{1,2,3}=1,1,0, \quad Z_{1,2,3}=1,0,0,$$

Подставляем тройки поочерёдно в выражения произведения (9; 10) и выписываем получившуюся систему

$$\begin{aligned}
9&=3\alpha_1+6\alpha_2+\alpha_3\\
2&=2\alpha_1+2\alpha_2\\
0&=\alpha_1
\end{aligned}$$

Решение построенной системы, как видим. подтверждает сказанное выше: $\alpha_1=0, \alpha_2=1, \alpha_3=3$.

<u>Выражение любого смешанного или кратного момента через единичные, единственно, ибо, в противном случае, имеет место связь между произвольными коэффициентами уравнения, что невозможно</u>.

По существу, так же, как произведение, раскрывается степень симметричного момента. Например, степень

$$n_1^5=\left(Z_1+Z_2+Z_3+Z_4\right)^5= \qquad (13)$$

может представлять собой только сумму одно-, двух-, трех- и четырехкорневых симметричных моментов пятого порядка

$$n_{5000}\,,\; n_{4100}\,,\; n_{3200}\,,\; n_{3110}\,,\; n_{2210}\,,\; n_{2111}$$

Т.е. заданная степень должна иметь вид

$$=\alpha_1 n_{5000}+\alpha_2 n_{4100}+\alpha_3 n_{3200}+\alpha_4 n_{3110}+\alpha_5 n_{2210}+\alpha_6 n_{2111}= \quad (14)$$

где числовые множители около моментов являются полиномиальными коэффициентами и вычисляются формулами [1]

$$\alpha_1=\frac{5!}{5!},\alpha_2=\frac{5!}{4!\cdot 1!},\alpha_3=\frac{5!}{3!\cdot 2!},\alpha_4=\frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!},\alpha_5=\frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!},\alpha_6=\frac{5!}{2!} \quad (15)$$

Окончательное выражение степени (13)

$$\begin{aligned}&=\left(Z_1^5+\ldots\right)_4^1+5\left(Z_1^4 Z_2^1+\ldots\right)_6^2+10\left(Z_1^3 Z_2^2+\ldots\right)_6^2+20\left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1+\ldots\right)_4^3+\\&+30\left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1+\ldots\right)_4^3+60\left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^1+\ldots\right)_1^4\end{aligned} \quad (16)$$

которое, однако, подлежит обязательной проверке на постоянство количества частных моментов в исходной (13) и результирующей (16) формах:

$$4^5=4+5\cdot 6\cdot 2+10\cdot 6\cdot 2+20\cdot 4+30\cdot 4\cdot 3+60\cdot 1\cdot 4=1024$$

Важным следствием симметричности момента произведения и сомножителя является симметричность второго сомножителя.

Из симметрии момента степени следует симметричность соответствующего корня из нее.

Делению подлежат только сложные симметричные моменты, такие как смешанные и кратные. У единичных моментов делителей нет. В качестве делителей рассматриваются, как более удобные, стандартные моменты, хотя могут быть и смешанные.

Рассмотрим деление момента n_{21} (12), полученного ранее в результате умножения (9):

$$n_{21}=\left(Z_1^2 Z_2^1+\ldots\right)_6^2= \quad (17)$$

Во-первых, делимый момент раскрывается по верхнему заскобочному индексу

$$=\left[\left(Z_1^2 Z_2^1 + Z_1^1 Z_2^2\right) + \ldots\right]_6^1 = \qquad (18)$$

В этой форме у раскрытых слагаемых есть общий множитель делитель, который и выносится за внутреннюю скобку

$$=\left[Z_1 Z_2 \left(Z_1 + Z_2\right) + \ldots\right]_6^1 = \qquad (19)$$

В полученной форме по нижнему заскобочному индексу строятся и суммируются сочетания вынесенного общего множителя $Z_1 Z_2$. В скобках же осталось «постоянное» – сумма $\left(Z_1 + Z_2\right)$, подстрочные индексы которой соответствуют вынесенному общему множителю $\left(Z_1 Z_2\right)$.

Дополнением необходимого количества нужных слагаемых во внутренней скобке формируется симметричный момент. Там же, дополненные частные моменты и вычитаются

$$=\left[Z_1 Z_2 \left(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 - Z_3 - Z_4\right) + \ldots\right]_6^1 = \qquad (20)$$

Раскрывая внутренние и наружные скобки, формируем симметричный момент в форме разности

$$\begin{aligned} &=\left[Z_1 Z_2 \left(Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 - Z_3 - Z_4\right) + \ldots\right]_6^1 - \\ &-\left[Z_1 Z_2 \left(Z_3 + Z_4\right) + \ldots\right]_6^1 = \end{aligned} \qquad (21)$$

Уменьшаемое полученной разности, без дополнительных комментариев, может быть представлено в виде

$$=\left(Z_1 Z_2 \cdot n_1 + \ldots\right)_6^1 = n_1 \cdot \left(Z_1 Z_2 + \ldots\right)_6^1 = n_1 n_{11} \qquad (22)$$

Вычитаемое, в силу отмеченного выше свойства сумм, является симметричным моментом. С другой стороны, как это видно, оно представляет собой сумму двенадцати трехкорневых частных моментов третьего порядка или, соответственно, трех моментов n_{111} содержащих по четыре частных момента

$$\left[Z_1 Z_2 (Z_3 + Z_4) + \ldots\right]_6^1 = \frac{2 \cdot 6}{4} (Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots)_4^1 = 3 n_{111} \qquad (23)$$

Итак, окончательно, делимый момент (17) представляется в форме разности произведения (21) делителя (n_{11}), сформированного из вынесенного общего множителя $(z_1 z_2)$, на частное n_1 и остатка $(3n_{111})$ (23)

$$= n_1 n_{11} - 3 n_{111} \qquad (24)$$

Однако, законченным вычисление можно считать только после проверки начальной (17) и конечной (24) формул на постоянство количества частных моментов

$$2 \cdot 6 = -4 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 12$$

Полученный результат деления не обусловлен наложением каких бы то ни было условий на моменты, поэтому является общим.

Т.е. любой сложный симметричный момент может быть представлен разностью произведения симметричных моментов (уменьшаемого) и симметричного момента (вычитаемого).

В рассмотренном примере (17) результат (24) оказался выраженным через единичные моменты. В общем же случае в результате могут оказаться и сложные симметричные моменты. Применяя к ним повторно и необходимое число раз обозначенное выше действие деления, можно заключить, что

любой сложный симметричный момент, в конце концов, всегда может быть представлен алгебраической функцией *единичных моментов. Факт такого представления называется сходимостью сложных моментов.*

Т.е., любой симметричный момент сходится и единственным образом, так как в противном случае между произвольными моментами имела бы место априорная связь, что не возможно.

Процесс преобразования сложного симметричного момента в алгебраическую функцию от единичных моментов называется его вычислением.

Рассмотрим вычисление еще одного сложного симметричного момента

$$n_{32} = \left(Z_1^3 Z_2^2 + ...\right)_6^2 = \qquad (25)$$

Опять, сначала раскрываем момент по верхнему заскобочному индексу

$$= \left[\left(Z_1^3 Z_2^2 + Z_1^2 Z_2^3\right) + ...\right]_6^1 = \qquad (26)$$

Экспериментальной проверкой легко показать, что из возможных конфигураций общего множителя головного момента

$$Z_1 Z_2,\ Z_1^2 Z_2^2,\ Z_1^2 Z_2^1,\ Z_1^2,\ Z_1$$

выбирать следует ту, которая собирается в симметричный момент при оставшихся (26) заскобочных индексах. В рассматриваемом случае – множители $Z_1 Z_2$, или $Z_1^2 Z_2^2$. И вообще, можно показать, что выносимым общим множителем должен быть частный момент симметричного стандартного.

Выносим множитель $Z_1^2 Z_2^2$, после которого внутренняя скобка момента остается более «легкой»

$$= \left[Z_1 Z_2 \left(n_1 - Z_3 - Z_4\right)_2 + ...\right]_6^1 = \qquad (27)$$

Здесь около внутренней скобки проставлен новый подстрочный индекс, соответствующий количеству вычитаемых частных моментов внутри круглых скобок. При этом общее количество вычитаемых моментов определяется как произведение подстрочных заскобочных индексов.

Раскрываем последнее (27) выражение вычисляемого момента (25)

$$= n_1 n_{22} - \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1 + \ldots\right)_4^2 \qquad (28)$$

Здесь сформированный смешанный, заведомо, как мы знаем, симметричный момент (n_{221}), что видно после постановки его заскобочных индексов, содержит количество частных моментов, равное числу вычитаемых в предыдущей форме (27) момента. Т.е. все вычитаемые (27) частные моменты вошли в состав вновь сформированного смешанного момента n_{221}.

Рассмотрим уравнение второй степени

$$D_2(Z) = Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \qquad (29)$$

Если переменной поочередно придать значения корней, то получим систему равенств

$$\begin{aligned} Z_1^2 - d_1 Z_1 + d_{11} &= 0 \\ Z_2^2 - d_1 Z_2 + d_{11} &= 0 \end{aligned} \qquad (30)$$

позволяющую производить вычисление коэффициентов уравнения в функции корней. Определитель этой системы

$$D_1 = \begin{vmatrix} Z_1^0 & -Z_1^1 \\ Z_2^0 & -Z_2^1 \end{vmatrix} = Z_1 - Z_2 \qquad (31)$$

определяет собой дискриминант заданного (29) уравнения по существу и несимметричный момент по форме.

Несимметричный момент – это знакопеременный симметричный момент или инверсионно раскрытая матрица (определитель).

Для вычисления несимметричного момента возводим в квадрат определяющее его равенство (31)

$$D_1^2 = Z_1^2 - 2Z_1Z_2 + Z_2^2 = d_2 - 2d_{11} = \qquad (32)$$

теперь учитывая, что

$$d_2 = \left(Z_1^2 + ...\right)_2^1 = \left[Z_1\left(d_1 - Z_2\right) + ...\right]_2^1 = d_1^2 - 2d_{11} \qquad (33)$$

находим дискриминант уравнения (29) второй степени

$$= d_1^2 - 4d_{11} \qquad (34)$$

<u>*Дискриминант (34) определяет значение образующей уравнение функции D_2, 29 в точке ее экстремума, разграничивающей разнохарактерные корни уравнения в соседних сечениях функции.*</u>

Т.е. дискриминант – это, еще раз, не коэффициент заданного уравнения, не симметричный момент. Однако, дискриминант (31) является коэффициентом обращенного уравнения, действительная и мнимая части корней, которого равны соответственно мнимой и действительной частям корней заданного уравнения. Дискриминант (34) является также коэффициентом резольвенты заданного (29) уравнения. Очевидно, в силу перечисленных свойств дискриминанта, а также в силу свойств второй степени, квадрат дискриминанта, т.е. квадрат несимметричного момента обращается в симметричный момент (32).

Всеми приведенными свойствами дискриминанта уравнения второй степени обладает и дискриминант уравнения третьей степени. Он также представляет собой значение функции в экстремуме. Также является разделителем корней по характеру. Вычисляется он тоже через возведение во вторую степень определителя

$$D_3 = \begin{vmatrix} Z_1^0 & -Z_1^1 & Z_1^2 \\ Z_2^0 & -Z_2^1 & Z_2^2 \\ Z_3^0 & -Z_3^1 & Z_3^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} Z_1^0 & Z_1^1 & Z_1^2 \\ Z_2^0 & Z_2^1 & Z_2^2 \\ Z_3^0 & Z_3^1 & Z_3^2 \end{vmatrix} \qquad (35)$$

аналогичного определителю системы (31) уравнения второй степени.

Инверсионное вычисление определителей осуществляется в соответствии с приведенными выше общими правилами, плюс, смена знаков перед перестановками, обусловленная инверсией (в рассматриваемом случае) надстрочных индексов.

Продемонстрируем правила смены знаков на примере рассматриваемого определителя (35)

$$
\begin{aligned}
-D_3 = +\left(+Z_1^0 Z_2^1 Z_3^2 - Z_1^0 Z_2^2 Z_3^1\right) - \left(Z_1^1 Z_2^0 Z_3^2 - Z_1^1 Z_2^2 Z_3^0\right) + \\
+\left(Z_1^2 Z_2^0 Z_3^1 - Z_1^2 Z_2^1 Z_3^0\right)
\end{aligned} \qquad (36)
$$

Т.е. знаки поочередно, начиная с плюсового, меняются в строчной записи определителя дважды - перед каждой перестановкой и перед каждой последовательно организованной ассоциированной парой, независимо от размеров вычисляемого определителя.

Следует отметить, что правильности последовательности перестановок (36) соответствует восходящая последовательность чисел, образуемых цифрами степеней корней частных моментов, а ассоциированию подлежат перестановки с ближайшими числами в степенях.

Прежде чем возводить дискриминант D_3 во вторую степень, представим его в форме разности

$$
\begin{aligned}
D_3^2 &= \left[\left(Z_2^2 Z_3 + Z_1 Z_3^2 + Z_1^2 Z_2\right) - \left(Z_2 Z_3^2 + Z_1 Z_2^2 + Z_1^2 Z_3\right)\right]^2 = \\
&= \left(Z_2^2 Z_3 + Z_1 Z_3^2 + Z_1^2 Z_2\right)^2 + \left(Z_2 Z_3^2 + Z_1 Z_2^2 + Z_1^2 Z_3\right)^2 - \\
&- 2\left(Z_2^2 Z_3 + Z_1 Z_3^2 + Z_1^2 Z_2\right)\left(Z_2 Z_3^2 + Z_1 Z_2^2 + Z_1^2 Z_3\right) =
\end{aligned} \qquad (37)
$$

и обратим внимание на следующее обстоятельство. Головные частные моменты суммы квадратов степени (37) дискриминанта имеют вид

$$
Z_1^4 Z_2^2, \; Z_1^3 Z_2^2 Z_3^1 \qquad (38)
$$

в то время как головные моменты удвоенного произведения совершенно другие:

$$Z_1^3 Z_2^3,\ Z_1^4 Z_2^1 Z_3^1\ ,\ Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 \qquad (39)$$

т.е. моменты заведомо разные.

Но, если бы дискриминант раскрывался как неинверсионный определитель, его квадрат был бы симметричным моментом, и приведенные головные моменты были б действительно таковыми. Таковыми они остаются и в случае инверсионно раскрываемого определителя. Так как уменьшаемое и вычитаемое квадрата разности дискриминанта (37) состоят из разных моментов (38, 39). Т.е. квадрат дискриминанта уравнения третьей степени – симметричный момент

$$\begin{aligned} D_3^2 &= \left(Z_1^4 Z_2^2 + \ldots\right)_3^2 + 2\left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^1 + \ldots\right)_1^6 - \\ &- 2\left(Z_1^4 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_1^3 - 2\left(3Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right)_1^1 \end{aligned} \qquad (40)$$

Вычисляя моменты, вошедшие в формулу (40) дискриминанта, найдем

$$\begin{aligned} m_{411} &= m_1^3 m_{111} - 3m_1 m_{11} m_{111} + 3m_{111}^2 \\ m_{321} &= m_1 m_{11} m_{111} - 3m_{111}^2 \\ m_{33} &= m_{11}^3 - 3m_1 m_{11} m_{111} + 3m_{111}^2 \\ m_{42} &= -2m_1^3 m_{111} + m_1^2 m_{11}^2 + 4m_1 m_{11} m_{111} - 2m_{111}^2 - 3n_{111}^2 \\ m_{222} &= m_{111}^2 \end{aligned} \qquad (41)$$

Подстановка вычисленных моментов в формулу дискриминанта (40) определит последний в произвольной точке пространства. В справочной литературе [1] дискриминант обычно рассматривается приведенным к центральной системе координат, где момент первого порядка (m_1) равен нулю. Квадрат дискриминанта представится соответственно формулой

$$D_3^2 = -4m_{011}^3 - 27m_{0111} \qquad (42)$$

где в обозначении моментов добавляется неканонический ноль, так как оставшиеся моменты обратились в инварианты.

2.3. Вычисление моментов

Основным правилом вычисления симметричных моментов является последовательность. Т.е. вычисление строго по порядку возрастания, так как каждый последующий момент вычисляется через предыдущие моменты. Здесь уместно припомнить интегро-дифференциальную связь алгебраических функций и их коэффициентов, в соответствии с которой, каждая последующая по порядку величины функция или коэффициент являются интегралом от предыдущей функции или коэффициента соответственно.

Моменты – это коэффициенты полиномиальных функций или образуемых ими уравнений, поэтому особое внимание обращаем на запись уравнений. Уравнения, моменты которых ниже вычисляются, предполагаются изначально записанными в канонической, знакопеременной, симметричной форме.

Так, например, уравнение второй степени может быть записано в форме

$$D_2 = d_{00}Z^1Z^1 - d_{10}Z^1Z^0 + d_{11}Z^0Z^0 = \qquad (43)$$

по существу полностью подпадающей под определение симметричной функции (момента), в рассматриваемом нами понимании, и может быть представлено в форме краткой записи

$$= \left(d_{00}Z^{11} + \ldots\right)_3 \qquad (44)$$

Здесь, подстрочный заскобочный индекс означает количество слагаемых в полной записи уравнения. Вычисляется же, как число сочетаний с повторениями [1] из общего числа различных индексов (0 и 1 – два), встречающихся в записи, по числу подстрочных или надстрочных мест (0 и 0 – два или 1 и 1 – два) в обозначении момента или степени переменной.

2.3.1. Моменты двух точек плоскости

Приводимые ниже подробные вычисления моментов, на наш взгляд, не нуждаются в словесных пояснениях. Здесь следует помнить только об одном. Каждое из вновь возникающих в процессе работы выражений (слагаемых), заранее, есть симметричный момент, и обходиться с ним следует как с таковым. При этом, вычисление моментов должно производиться строго в соответствии с ростом порядка их величины.

$$d_0 = \left(Z_1^0 + \ldots\right)_2^1 = Z_1^0 + Z_2^0 = 1 + 1 = 2$$

$$d_{00} = \left(Z_1^0 Z_2^0 + \ldots\right)_1^1 = Z_1^0 Z_2^0 = 1$$

$$d_1 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_2^1 = Z_1^1 + Z_2^1 = d_1$$

$$d_{10} = \left(Z_1^1 Z_2^0 + \ldots\right)_1^2 = Z_1^1 Z_2^0 + Z_1^0 Z_2^1 = d_1$$

$$d_{11} = \left(Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right)_1^1 = Z_1^1 Z_2^1 = d_{11}$$

$$d_2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_1^2 = \left[Z_1\left(Z_1^1 + Z_2^1 - Z_2^1\right)_1 + \ldots\right]_2^1 =$$

$$= \left(Z_1^1 d_1 + \ldots\right)_2^1 - \left[Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right]_2^1 = d_1^2 - 2d_{11}$$

$$d_{20} = \left(Z_1^2 Z_2^0 + \ldots\right)_1^2 = Z_1^2 + Z_2^2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_2^1 = d_2 = d_1^2 - 2d_{11}$$

$$d_{21} = \left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_1^2 = \left[Z_1^1 Z_2^1\left(Z_1^1 + Z_2^1\right) + \ldots\right]_1 = d_1 d_{11}$$

$$d_{22} = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_1^1 = \left[\left(Z_1^1 Z_2^1\right)\right]^2 = d_{11}^2$$

$$d_3 = \left(Z_1^3 + \ldots\right)_2^1 = \left[Z_1^2\left(d_1 - Z_2^1\right)_1 + \ldots\right]_2^1 =$$

$$= d_1 d_2 - \left[Z_1^2\left(Z_2^1\right)_1 + \ldots\right]_2^1 = d_1 d_2 - \left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_1^2 = d_1^3 - 3d_1 d_{11}$$

Здесь, в предпоследнем равенстве, на основе анализа выражения вычитаемого симметричного момента, в нём изменен порядок суммирования. После чего, на основании предыдущих вычислений, получен окончательный результат.

$$d_{30}=\left(Z_1^3Z_2^0+\ldots\right)_1^2=Z_1^3+Z_2^3=d_3$$

$$d_{31}=\left(Z_1^3Z_2^1+\ldots\right)_1^2=\left[Z_1Z_2\left(Z_1^2+Z_2^2\right)+\ldots\right]_1^1=d_2d_{11}=d_1^2d_{11}-2d_{11}^2$$

$$d_{32}=\left(Z_1^3Z_2^2+\ldots\right)_1^2=\left[Z_1^2Z_2^2\left(Z_1^1+Z_2^1\right)+\ldots\right]_1^1=d_1d_{22}=d_1\,d_{11}^2$$

$$d_{33}=\left(Z_1^3Z_2^3+\ldots\right)_1^1=d_{11}^3$$

$$d_4=\left(Z_1^4+\ldots\right)_2^1=\left[Z_1^3\left(d_1-Z_2\right)_1+\ldots\right]_2^1=d_1d_3-\left(Z_1^3Z_2^1+\ldots\right)_1^2=$$

$$=d_1^4-4d_1^2d_{11}+2d_{11}^2$$

$$d_{40}=\left(Z_1^4Z_2^0+\ldots\right)_1^2=Z_1^4+Z_2^4=d_4$$

$$d_{41}=\left(Z_1^4Z_2^1+\ldots\right)_1^2=\left[Z_1Z_2\left(Z_1^3+Z_2^3\right)+\ldots\right]_1^1=d_3d_{11}=$$

$$=d_1^3d_{11}-3d_1d_{11}^2$$

$$d_{42}=\left(Z_1^4Z_2^2+\ldots\right)_1^1=\left[Z_1^2Z_2^2\left(Z_1^2+Z_2^2\right)+\ldots\right]_1^1=d_2d_{22}=d_1\,d_{11}^2-2d_{11}^3$$

$$d_{43}=\left(Z_1^4Z_2^3+\ldots\right)_1^2=\left[Z_1^3Z_2^3\left(Z_1+Z_2\right)+\ldots\right]_1=d_1d_{33}=d_1\,d_{11}^3$$

$$d_{44}=\left(Z_1^4Z_2^4+\ldots\right)_1^1=d_{11}^4$$

$$d_5=\left(Z_1^5+\ldots\right)_2^1=\left[Z_1^4\left(d_1-Z_2\right)_1+\ldots\right]_2=d_1d_4-d_{41}=$$

$$=d_1\left(d_1^4-4d_1^2d_{11}+d_{11}^2\right)-\left(d_1^3d_{11}-3d_1d_{11}^2\right)=$$

$$=d_1^5-5d_{11}^3d_{11}+5d_1d_{11}^2$$

$$d_{50}=\left(Z_1^5Z_2^0+\ldots\right)_1^2=\left(Z_1^5+\ldots\right)_2^1=d_5$$

$$d_{51}=\left(Z_1^5Z_2^1+\ldots\right)_1^2=\left[Z_1^1Z_2^1\left(Z_1^4+Z_2^4\right)+\ldots\right]_1=d_4d_{11}=$$

$$=\left(d_1^4-4d_1^2d_{11}+2d_{11}^2\right)d_{11}=d_1^4d_{11}-4d_1^2d_{11}^2+2d_{11}^3$$

$$d_{52}=\left(Z_1^5Z_2^2+\ldots\right)_1^2=\left[Z_1^2Z_2^2\left(Z_1^3+Z_2^3\right)+\ldots\right]_1^1=d_3d_{22}=$$

$$=\left(d_1^3-3d_1d_{11}^2\right)d_{11}^2=d_1^3d_{11}^2-3d_1\,d_{11}^3$$

$$d_{53}=\left(Z_1^5Z_2^3+\ldots\right)_1^2=\left[Z_1^3Z_2^3\left(Z_1^2+Z_2^2\right)+\ldots\right]_1=d_2d_{33}=$$

$$=\left(d_1^2-2d_{11}\right)d_{11}^3=d_1^2d_{11}^3-2d_{11}^4$$

$$d_{54}=\left(Z_1^5Z_2^4+\ldots\right)_1^2=Z_1^4Z_2^4\left(Z_1+Z_2\right)=d_1d_{44}=d_1d_{11}^4$$

$$d_{55} = \left(Z_1^5 Z_2^5 + \ldots\right)_1^1 = d_{11}^5$$

2.3.2. Моменты трех точек плоскости

$$m_0 = \left(Z_1^0 + \ldots\right)_3^1 = 3$$

$$m_{00} = \left(Z_1^0 Z_2^0 + \ldots\right)_3^1 = 3$$

$$m_{000} = \left(Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_1^1 = 1$$

$$m_1 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_3^1 = m_1$$

$$m_{10} = \left(Z_1^1 Z_2^0 + \ldots\right)_3^2 = m_1 \frac{6}{3} = 2m_1$$

$$m_{100} = \left(Z_1^1 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1 + \ldots\right)_1^3 = m_1$$

$$m_{11} = \left(Z_1 Z_2 + \ldots\right)_3 = m_{11}$$

$$m_{110} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1 Z_2 + \ldots\right)_1^3 = m_{11}$$

$$m_{111} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_1^1 = m_{111}$$

$$m_2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_3^1 = \left[Z_1\left(m_1 - Z_2 - Z_3\right)_2 + \ldots\right]_3^1 = m_1^2 - \left(Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right)_3^1 \frac{6}{3} =$$

$$= m_1^2 - 2m_1$$

$$m_{20} = \left(Z_1^2 Z_2^0 + \ldots\right)_3^2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_3^1 \frac{2 \cdot 3}{3} = 2m_2$$

$$m_{200} = \left(Z_1^2 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_3^1 \frac{1 \cdot 3}{3} = m_2$$

$$m_{21} = \left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_3^2 = \left[Z_1 Z_2\left(Z_1 + Z_2 + Z_3 - Z_3\right)_1 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_1 m_{11} - m_{111} \frac{1 \cdot 3}{3} = m_1 m_{11} - 3m_{111}$$

$$m_{210} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_1^6 = \left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_3^2 = m_{21} = m_1 m_{11} - 3m_{111}$$

$$m_{211} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_1^3 = \left[Z_1 Z_2 Z_2\left(Z_1 + Z_2 + Z_1\right) + \ldots\right]_1^1 = m_1 m_{111}$$

$$m_{22} = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_3^1 = \left[Z_1 Z_2 \left(m_{11} - Z_1 Z_3 - Z_2 Z_3\right)_2 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_{11}^2 - \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_1^3 \frac{2 \cdot 3}{3} = m_{11}^2 - 2m_{211} = m_{11}^2 - 2m_1 m_{111}$$

$$m_{220} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1^2 z_2^2 + \ldots\right)_3^1 = m_{22}$$

$$m_{221} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1 + \ldots\right)_1^3 = \left[Z_1 Z_2 Z_3 \left(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3\right)\right]_1^1 =$$

$$= m_{11} m_{111}$$

$$m_{222} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right)_1^1 = m_{111}^2$$

$$m_3 = \left(Z_1^3 + \ldots\right)_3^1 = \left[Z_1^2 \left(m_1 - Z_2 - Z_3\right)_2 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_1 m_2 - \left[Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right]_3^2 \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 2} =$$

$$= m_1 \left(m_1^2 - 2m_{11}\right) - \left(m_1 m_{11} - 3m_{111}\right) = m_1^3 - 3m_1 m_{11} + 3m_{111}$$

$$m_{30} = \left(Z_1^3 Z_2^0 + \ldots\right)_3^2 = \left(Z_1^3 + \ldots\right)_3^1 \frac{2 \cdot 3}{3} = 2m_3$$

$$m_{300} = \left(Z_1^3 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1^3 + \ldots\right)_3^1 = m_3$$

$$m_{31} = \left(Z_1^3 Z_2^1 + \ldots\right)_3^2 = \left[Z_1 Z_2 \left(m_2 - Z_3^3\right)_1 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_2 m_{11} - \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_1^3 \frac{1 \cdot 3}{3} = m_{11}\left(m_1^2 - 2m_{11}\right) - m_1 m_{11} =$$

$$= m_1^2 m_{11} - 2m_{11}^2 - m_1 m_{111}$$

$$m_{310} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_1^6 = \left(Z_1^3 Z_2^1 + \ldots\right)_3^2 = m_{31} =$$

$$= m_1^2 m_{11} - 2m_{11}^2 - m_1 m_{111}$$

$$m_{311} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_1^3 = \left[Z_1 Z_2 Z_3 \left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2\right) + \ldots\right]_1^1 = m_2 m_{111} =$$

$$= \left(m_1^2 - 2m_{11}\right) m_{111} = m_1^2 m_{111} - 2m_{11} m_{111}$$

$$m_{32} = \left(Z_1^3 Z_2^2 + \ldots\right)_3^2 = \left[Z_1^2 Z_2^2 \left(m_2 - Z_3\right)_1 + \ldots\right]_3^1 = m_1 m_{22} - m_{221} =$$

$$= m_1 \left(m_{11}^2 - 2m_1 m_{111}\right) - m_{11} m_{111} = m_1 m_{11}^2 - 2m_1^2 m_{111} - m_{11} m_{111}$$

$$m_{320} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^0 + \ldots\right)_1^6 = \left[Z_1^3 Z_2^2 + \ldots\right]_3^2 = m_1 m_{11}^2 - 2m_1^2 m_{111} - m_{11} m_{111}$$

$$m_{321} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^1 + \ldots\right)_1^6 = \left[Z_1 Z_2 Z_3 \left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_3^2 + \ldots\right]_1^1 = m_{111} m_{21} =$$

$$= m_{111}\left(m_1 m_{11} - 3m_{111}\right) = m_1 m_{11} m_{111} - 3m_{111}^2$$

$$m_{322} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right)_1^3 = \left[Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 \left(Z_1 + Z_2 + Z_3\right) + \ldots\right]_1^1 = m_1 m_{222} = m_1 m_{111}^2$$

$$m_{33} = \left(Z_1^3 Z_2^3 + \ldots\right)_3^1 = \left[Z_1^2 Z_2^2 \left(m_{11} - Z_1 Z_3 - Z_2 Z_3\right)_1 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_{11} m_{22} - \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^1 + \ldots\right)_1^6 = m_{11}\left(m_{11}^2 - 2m_1 m_{111}\right) -$$

$$- \left(m_1 m_{11} m_{111} - 3m_{111}^2\right) = m_{11}^3 - 3m_1 m_{11} m_{111} + 3m_{111}^2$$

$$m_{330} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z + \ldots\right)_1^3 = m_{11}^3 - 3m_1 m_{11} m_{111} + 3m_{111}^2$$

$$m_{331} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^1 + \ldots\right)_1^3 = m_{111} m_{32} = m_{111}\left(m_{11}^2 - 2m_1 m_{111}\right) =$$

$$= m_{11}^2 m_{111} - 2m_1 m_{111}^2$$

$$m_{332} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^2 + \ldots\right)_1^3 = Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 \left(Z_1 Z_2 + \ldots\right)_3^1 = m_{11} m_{222} = m_{11} m_{111}^2$$

$$m_{333} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \ldots\right)_1^1 = m_{111}^3$$

$$m_4 = \left(Z_1^4 + \ldots\right)_3^1 = \left[Z_1^3 \left(m_1 - Z_2 - Z_3\right)_2 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_1 m_3 - \left[Z_1^3 Z_2^1 + \ldots\right]_3^2 =$$

$$= m_1\left(m_1^3 - 3m_1 m_{11} + 3m_{111}\right) - \left(m_1^2 m_{11} - 2m_{11}^2 - m_1 m_{111}\right) =$$

$$= m_1^4 - 4m_1^2 m_{11} + 2m_{11}^2 + 4m_1 m_{111}$$

$$m_{40} = \left(Z_1^4 Z_2^0 + \ldots\right)_3^2 = \left(Z_1^4 + \ldots\right)_3^1 \frac{2 \cdot 3}{3} = 2m_4 = 2m_1^4 - 8m_1^2 m_{11} +$$

$$+ 4m_{11}^2 + 8m_1 m_{111}$$

$$m_{400} = \left(Z_1^4 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_1^3 = \left(Z_1^4 + \ldots\right)_3^1 = m_4 = m_1^4 - 4m_1^2 m_{11} +$$

$$+ 2m_{11}^2 + 4m_1 m_{111}$$

$$m_{41} = \left(Z_1^4 Z_2^1 + \ldots\right)_3^2 = \left[Z_1^1 Z_2^1 \left(m_3 - Z_3^3\right)_1 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_3 m_{11} - \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_1^3 =$$

$$= m_{11}\left(m_1^3 - 3m_1 m_{11} + 3m_{111}\right) - \left(m_1^2 m_{111} - 2m_{11} m_{111}\right) =$$

$$= m_1^3 m_{11} - m_1^2 m_{111} - 3m_1 m_{11}^2 + 5m_{11} m_{111}$$

$$m_{410} = \left(Z_1^4 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_1^6 = \left[Z_1^4 Z_2^1 + \ldots\right]_3^2 = m_1^3 m_{111} - 3m_1 m_1^2 + 5m_{11} m_{111}$$

$$m_{411} = \left(Z_1^4 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_1^3 = m_{111}\left[Z_1^3 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_{111}\left(m_1^2 - 3m_1 m_{11} + 3m_{111}\right) = m_1^3 m_{111} - 3m_1 m_{11} m_{111} + 3m_{111}^2$$

$$m_{42} = \left(Z_1^4 Z_2^2 + \ldots\right)_3^2 = \left[Z_1^2 Z_2^2 \left(m_2 - z_3^2\right)_1 + \ldots\right]_3^1 = m_2 m_{22} - 3m_{222} =$$

$$= \left(m_1^2 - 2m_{11}\right)\left(m_{11}^2 - 2m_1 m_{111}\right) - 3m_{111}^2 =$$

$$= -2m_1^3 m_{111} + m_1^2 m_{11}^2 + 4m_1 m_{11} m_{111} - 2m_{11}^3 - 3m_{111}^2$$

$$m_{421} = \left(Z_1^4 Z_2^2 Z_3^1 + \ldots\right)_1^6 = m_{111}\left[Z_1^3 Z_2^1 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_{111}\left(m_{11}^2 - 2m_{11}^2 - m_1 m_{11}\right) = m_1^2 m_{11} m_{111} - 2m_{11}^2 m_{111} - m_1\, m_{111}^2$$

$$m_{422} = \left(Z_1^4 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right)_1^3 = m_{111}^2 m_2 = m_{111}^2\left(m_1^2 - 2m_{11}\right) =$$

$$= m_1^2 m_{111}^2 - 2m_{11} m_{111}^2$$

$$m_{43} = \left(Z_1^4 Z_2^3 + \ldots\right)_3^2 = \left[Z_1^3 Z_2^3 \left(m_2 - Z_3\right)_1 + \ldots\right]_3^1 =$$

$$= m_1 m_{33} - \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^1\right)_1^3 =$$

$$= m_1\left(m_{11}^3 - 3m_1 m_{11} m_{111} + 3m_{111}^2\right) - \left(m_{11}^2 m_{111} - 2m_1 m_{111}^2\right) =$$

$$= m_1 m_{11}^3 - 3m_1^2 m_{11} m_{111} - m_{11}^2 m_{111} + 5m_1 m_{111}^2$$

$$m_{430} = \left(Z_1^4 Z_2^3 Z_3^0 + \ldots\right)_1^6 = m_{43} =$$

$$= m_1 m_{11}^3 - 3m_1^2 m_{11} m_{111} - m_{11}^2 m_{111} + 5m_1 m_{111}^2$$

$$m_{431} = \left(Z_1^4 Z_2^3 Z_3^1 + \ldots\right)_1^6 = m_{111} m_{32} = m_1 m_{11}^2 m_{111} - 2m_1^2 m_{111}^2 - m_{11} m_{111}^2$$

2.3.3. Моменты четырех точек плоскости

$$n_0 = \left(Z_1^0 + \ldots\right)_4^1 = 4$$

$$n_{00} = \left(Z_1^0 Z_2^0 + \ldots\right)_6^1 = 6$$

$$n_{000} = \left(Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_4^1 = 4$$

$$n_{0000} = \left(Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_1^1 = 1$$

$$n_1 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_4 = n_1$$

$$n_{10} = \left(Z_1^1 Z_2^0 + \ldots\right)_6^2 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)\frac{2\cdot 6}{4} = 3n_1$$

$$n_{100} = \left(Z_1^1 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_4^3 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_4^1 \frac{3\cdot 4}{4} = 3n_1$$

$$n_{1000} = \left(Z_1^1 Z_2^0 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_1^4 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_4^1 = n_1$$

$$n_{11} = \left(Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right)_6^1 = n_{11}$$

$$n_{110} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_4^3 = \left(Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right)_6^1 \frac{3\cdot 4}{6} = 2n_{11}$$

$$n_{1100} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_1^6 = \left(Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right)_6^1 = n_{11}$$

$$n_{111} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_4^1 = n_{111}$$

$$n_{1110} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^0 + \ldots\right)_1^4 = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_4^1 = n_{111}$$

$$n_{1111} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^1 + \ldots\right)_1^1 = n_{1111}$$

$$n_2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_4^1 = \left[Z_1\left(m_1 - Z_2 - Z_3 - Z_4\right)_2 + \ldots\right]_4^1 =$$

$$= n_1^2 - \left(Z_1 Z_2 + \ldots\right)_6^1 \frac{3\cdot 4}{6} = n_1^2 - 2n_{11}$$

$$n_{20} = \left(Z_1^2 Z_2^0 + \ldots\right)_6^2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_3^1 \frac{2\cdot 3}{3} = 2n_2$$

$$n_{200} = \left(Z_1^2 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_4^3 = \left[Z_1^2 + \ldots\right]_4^1 \frac{2\cdot 6}{4} = 3n_2$$

$$n_{2000} = \left(Z_1^2 Z_2^0 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_1^4 = \left[Z_1^2 + \ldots\right]_4^1 = n_2$$

$$n_{21} = \left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_6^2 = \left[Z_1 Z_2 \left(n_1 - Z_3 - Z_4\right)_2 + \ldots\right]_6^1 =$$

$$n_{210} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_4^6 = \left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_6^2 \frac{4 \cdot 6}{2 \cdot 6} = 2n_{21}$$

$$n_{2100} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{12} = \left[Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right]_6^2 \frac{12}{12} = n_{21}$$

$$n_{211} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3 = \left[Z_1 Z_2 Z_3 \left(n_1 - Z_4\right)_1 + \ldots\right]_4 = n_1 n_{111} - 4n_{1111}$$

$$n_{2110} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{12} = \left[Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right]_4^3 \frac{12}{12} = n_{211}$$

$$n_{2111} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^1 + \ldots\right)_1^4 = n_{1111}\left[Z_1 + \ldots\right]_4^1 = n_1 n_{1111}$$

$$n_{22} = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_6^1 = \left[Z_1 Z_2 \left(n_{11} - Z_1 Z_3 - \ldots. - Z_3 Z_4\right)_3 + \ldots\right]_6^1 =$$

$$= n_{11}^2 - \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3 \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 4} - \left(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + \ldots\right)_1^1 \frac{(5-4) \cdot 6}{1} =$$

$$= n_{11}^2 - 2n_{211} - 6n_{1111} = n_{11}^2 - 2n_1 n_{111} + 2n_{1111}$$

$$n_{220} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^0 + \ldots\right)_4^3 = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_6^1 \frac{3 \cdot 4}{6} = 2n_{22}$$

$$n_{2200} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_1^6 = \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_6^1 = n_{22}$$

$$n_{221} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3 = \left[Z_1 Z_2 Z_3 \left(n_{11} - Z_3 Z_4\right)_3 + \ldots\right]_4^1 =$$

$$= n_{11} n_{111} - 3\left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1 Z_4^1 + \ldots\right)_1 = n_{11} n_{111} - 3n_1 n_{1111}$$

$$n_{2210} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{12} = \left[Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1 + \ldots\right]_4^3 = n_{221}$$

$$n_{2211} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1 Z_4^1 + \ldots\right)_1^6 = n_{1111}\left[Z_1 Z_2 + \ldots\right]_6^1 = n_{11} n_{1111}$$

$$n_{222} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right)_4^1 =$$

$$= \left[Z_1 Z_2 Z_3 \left(n_{111} - Z_1 Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3 Z_4 - Z_2 Z_3 Z_4\right)_3 + \ldots\right]_4^1 =$$

$$= n_{111}^2 - \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1 Z_4^1 + \ldots\right)_1^6 \frac{3 \cdot 4}{6} = n_{111}^2 - 2n_{2211} = n_{111}^2 - n_{11} n_{1111}$$

$$n_{2220} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{12} = \left[Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right]_4^3 = n_{222}$$

$$n_{2221} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^1 + \ldots\right)_1^4 = n_{1111} n_{111}$$

$$n_{2222} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 + \ldots\right)_1^1 = n_{1111}^2$$

$$n_3 = \left(Z_1^3 + \ldots\right)_4^1 = \left[Z_1^2 \left(n_1 - Z_2 - Z_3 - Z_4\right)_2 + \ldots\right]_4 =$$

$$= n_1 n_2 - \left[Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right]_6^2 = n_1\left(n_1^2 - 2n_{11}\right) - \left(n_1 n_{11} - 3n_{111}\right) =$$

$$= n_1^3 - 3n_1 n_{11} + 3n_{111}$$

$$n_{30} = \left(Z_1^3 Z_2^0 + \ldots\right)_6^2 = \left(Z_1^3 + \ldots\right)_4^1 \frac{2 \cdot 6}{4} = 3n_3$$

$$n_{300} = \left(Z_1^3 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_4^3 = \left(Z_1^3 + \ldots\right)_4^1 \frac{3 \cdot 4}{4} = 3n_3$$

$$n_{3000} = \left(Z_1^3 Z_2^0 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_1^4 = \left[Z_1^3 + \ldots\right]_4^1 = n_3$$

$$n_{31} = \left(Z_1^3 Z_2^1 + \ldots\right)_6^2 = \left[Z_1 Z_2 \left(n_2 - Z_3^2 - Z_4^2\right)_2 + \ldots\right]_6^1 =$$

$$= n_2 n_{11} - \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3 = n_{11}\left(n_1^2 - 2n_{11}\right) - \left(n_1 n_{11} - 4n_{1111}\right) =$$

$$= n_1^2 n_{11} - n_1 n_{111} - 2n_{11}^2 + 4n_{1111}$$

$$n_{310} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_4^6 = \left(Z_1^3 Z_2^1 + \ldots\right)_6^2 \frac{4 \cdot 6}{2 \cdot 6} = 2n_{31}$$

$$n_{3100} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{12} = \left(Z_1^3 Z_2^1 + \ldots\right)_6^2 = n_{31}$$

$$n_{311} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3 = \left[Z_1 Z_2 Z_3 \left(n_2 - Z_4^2\right)_1 + \ldots\right]_4^1 =$$

$$= n_2 n_{111} - n_{1111} n_1 =$$

$$= n_{111}\left(n_1^2 - 2n_{11}\right) - n_1 n_{1111} = n_1^2 n_{111} - 2n_{11} n_{111} - n_1 n_{1111}$$

$$n_{3110} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{12} = \left[Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots\right]_4^3 = n_{311}$$

$$n_{3111} = n_{1111} n_2 = n_{1111}\left(n_1^2 - 2n_{11}\right) = 2n_{11} n_{1111}$$

$$n_{32} = \left(Z_1^3 Z_2^2 + \ldots\right)_6^2 = \left[Z_1^2 Z_2^2 \left(n_1 - Z_3 - Z_4\right)_2 + \ldots\right]_6 =$$

$$= n_1 n_{22} - \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3 =$$

$$= n_1\left(n_{11}^2 - 2n_1 n_{111} + 2n_{1111}\right) - n_{11}n_{111} + 3n_1 n_{1111} =$$

$$= n_1 n_{11}^2 - 2n_1^2 n_{111} + 5n_1 n_{1111} - n_{11}n_{111}$$

$$n_{320} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^0 + \ldots\right)_4^6 = 2\left[Z_1^2 Z_2^2 \left(n_1 - Z_3 - Z_4\right)_2 + \ldots\right]_6 =$$

$$= 2n_1 n_{22} - 2n_{221} =$$

$$= 2n_{32} = 2n_1 n_{11}^2 - 4n_1^2 n_{111} + 10 n_1 n_{1111} - 2n_{11}n_{111}$$

$$n_{3200} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{12} = \left[Z_1^3 Z_2^2 + \ldots\right]_6^2 = n_{32}$$

$$n_{321} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^1 + \ldots\right)_4^6 =$$

$$= \left[Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1 \left(n_1 - Z_1^2 Z_4^1 - Z_1 Z_4^2 - Z_2^2 Z_4^1 - Z_2^1 Z_4^2 - \ldots.\right)_6 + \ldots\right]_4 =$$

$$= n_1 n_{11} n_{111} - 3n_{111}^2 - 3n_1^2 n_{1111} + 4n_{11}n_{1111}$$

$$n_{3210} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^1 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{24} = \left[Z_1^3 Z_2^2 Z_3^1 + \ldots\right]_4^6 = n_{321}$$

$$n_{3211} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^1 Z_4^1 + \ldots\right)_1^{12} = n_{1111}n_{21} = n_1 n_{11} n_{1111} - 3n_{111}n_{1111}$$

$$n_{322} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right)_4^3 = \left[Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 \left(n_1 - Z_4\right)_1 + \ldots\right]_4 =$$

$$= n_1 n_{222} - n_{1111}n_{111} = n_1 n_{111}^2 - 2n_1 n_{111111} - n_{111}n_{1111}$$

$$n_{3220} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{12} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^2 + \ldots\right)_3^4 = n_{322}$$

$$n_{3221} = \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^1 + \ldots\right)_1^{12} = n_{1111}n_{211} = n_1 n_{111} n_{1111} - 4n$$

$$n_{33} = \left(Z_1^3 Z_2^3 + \ldots\right)_6^1 = n_{11}^3 + 3n_{111}^2 - 3n_1 n_{11} n_{111} + 3n_1^2 n_{1111} - 3n_1 n_{1111}$$

$$n_{330} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^0 + \ldots\right)_4^3 = \left(Z_1^3 Z_2^3 \ldots\right)_6^1 \frac{3\cdot 4}{6} = 2n_{33}$$

$$n_{3300} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_1^6 = \left(Z_1^3 Z_2^3 \ldots\right)_6^1 = n_{33}$$

$$n_{331} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3 = \left[Z_1 Z_2 Z_3 \left(n_{22} - Z_1^2 Z_4^2 - \ldots\right)_3 + \ldots\right]_4 =$$

$$= n_{111}n_{22} - \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^2 Z_4^1 + \ldots\right)_1^{12} = n_{111}n_{22} - n_{1111}n_{21} =$$

$$= n_{11}^2 n_{111} - 2n_1 n_{111}^2 - n_1 n_{11} n_{1111} + 5n_{111}n_{1111}$$

$$n_{3310} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^1 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{12} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^1 + \ldots\right)_4^3 = n_{331}$$

$$n_{3311} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^1 Z_4^1 + \ldots\right)_1^6 = n_{111}n_{22} = n_{11}^2 n_{1111} - 2n_1 n_{111} n_{1111} - 2n_{1111}^2$$

$$n_{332} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^2 + \ldots\right)_4^3 = \left[Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 \left(n_1 - Z_3 Z_4 + \ldots\right)_3\right]_4^1 =$$

$$= n_{11}n_{222} - \left(Z_1^3 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^1 + \ldots\right)_1^4 = n_1\left(n_{111}^2 - 2n_{11}n_{1111}\right) -$$

$$- n_1 n_{1111} n_{111} + 4n_{1111}^2 = -2n_{11}^2 n_{1111} - n_1 n_{111} n_{1111} + 4n_{1111}^2 + n_{11} n_{111}^2$$

$$n_{3320} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^2 Z_4^0 + \ldots\right)_1^{12} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^2 + \ldots\right)_4^3 =$$

$$= \left[Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 \left(n_1 - Z_1 Z_4 - Z_2 Z_4 - Z_3 Z_4\right)_3 + \ldots\right]_4 =$$

$$= n_{11}n_{222} - n_{3221} = n_{322}$$

$$n_{3321} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^2 Z_4^1 + \ldots\right)_1^{12} = n_{1111}n_{221} = n_{1111}\left(n_{11}n_{111} - 3n_1 n_{1111}\right) =$$

$$= n_{11}n_{111}n_{1111} - 3n_1 n_{1111}^2$$

$^{2}_{1111}$

$$n_{3322} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^2 Z_4^2 + \ldots\right)_1^6 = n_{1111}^2 n_{11}$$

$$n_{333} = n_{111}^3 - 3n_{11}n_{111}n_{1111} + 3n_1 n_{1111}^2$$

$$n_{3330} = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 Z_4^0 + \ldots\right)_1^4 = \left(Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \ldots\right)_4^1 = n_{333}$$

$$n_{3333} = n_{1111}^3$$

2.3.4. Моменты пяти точек плоскости

$$p_0 = \left(Z_1^0 + \ldots\right)_5^1 = 5$$

$$p_{00} = \left(Z_1^0 Z_2^0 + \ldots\right)_{10}^1 = 10$$

$$p_{000} = \left(Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_{10}^1 = 10$$

$$p_{0000} = \left(Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_5^1 = 5$$

$$p_{00000} = \left(Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 Z_4^0 Z_5^0 + \ldots\right)_1^1 = 1$$

$$p_1 = \left(Z_1 + \ldots\right)_5^1 = p_1$$

$$p_{10} = \left(Z_1^1 Z_2^0 + \ldots\right)_{10}^2 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_5 \frac{2 \cdot 10}{5} = 4 p_1$$

$$p_{100} = \left(Z_1^1 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_{10}^3 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_5^1 \frac{3 \cdot 10}{5} = 6 p_1$$

$$p_{1000} = \left(Z_1^1 Z_2^0 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_5^4 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_5^1 \frac{4 \cdot 5}{5} = 4 p_1$$

$$p_{10000} = \left(Z_1^1 Z_2^0 Z_3^0 Z_4^0 Z_5^0 + \ldots\right)_1^5 = \left(Z_1^1 + \ldots\right)_5^1 = p_1$$

$$p_{11} = \left(Z_1 Z_2 + \ldots\right)_{10}^1 = p_{11}$$

$$p_{110} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_{10}^3 = \left(Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right)_{10}^1 \frac{3 \cdot 10}{10} = 3 p_{11}$$

$$p_{1100} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_5^6 = \left(Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right)_{10}^1 \frac{5 \cdot 6}{10} = 3 p_{11}$$

$$p_{11000} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^0 Z_4^0 Z_5^0 + \ldots\right)_1^{10} = \left(Z_1^1 Z_2^1 + \ldots\right)_{10}^1 = p_{11}$$

$$p_{111} = \left(Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots\right)_{10}^1 = p_{111}$$

$$p_{1110} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^0 + \ldots\right)_5^4 = \left(Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots\right)_{10}^1 \frac{5 \cdot 4}{10} = 2 p_{111}$$

$$p_{11100} = \left(Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^0 Z_5^0 + \ldots\right)_1^{10} = \left(Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots\right)_{10}^1 = p_{111}$$

$$p_{1111} = \left(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + \ldots\right)_5^1 = p_{1111}$$

$$p_2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_5^1 = \left[Z_1\left(p_1 - Z_2 - Z_3 - Z_4 - Z_5\right)_4 + \ldots\right]_5^1 =$$

$$= p_1^2 - \left(Z_1 Z_2 + \ldots\right)_{10}^1 \frac{4 \cdot 5}{10} = p_1^2 - 2p_{11}$$

$$p_{20} = \left(Z_1^2 Z_2^0 + \ldots\right)_{10}^2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_5^1 \frac{2 \cdot 10}{5} = 4p_2$$

$$p_{200} = \left(Z_1^2 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots\right)_{10}^3 = \left[Z_1^2 + \ldots\right]_5^1 \frac{3 \cdot 10}{5} = 6p_2$$

$$p_{2000} = \left(Z_1^2 Z_2^0 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_5^4 = \left[Z_1^2 + \ldots\right]_5^1 \frac{4 \cdot 5}{5} = 4p_2$$

$$p_{20000} = \left(Z_1^2 Z_2^0 Z_3^0 Z_4^0 Z_5^0 + \ldots\right)_1^5 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_5^1 = p_2$$

$$p_{21} = \left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_{10}^2 = \left[Z_1 Z_2\left(p_1 - Z_3 \ldots\right)_3 + \ldots\right]_{10}^1 =$$

$$= p_1 p_{11} - \left(Z_1 Z_2 Z_3 + \ldots\right)_{10}^1 \frac{3 \cdot 10}{10} = p_1 p_{11} - 3p_{111}$$

$$p_{210} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_{10}^6 = \left[Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right]_{10}^2 \frac{6 \cdot 10}{2 \cdot 10} = 3p_{21}$$

$$p_{2100} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_5^{12} = 3\left[Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right]_{10}^2 = 3p_{21}$$

$$p_{21000} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^0 Z_4^0 Z_5^0 + \ldots\right)_1^{20} = \left[Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right]_{10}^2 = p_{21}$$

$$p_{211} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_{10}^3 = \left[Z_1 Z_2 Z_3\left(p_1 - Z_3 - Z_4 - Z_5\right)_2 + \ldots\right]_{10}^1 =$$

$$= p_1 p_{111} - \left(Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 + \ldots\right)_5 = p_1 p_{111} - 4p_{1111}$$

$$p_{2110} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^0 + \ldots\right)_5^{12} = \left[Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right]_{10}^3 \frac{5 \cdot 12}{3 \cdot 10} = 2p_{211}$$

$$p_{21100} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^0 Z_5^0 + \ldots\right)_1^{30} = \left[Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right]_{10}^3 = p_{211}$$

$$p_{2111} = \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^1 + \ldots\right)_5^4 = \left[Z_1 Z_2 Z_3 Z_4\left(p_1 - Z_5\right)_1 + \ldots\right]_5^1 =$$

$$= p_1 p_{1111} - 5p_{11111}$$

$$p_{21110} = p_{2111}$$

$$p_{21111} = p_{11111} p_1$$

$$p_{22}=\left(Z_1^2Z_2^2+\ldots\right)_{10}^{1}=\left[Z_1Z_2\left(p_{11}-Z_1Z_3-\ldots\right)_9+\ldots\right]_{10}^{1}=$$

$$=p_{11}^2-\left(Z_1^2Z_2^1Z_3^1+\ldots\right)_{10}^{3}\frac{6\cdot 10}{3\cdot 10}-\left(Z_1Z_2Z_3Z_4+\ldots\right)_5^1\frac{3\cdot 10}{5}=$$

$$=p_{11}^2-2p_1p_{111}+2p_{1111}$$

$$p_{220}=\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^0+\ldots\right)_{10}^{3}=\left(Z_1^2Z_2^2+\ldots\right)_{10}^{1}\frac{3\cdot 10}{10}=3p_{22}$$

$$p_{2200}=\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^0Z_4^0+\ldots\right)_5^6=\left(Z_1^2Z_2^2+\ldots\right)_{10}^{1}=3p_{22}$$

$$p_{22000}=p_{22}$$

$$p_{221}=\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^1+\ldots\right)_{10}^{3}=\left[Z_1Z_2Z_3\left(p_{11}-Z_1Z_4-\ldots\right)_7+\ldots\right]_{10}^{1}=$$

$$=p_{11}p_{111}-\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^1Z_4^1+\ldots\right)_5^6\frac{6\cdot 10}{4\cdot 5}-\left(Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5+\ldots\right)_1^1\frac{10}{1}=$$

$$=p_{11}p_{111}-3p_{2111}-10p_{11111}=p_{11}p_{111}-3p_1p_{1111}+5p_{11111}$$

$$p_{2210}=\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^1Z_4^0+\ldots\right)_5^{12}=\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^1+\ldots\right)_{10}^{3}\frac{5\cdot 12}{3\cdot 10}=2p_{221}$$

$$n_{22100}=n_{221}$$

$$p_{2211}=\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^1Z_4^1+\ldots\right)_5^6=\left[Z_1Z_2Z_3Z_4\left(p_{11}-Z_1Z_5\ldots\right)_4+\ldots\right]_5^1=$$

$$=p_{11}p_{1111}-\left(Z_1^2Z_2^1Z_3^1Z_4^1Z_5^1+\ldots\right)_1^5\frac{4\cdot 5}{5}=p_{11}p_{1111}-4p_1p_{11111}$$

$$p_{22110}=p_{2211}$$

$$p_{22111}=p_{11111}p_{11}$$

$$p_{222}=\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^2+\ldots\right)_{10}^{1}=\left[Z_1Z_2Z_3\left(p_{111}-Z_1Z_2Z_4\ldots\right)_9+\ldots\right]_{10}^{1}=$$

$$=p_{111}^2-\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^1Z_4^1+\ldots\right)_5^6\frac{6\cdot 10}{5\cdot 6}-\left(Z_1^2Z_2^1Z_3^1Z_4^1Z_5^1+\ldots\right)_1^5\frac{3\cdot 10}{5}=$$

$$=p_{111}^2-2p_{2211}-6p_{21111}=p_{111}^2-p_{11}p_{1111}+2p_1p_{11111}$$

$$p_{2220} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^0 + \dots\right)_5^4 = \left[Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 + \dots\right]_{10}^1 \frac{4 \cdot 5}{10} = 2 p_{222}$$

$$p_{22200} = p_{222}$$

$$p_{2221} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^1 + \dots\right)_5^4 = \left[Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \left(p_{111} - Z_1 Z_2 Z_5 \dots\right)_6 + \dots\right]_5^1 =$$

$$= p_{111} p_{1111} - \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1 Z_4^1 Z_5^1 + \dots\right)_1^{10} \frac{6 \cdot 5}{10} =$$

$$= p_{111} p_{1111} - 3 p_{22111} = p_{111} p_{1111} - 3 p_{11} p_{11111}$$

$$p_{22210} = p_{2221}$$

$$p_{22211} = p_{11111} p_{111}$$

$$p_{2222} = \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^2 Z_4^2 + \dots\right)_5^1 =$$

$$= \left[Z_1 Z_2 Z_3 Z_4 \left(p_{1111} - Z_1 Z_2 Z_3 Z_5 \dots\right)_4 + \dots\right]_5^1 =$$

$$= p_{1111}^2 - \left(Z_1^2 Z_2^2 Z_3^1 Z_4^1 Z_5^1 + \dots\right)_1^{10} \frac{4 \cdot 5}{10} = p_{1111}^2 - 2 p_{22211} =$$

$$= p_{1111}^2 - 2 p_{11111} p_{111}$$

$$p_{22220} = p_{2222}$$

$$p_{22222} = p_{11111}^2$$

$$p_3 = \left(Z_1^3 + \dots\right)_5^1 = \left[Z_1^2 \left(n_1 - Z_2 \dots\right)_4 + \dots\right]_5 = p_1 p_2 - \left[Z_1^2 Z_2^1 + \dots\right]_{10}^2 =$$

$$= p_1 p_2 - p_{21} = p_1 \left(p_1^2 - 2 p_{11}\right) - \left(p_1 p_{11} - 3 p_{111}\right) =$$

$$= p_1^3 - 3 p_1 p_{11} + 3 p_{111}$$

$$p_{30} = \left(Z_1^3 Z_2^0 + \dots\right)_{10}^2 = \left(Z_1^3 + \dots\right)_5^1 \frac{2 \cdot 10}{5} = 4 p_3$$

$$p_{300} = \left(Z_1^3 Z_2^0 Z_3^0 + \dots\right)_{10}^3 = \left(Z_1^3 + \dots\right)_5^1 \frac{3 \cdot 10}{5} = 6 p_3$$

$$p_{3000} = \left(Z_1^3 Z_2^0 Z_3^0 Z_3^0 + \dots\right)_5^4 = \left(Z_1^3 + \dots\right)_5^1 \frac{4 \cdot 5}{5} = 4 p_3$$

$$p_{30000} = p_3$$

$$p_{31} = \left(Z_1^3 Z_2^1 + \ldots\right)_{10}^2 = \left[Z_1 Z_2 \left(p_2 - Z_3^2 \ldots\right)_3 + \ldots\right]_{10}^1 =$$

$$= p_2 p_{11} - p_{211} = p_{11}\left(p_1^2 - 2p_{11}\right) - \left(p_1 p_{111} - 4p_{1111}\right) =$$

$$= p_1^2 p_{11} - 2p_{11}^2 - p_1 p_{111} + 4p_{1111}$$

$$p_{310} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^0 + \ldots\right)_{10}^6 = \left(Z_1^3 Z_2^1 + \ldots\right)_{10}^2 \frac{6 \cdot 10}{10 \cdot 2} = 3p_{31}$$

$$p_{3100} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^0 Z_4^0 + \ldots\right)_5^{12} = \left(Z_1^3 Z_2^1 + \ldots\right)_{10}^2 \frac{12 \cdot 5}{10 \cdot 2} = 3p_{31}$$

$$p_{31000} = p_{31}$$

$$p_{311} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_{10}^3 = \left[Z_1 Z_2 Z_3 \left(p_2 - Z_4^2 - Z_5^2\right)_2 + \ldots\right]_{10}^1 =$$

$$= p_1^2 p_{111} - 2p_{11} p_{111} - p_1 p_{1111} + 5p_{11111}$$

$$p_{3110} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^0 + \ldots\right)_5^{12} = \left[Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right]_{10}^3 \frac{12 \cdot 5}{3 \cdot 10} = 2p_{311}$$

$$p_{31100} = p_{311}$$

$$p_{3111} = \left(Z_1^3 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^1 + \ldots\right)_5^4 = \left[Z_1^1 Z_2^1 Z_3^1 Z_4^1 \left(p_2 - Z_5^2\right)_1 + \ldots\right]_5^1 =$$

$$= p_2 p_{1111} - 5p_{11111} p_1 = p_1^2 p_{1111} - 2p_{11} p_{1111} - p_1 p_{11111}$$

$$p_{31110} = p_{3111}$$

$$p_{31111} = p_{1111} p_2 = p_{11111}\left(p_1^2 - 2p_{11}\right) = p_1^2 p_{11111} - 2p_{11} p_{11111}$$

$$p_{32} = \left(Z_1^3 Z_2^2 + \ldots\right)_{10}^2 = \left[Z_1^2 Z_2^2 \left(p_2 - Z_3 \ldots\right)_3 + \ldots\right]_{10}^1 =$$

$$= p_1 p_{22} - \left(Z_1^2 Z_2^1 Z_3^1 + \ldots\right)_{10}^3 =$$

$$= p_1\left(p_{11}^2 - 2p_1 p_{111} + 2p_{1111}\right) - \left(p_{11} p_{111} - 3p_1 p_{1111} + 5p_{11111}\right) =$$

$$= p_1 p_{11}^2 - 2p_1^2 p_{111} + 5p_1 p_{1111} - p_{11} p_{111} - 5p_{11111}$$

$$p_{320} = 3p_{32}$$

$$p_{3200} = 3p_{32}$$

$$p_{321}=\left(Z_1^3Z_2^2Z_3^1+\ldots\right)_{10}^{6}=\left[Z_1Z_2Z_3\left(p_{21}-Z_1^2Z_4^1-Z_1Z_4^2\ldots\right)_{14}+\ldots\right]_{10}^{1}=$$

$$=p_{21}p_{111}-\left(Z_1^3Z_2^1Z_3^1Z_4^1+\ldots\right)_5^4\frac{60}{20}-\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^1Z_4^1+\ldots\right)_1^5\frac{60}{30}-$$

$$-\left(Z_1^2Z_2^1Z_3^1Z_4^1Z_5^1+\ldots\right)_1^5\frac{20}{5}=p_{21}p_{111}-3p_{3111}-2p_{2211}-4p_{21111}=$$

$$=p_{111}\left(p_1p_{11}-3p_{111}\right)-3\left(p_2p_{1111}-p_{11111}p_1\right)-$$

$$-2\left(p_{11}p_{1111}-4p_1p_{11111}\right)-4p_1p_{11111}=$$

$$=p_1p_{11}p_{111}-3p_{111}^2-3p_1^2p_{1111}+4p_{11}p_{1111}+7p_1p_{11111}$$

$$p_{3210}=2p_{321}$$

$$p_{3211}=\left(Z_1^3Z_2^2Z_3^1Z_4^1+\ldots\right)_5^{12}=\left[Z_1Z_2Z_3Z_4\left(p_{21}-Z_1^2Z_5^1-Z_1^1Z_5^2\ldots\right)_8+\ldots\right]_5^1=$$

$$=p_{21}p_{111}-\left(Z_1^3Z_2^1Z_4^1Z_5^1+\ldots\right)_1^5\frac{4\cdot 5}{5}-\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^1Z_4^1Z_5^1+\ldots\right)_1^{10}\frac{4\cdot 5}{10}=$$

$$=p_{1111}\left(p_1p_{11}-3p_{111}\right)-4p_{11111}\left(p_1^2-2p_{11}\right)-2p_{11111}p_{11}=$$

$$=p_1p_{11}p_{1111}-3p_{111}p_{1111}-4p_1^2p_{11111}+6p_{11}p_{11111}$$

$$p_{32110}=p_{3211}$$

$$p_{32111}=p_{11111}p_{21}=p_{11111}\left(p_1p_{11}-3p_{111}\right)=p_1p_{11}p_{11111}-3p_{111}p_{11111}$$

$$p_{322}=\left(Z_1^3Z_2^2Z_3^2+\ldots\right)_{10}^{3}=\left[Z_1^2Z_2^2Z_3^2\left(p_1-Z_4-Z_5\right)_2+\ldots\right]_{10}^{1}=$$

$$=p_1p_{222}-\left(Z_1^2Z_2^2Z_3^1Z_4^1+\ldots\right)_5^4=$$

$$=p_1\left(p_{111}^2-2p_{11}p_{1111}+2p_1p_{11111}\right)-\left(p_{111}p_{1111}-3p_{11}p_{11111}\right)=$$

$$=p_1p_{111}^2-2p_1p_{11}p_{1111}+2p_1^2p_{11111}-p_{111}p_{1111}+3p_{11}p_{11111}$$

2.3.5. Кратные моменты

В практике преобразований наиболее удобными оказываются функции стандартного отображения и соответственно стандартные моменты величин кратных степени двойки и четвёрки.

Достоинством применения функций этого вида

$$Z_1 = Z^{2^0}; Z_2 = Z^{2^1}; Z_4 = Z^{2^2}; Z_8 = Z^{2^3} \ldots..$$
$$Z_1 = Z^{4^0}; Z_4 = Z^{4^1}; Z_{16} = Z^{4^2}; Z_{64} = Z^{4^3} \ldots.. \quad (45)$$

является относительно большая простота получаемых общих решений функций и уравнений; возможность более просто производить вычисление моментов высших порядков; наиболее просто производить извлечение корней; более просто, без переводов в единичные, вычислять моменты высших порядков при проведении численных операций, а операции эти производятся постоянно, и т.д.

Выписываем первый момент образа уравнения диполя полученного стандартным отображением с плоскости первого порядка на плоскость второго порядка

$$d_2 = d_1^2 - 2d_{11} \quad (46)$$

А теперь производим вычисление того же момента после отображения уравнения диполя на плоскость четвёртого порядка с плоскости второго порядка

$$d_4 = \left(Z_1^4 + \ldots\right)_2 = \left[Z_1^2\left(Z_1^2 + Z_2^2 - Z_2^2\right) + \ldots\right]_2 = \\ = d_2^2 - 2d_{22} \quad (47)$$

Сравнивая результаты можно заключить, что оператор формулы первого момента уравнения диполя остаётся неизменной при удвоении порядка величин плоскости аргумента. Тот же результат может быть получен при вычислении кратного момента над плоскостью восьмого порядка после отображения с плоскости четвёртого порядка

$$d_8 = \left(Z_1^8 + \ldots\right)_2 = \left[Z_1^4\left(Z_1^4 + Z_2^4 - Z_2^4\right) + \ldots\right]_2 = \\ = d_4^2 - 2d_{44} \qquad (48)$$

Налицо, таким образом, параметрическое соотношение

$$d_{2\nu} = d_\nu^2 - 2d_{\nu\nu} \qquad (49)$$

позволяющее произвести вычисление первого момента уравнения диполя над плоскостью произвольного порядка в функции моментов вдвое меньшего порядка.

Выпишем из таблиц первый момент уравнения-образа диполя полученного стандартным отображением на плоскость четвёртого порядка (с плоскости первого порядка)

$$d_4 = d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2 \qquad (50)$$

Выпишем в соответствии с выведенной параметрической формулой (49) кратный момент шестнадцатого порядка

$$d_{16} = d_8^2 - 2d_{88} =$$

а вычисляя его над плоскостью четвёртого порядка, найдём,

в соответствии всё с тем же соотношением (49)

$$= \left(d_4^2 - 2d_{44}\right)^2 - 2d_{44}^2 = d_4^4 - 4d_4^2 d_{44} + 2d_{44}^2 \qquad (51)$$

что параметрическая формула имеет место и для моментов четвёртой кратности

$$d_{4\nu} = d_\nu^4 - 4d_\nu^2 d_{\nu\nu} + 2d_{\nu\nu}^2 \qquad (52)$$

Ту же самую картину параметрической общности формул можно наблюдать вычисляя первый момент уравнения треугольника после отображения на плоскость второго порядка

$$m_2 = \left(Z_1^2 + \ldots\right)_3 = m_1^2 - 2m_{11} \qquad (53)$$

если сравнивать его с тем же моментом после отображения уравнения на плоскость четвёртого порядка

$$\begin{aligned} m_4 &= \left(Z_1^4 + \ldots\right)_3 = \left[Z_1^2\left(Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - Z_2^2 - Z_3^2\right) - \right]_3 = \\ &= m_2^2 - \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_3 \frac{2*3}{3} = m_2^2 - 2m_{22} \end{aligned} \qquad (54)$$

Как видим, сохраняется даже форма параметрического соотношения (55), имевшая место при удвоении моментов уравнения второй степени

$$m_{2\nu} = m_\nu^2 - 2m_{\nu\nu} \qquad (55)$$

Для уравнения третьей степени картина дополняется соотношениями для моментов второго порядка

$$\begin{aligned} m_{22} &= \left(Z_1^2 Z_2^2 + \ldots\right)_3 = m_{11}^2 - 2m_1 m_{111} \\ m_{44} &= \left(Z_1^4 Z_2^4 + \ldots\right)_3 = \\ &= \left[Z_1^2 Z_2^2\left(Z_1^2 Z_2^2 + Z_1^2 Z_3^2 + Z_2^2 Z_3^1 - Z_1^2 Z_3^2 - Z_2^2 Z_3^2\right)_2 + \ldots\right]_3 = \\ &= m_{22}^2 - 2m_2 m_{222} \end{aligned} \qquad (56)$$

$$m_{2\nu\nu} = m_{\nu\nu}^2 - 2m_\nu m_{\nu\nu\nu} \qquad (57)$$

Анализ параметрических соотношений (49,52.55) показывает, что формулы кратного увеличения моментов, формально, могут быть получены из стандартной записи момента, простым умножением всех индексов на требуемую величину. Так, для получения четырёхкратно увеличенных моментов уравнения третьей степени выписываем их в стандартной форме на плоскости четвёртого порядка выраженными через единичные моменты

$$\begin{aligned} m_4 &= m_1^4 - 4m_1^2 m_{11} + 2m_{11}^2 + 4m_1 m_{111} \\ m_{44} &= m_{11}^4 - 4m_1 m_{11}^2 m_{111} + 2m_1^2 m_{111}^2 + 4m_{11} m_{111}^2 \end{aligned} \qquad (58)$$

А для построения шестнадцатикратно увеличенных моментов, умножаем все подстрочные индексы уже полученных моментов (58) на четыре

$$\begin{aligned} m_{16} &= m_4^4 - 4m_4^2 m_{44} + 2m_{44}^2 + 4m_4 m_{444} \\ m_{1616} &= m_{44}^4 - 4m_4 m_{44}^2 m_{444} + 2m_4^2 m_{444}^2 + 4m_{44} m_{444}^2 \end{aligned} \qquad (59)$$

Для произвольного увеличения порядка моментов индексы умножаем на произвольное число ν (параметр отображения) и пользуемся общим параметрическим соотношением для вычисления кратных моментов

$$\begin{aligned} m_{4\nu} &= m_\nu^4 - 4m_\nu^2 m_{\nu\nu} + 2m_{\nu\nu}^2 + 4m_\nu m_{\nu\nu\nu} \\ m_{4\nu 4\nu} &= m_{\nu\nu}^2 - 4m_\nu m_{\nu\nu}^2 + 2m_\nu^2 m_{\nu\nu\nu}^2 + 4m_{\nu\nu} m_{\nu\nu\nu}^2 \end{aligned} \qquad (60)$$

В полной аналогии с выше изложенным алгоритмом могут быть построены кратные моменты уравнений четвёртого, пятого и более высоких порядков.

3. Отображения

Отображение функции это её преобразование, обусловленное заменой независимого переменного.

Ниже рассматриваются отображения рациональных алгебраических функций комплексного переменного

$$R_\upsilon(Z) = Z^\upsilon - r_1 Z^{\upsilon-1} + r_{11} Z^{\upsilon-2} - \ldots + (-1)_\upsilon r_{111\ldots} \qquad (1)$$

на основе использования аппарата «симметричных моментов» [4].

Алгебраическая функция (1) обладает примечательным и необходимым для отображения свойством — она полностью определена своими корнями, причем, единственным образом, однозначно[7] .

Действительно, если известны корни функции (1) – Z_1, Z_2, ... Z_ν , то известна и сама функция (1), так как она, в силу основной теоремы алгебры, представима однозначным произведением известных линейных сомножителей, *эта форма функции*

$$R_\upsilon(Z) = (Z - Z_1)(Z - Z_2)\ldots(Z - Z_\nu) \qquad (2)$$

называется её решением.

Пусть, например, отображение заданной функции-оригинала (1) осуществляется тоже рациональной функцией

$$Z_\mu = Z^\mu - q_1 Z^{\mu-1} + \ldots + q_\mu \qquad (3)$$

Это означает, что каждой точке (Z) плоскости аргумента функции-оригинала (1) функцией отображения ставятся в однозначное соответствие точки плоскости аргумента (Z_μ) функции-образа. Причём, наряду с прочими точками, функцией отображения (3) «переносятся» и точки нулей функции-оригинала, соответственно, в точки $Z_{\mu1}$, $Z_{\mu2}$, ... $Z_{\mu\upsilon}$, как мы полагаем, нулей функции-образа. Напомним, что оговорка здесь связана с возможностью полагать и по-другому.

Опираясь на выше приведённые свойства рациональных алгебраических функций, воссоздаем, функцию-образ по точкам её корней, и, раскрывая определяющее произведение (2) линейных сомножителей, представляем функцию-образ в канонической знакопеременной форме

$$R_{\mu\upsilon}(Z_\mu) = Z_\mu^\upsilon - (Z_{\mu1} + Z_{\mu2} + \ldots + Z_{\mu\upsilon})Z_\mu^{\upsilon-1} + \ldots + (-1)_\upsilon (Z_{\mu1} Z_{\mu2} Z_{\mu\upsilon}) \quad (4)$$

Одним из основных требований предъявляемых к функции (3) отображения является обеспечение возможности построения коэффициентов функции-образа через коэффициенты заданной функции оригинала. Ниже, в качестве функций отображения используются только алгебраические, функции, применение которых, как это показано в предыдущем разделе, обеспечивает не только сходимость но и единственность такого представления.

Графически, заданная рациональная

алгебраическая функция (1) представляет собой $\underline{\upsilon}$-линейчатую пространственную фигуру [7], в каждом сечении которой плоскостями $\underline{R_\upsilon(Z) = const}$, в соответствии с основной теоремой алгебры, содержится $\underline{\upsilon}$ точек проколов, определяющих корни функции (1).

Отображением функцией (3) фигура оригинала может быть видоизменена, перемещена и переориентирована относительно центра отсчёта (если предположить, что начала координат пространств оригинала и образа совмещены). Отображением функцией (3) фигура оригинала может быть достаточно произвольно деформирована, например, до «превращения» функции-образа в четно (или нечётно) симметричную или степенную функцию

$$R_{\mu\upsilon}(Z_\mu) = Z_\mu^\upsilon \quad (5)$$

Реализация каждого из требований наложенных на функцию-образ обеспечивается выбором соответствующего значения одного из произвольных коэффициентов (q) функции отображения (3).

Коэффициенты (q) функции отображения (3) будем называть, поэтому, также, параметрами отображения.

Требования к функции-образу записываются в форме выражений связи между коэффициентами, в частности, в форме равенств коэффициентов константам.

Например, для размещения функции-образа (4) в центральной системе координат, требуется равенство нулю первого её коэффициента

$$Z_{\mu 1} + Z_{\mu 2} + \ldots + Z_{\mu \upsilon} = \qquad (6)$$

Раскрываем образы корней в соответствии с функцией отображения (3) и вычисляем первый коэффициент

$$\begin{aligned} &= \left(Z_1^{\mu} + q_1 Z_1^{\mu-1} + \ldots + q_{\mu} Z_1^{0}\right) + \left(Z_2^{\mu} + q_1 Z_2^{\mu-1} + \ldots + q_{\mu} Z_2^{0}\right) + \ldots \\ &\ldots + \left(Z_{\upsilon}^{\mu} + q_1 Z_{\upsilon}^{\mu-1} + \ldots + q_{\mu} Z_{\upsilon}^{0}\right) = \left(Z_1^{\mu} + \ldots\right)_{\upsilon}^{1} + q_1 \left(Z_1^{\mu-1} + \ldots\right)_{\upsilon}^{1} + \ldots \qquad (7) \\ &\ldots + q_{\mu}\left(Z_1^{0} + \ldots\right)_{\upsilon}^{1} = p_{\mu} + q_1 p_{\mu-1} + \ldots + q_{\mu} p_0 = 0 \end{aligned}$$

Здесь, через p_{μ}, как видим, обозначены стандартные моменты корней функции-оригинала (1).

Для выполнения требования (6) наложенного на функцию-образ достаточно одного свободного параметра (q) отображения. Пусть это будет параметр q_1, остальные полагаем равными нулю. Функция отображения (3) при этом окажется функцией первого порядка $(\mu = 1)$, линейной

$$V_1 = Z + q_1 \qquad (8)$$

и этого достаточно, так как требование, наложенное на корни функции-образа, линейно (6) и одно.

Первый коэффициент (6) функции-образа равен

$$\left(Z_{\mu 1} + \ldots\right)_{\upsilon} = p_1 + q_1 p_0 = p_1 + \upsilon q_1 \qquad (9)$$

Откуда следует, что для выполнения требования (6) наложенного на функцию-образ параметр отображения (q_1) должен иметь значение

$$q_1 = \frac{-p_1}{\upsilon} \tag{10}$$

При наложении нескольких требований на функцию образ, параметры отображения вычисляются как корни системы, состоящей из соответствующего числа уравнений (типа 6).

Подстановка найденных значений параметров отображения окончательно определяет функцию-образ (9) со всеми заложенными в неё качественными особенностями. На этом заканчивается действие метода отображений как метода синтезирования новых функций. Дальнейшее использование функций-образов зависит от того, как была поставлена общая задача.

Так, например, если задача заключается в разработке некоторого устройства или его части и нами построена функция-оригинал, описывающая работу его макета, то функция-образ, учитывающая требования, закладываемые к работе будущего устройства, представит собой более совершенную математическую модель разработки. Новый оригинал. Применение, таким образом, отображений при проектировании позволяет сместить центр тяжести исследований от стенда к рабочему столу.

В процессе проведения исследовательских работ, при обработке гипотез функция-оригинал определяет наше первое представление о явлении. Функция-образ включает в себя вновь полученные сведения и предположения, представляет собой более совершенную модель, новую функцию оригинал [5].

В математических науках отображение, это инструмент синтеза и анализа, позволяющий видоизменить аналитические и графические формы функций. Исторически, отображение было и остается основным методом решения алгебраических уравнений. Отображение позволяет преобразовать образ многоугольника корней уравнения к частной решаемой форме [2] или произвести разделение уравнения на элементарные решаемые составляющие.

3.1. Отображение линейными функциями

Рассмотрим известное линейное отображение функции третьего порядка

$$A_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111} = Z^3 - 3a_1 Z^2 + 3a_2 Z - a_3 \quad (11)$$

изложенным общим методом, линейной функцией

$$V = q_0 Z + q_1 Z^0 \quad (12)$$

Функция-образ тоже, представит собой алгебраическую функцию третьего порядка

$$B_3(V) = V^3 - 3b_1 V^2 + 3b_{11} V - b_3 \quad (13)$$

Действительно, функции-образу придаём три однозначно определённых точки корней преобразованных из корней функции-оригинала функцией отображения (12)

$$\begin{aligned} V_1 &= q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0 \\ V_2 &= q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0 \\ V_3 &= q_0 Z_3 + q_1 Z_3^0 \end{aligned} \quad (14)$$

из которых она и может быть воссоздана в соответствии с основной теоремой алгебры, через своё решение

$$B_3(V) = V^3 - (V_1 + \ldots)_3^1 \cdot V^2 + (V_1 V_2 + \ldots)_3^1 \cdot V - (V_1 V_2 V_3) \quad (15)$$

единственным образом.

Вычисление коэффициентов функции-образа (13) начинаем с третьего (13, 14, 15)

$$b_3 = V_1 V_2 V_3 = \left(q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0\right)\left(q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0\right)\left(q_0 Z_3 + q_1 Z_3^0\right) = \quad (16)$$

Выписываем произведение вторых слагаемых сомножителей (16) коэффициента b_3

$$= q_1 q_1 q_1 Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 + \ldots = \quad (17)$$

Для удобства, полученное произведение (17) представим в форме

$$= q_{111} m_{000} + \ldots = \quad (18)$$

где произведение параметров отображения заменено условным произведением индексов

$$q_1 \cdot q_1 \cdot q_1 = q_{111} \quad (19)$$

а произведение корней функции (11) – соответствующим моментом

$$Z_1^0 Z_2^0 Z_3^0 = m_{000} \quad (20)$$

Получившийся таким образом головной частный момент (18) произведения функций (16) остается просуммировать сочетаниями с повторением индексов по три (три индекс – места, и у момента и у параметра) из двух (два возможных значения индекса – 0 и 1)

$$= \left(q_{111} m_{000} + \ldots\right)_4 = q_{111} m_{000} + q_{011} m_{100} + q_{001} m_{110} + q_{000} m_{111} = \quad (21)$$

Возвращаясь, в найденном (21) выражении вместо произведения индексов к произведению параметров, получим окончательное выражение третьего коэффициента (16) функции-образа (15) через параметры отображения и коэффициенты функции-оригинала

$$q_1^3 m_{000} + q_0 q_1^2 m_{100} + q_0^2 q_1 m_{110} + q_0^3 m_{111} \quad (22)$$

Замечания.

1. Можно не переходить к произведению индексов (19) вместо произведения параметров, а выбранное произведение (17) сразу представить головным частным моментом коэффициента b_3 (16)

$$=\left(q_1 q_1 q_1 m_{000}+\ldots\right)_4= \tag{23}$$

а затем сразу вывести результат (22).

2. Головной частный момент (17) коэффициента b_3 может быть выбран произведением любых слагаемых, например

$$=\left(q_0 Z_1\right)\left(q_1 Z_2^0\right)\left(q_0 Z_3\right)=q_0 q_1 q_0 Z_1 Z_2^0 Z_3=\left(q_{001} m_{110}+\ldots\right)_4 \tag{24}$$

Здесь головной частный момент (17) коэффициента b_3 выбран таковым из соображения будущего представления его в форме по убывающим степеням параметра q_1 отображения, имеющего размерность переменной функции-образа.

3. Выборка комбинаций при переходе от сокращенной записи функции (21,24) коэффициента b_3 осуществляется простым переносом подстрочных единиц из обозначения параметра в обозначение момента (или, наоборот) по закону формирования комбинаций сочетания с повторениями.

Второй и третий коэффициенты функции образа (13) вычисляем как, соответственно, первую и вторую производную третьего (22) коэффициента (b_3) по параметру q_1

$$\begin{aligned} 3b_2 &= \frac{1}{1}\left(b_3\right)' = 3q_1^2 + 2q_0 q_1 m_1 + q_0^2 m_{11} \\ 3b_1 &= \frac{1}{2}\left(b_3\right)'' = 3q_1 + q_0 m_1 \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь учтено, что $m_{000}=1$, $m_{001}=m_1$ и $m_{110}=m_{11}$. Производные (25) моментов-коэффициентов делённые на число соответствующее порядку производной будем называть *<u>«целыми производными»</u>* и в дальнейшем, если это не вызывает сомнений, слово «целые» иногда будем опускать.

Для проверки правильности полученных формул произведем вычисление, например, второго коэффициента функции-образа полностью

$$
\begin{aligned}
3b_2 &= \left(V_1V_2 + \ldots\right)_3^1 = \\
&= \left[\left(q_0Z_1 + q_1Z_1^0\right)\left(q_0Z_2 + q_1Z_2^0\right) + \ldots\right]_3^1 = \\
&= q_1q_1Z_1^0Z_2^0 + \ldots = \left(q_{11}m_{00} + \ldots\right)_3^1 = \\
&= q_{11}m_{00} + q_{01}m_{10} + q_{00}m_{11} = \\
&= 3q_1^2 + 2q_0q_1m_1 + q_0^2m_{11}
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Можно произвести вычисление и первого коэффициента и еще раз убедиться в совпадении результатов с ранее сделанными выводами (25).

Итак, функция-образ (13) в пространстве над плоскостью (V) комплексной переменной определена. Коэффициенты её (22, 25) выражены через коэффициенты функции-оригинала (11) и произвольные параметры $\left(q_0, q_1\right)$ функции отображения (12). Известно, что, придавая различные значения модулю параметра q_0 можно изменить масштаб треугольника корней функции-образа. Изменение аргумента q_0 – это повороты треугольника корней около своего центра тяжести. Изменение модуля параметра q_1 – это изменение расстояния до центра треугольника от центра системы отсчета. Аргумент q_1 – это аргумент центра треугольника корней (рис. 1)

Предпримем попытку представления функции-образа (13) в форме куба

$$
B_3(V) = V^3 - 3b_1V^2 + 3b_1^2V - b_3 = \left(V - b_1\right)^3 \tag{27}
$$

т.е. функции с трехкратным нулём (если удастся, то будет найдено решение уравнения третьей степени). Для этого необходимо, как видим (27), выполнение двух условий

$$\begin{aligned} b_1^2 &= b_2 \\ b_1^3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (28)$$

Функция отображения (12) содержит как раз два произвольных параметра. Однако, подстановка найденных коэффициентов (22, 25) в выражения (28) требуемой связи, вместо

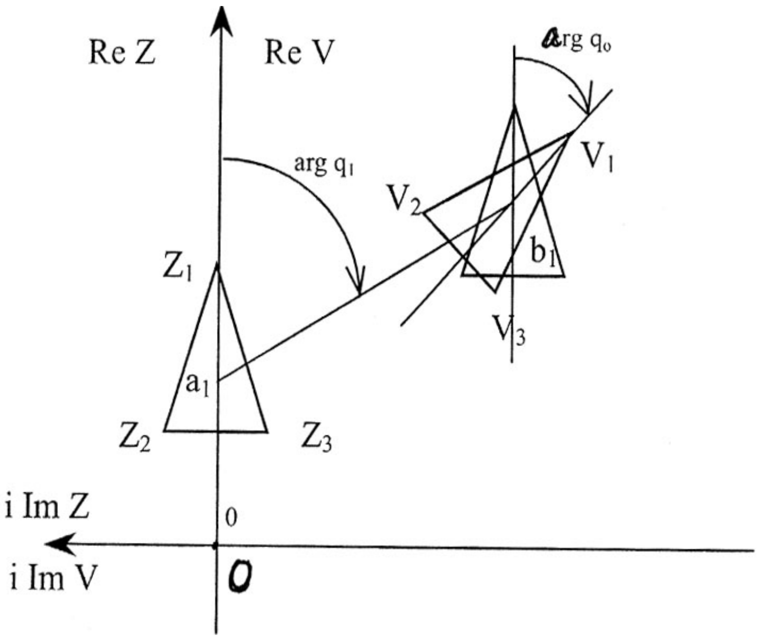

Рис. 1. *Линейное отображение*

(плоскости аргумента оригинала (Z) и образа (V) совмещены)

ожидаемой системы уравнений относительно параметров (q_0, q_1) отображения, формирует нам встречное требование

$$\begin{aligned} a_{02} &= -a_1^2 + a_2 = -b_1^2 + b_2 = const \\ a_{03} &= 2a_1^3 - 3a_1 a_2 + a_3 = 2b_1^3 - 3b_1 b_2 + b_3 = const \end{aligned} \tag{29}$$

– *независимое от параметров отображения постоянство значений некоторых одинаковых функций коэффициентов образа и оригинала, именуемых в связи с этим инвариантами линейного отображения*.

Выдвинутое условие (28), эквивалентное равенству нулю инвариантов уравнения-образа (13) нереализуемо ни в розницу, ни вместе. Если же инвариант, хотя бы один из двух, равен нулю у уравнения-оригинала, то он равен нулю и у образа любого линейного отображения. Линейным отображением невозможно видоизменить форму многоугольника уравнения-оригинала и соответственно его инварианты (мы не имеем в виду масштабного изменения), привести его к какой-то частной, разрешаемой форме. Однако, инварианты линейного отображения разрушаемы отображением функцией уже второго порядка.

Отметим, что инвариантами являются коэффициенты уравнения, если оно размещено в центральной системе координат, т.е. там, где первый коэффициент образующей функции равен нулю. Справедливо и обратное утверждение – если коэффициенты функции – инвариантны, то первый коэффициент равен нулю.

Чтобы показать справедливость прямого утверждения, разместим функцию-образ в центральной системе координат, приравняв первый её коэффициент (25) нулю

$$3b_1 = 3q_1 + q_0 m_1 = \tag{30}$$

Положим теперь $q_0 = 1$ и перейдем к биномиальным коэффициентам

$$\begin{aligned} &= 3q_1 + 3a_1 = 0 \\ &q_1 = -a_1 \end{aligned} \tag{31}$$

Подставляем найденное значение параметра отображения (q_1) в формулы (25, 22) определяющие второй и третий коэффициенты функции-образа

$$3b_2 = 3\left(-a_1^2 + a_2\right)$$
$$b_3 = 2a_1^3 - 3a_1a_2 + a_3 \tag{32}$$

Находим, что они действительно равны соответствующим инвариантам (29) линейного отображения

Приравняем второй и третий коэффициенты функции инвариантам

$$3b_2 = 3b_{02} = 3\left(-b_1^2 + b_2\right)$$
$$b_3 = b_{03} = 2b_1^3 - 3b_1b_2 + b_3 \tag{33}$$

находим, что справедливо и обратное утверждение, так как приведенные равенства имеют место только в случае, когда первый коэффициент (b_1) функции равен нулю.

Отметим ещё. У уравнения, инвариантов разных порядков по одному. У образующей функции их столько, сколько можно сделать разных сечений. Т.е. бесконечно много. Поэтому, говоря об инвариантах применительно к функциям, мы должны иметь в виду некоторое фиксированное сечение её линейчатой пространственной фигуры. Под таким фиксированным сечением, если не оговорено другого, понимается плоскость аргумента.

3.2. Отображение функциями второго порядка

В качестве функции-оригинала по-прежнему будем рассматривать целую рациональную функцию третьего порядка

$$A_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z^1 - m_{111} = Z^3 - 3a_1 Z^2 + 3a_2 Z^1 - a_3 \quad (34)$$

Отображение заданной (34) функции, а точнее отображение точек плоскости аргумента над которой задана функция-оригинал в точки плоскости аргумента, над которой будет размещаться функция-образ, осуществляется однозначной целой рациональной функцией второго порядка

$$Z_2 = q_0 Z^2 + q_1 Z^1 + q_2 Z^0 \quad (35)$$

так мы полагаем (по условию).

Полагаем, что образами корней функции-оригинала являются корни функции-образа (35)

$$\begin{aligned} Z_{21} &= q_0 Z_1^2 + q_1 Z_1^1 + q_2 Z_1^0 \\ Z_{22} &= q_0 Z_2^2 + q_1 Z_2^1 + q_2 Z_2^0 \\ Z_{23} &= q_0 Z_3^2 + q_1 Z_3^1 + q_2 Z_3^0 \end{aligned} \quad (36)$$

Тогда, функция-образ, воспроизведенная через своё решение, будет тоже целой рациональной функцией

$$\begin{aligned} A_3(Z_2) &= (Z_2 - Z_{21})(Z_2 - Z_{22})(Z_2 - Z_{23}) = \\ &= Z_2^3 - (Z_{21} + \ldots)_3^1 Z_2^2 + (Z_{21} Z_{22} + \ldots)_3^1 Z_2^1 - \\ &- (Z_{21} Z_{22} Z_{23} + \ldots)_1^1 = Z_2^3 - 3a_{21} Z_2^2 + 3a_{22} Z_2^1 - a_{23} \end{aligned} \quad (37)$$

Вычисляем третий коэффициент функции-образа, используя в его записи символику симметричных моментов

$$a_{23} = Z_{21} Z_{22} Z_{23} = \left[\left(q_0 Z_1^2 + q_1 Z_1^1 + q_2 Z_1^0\right) \times \ldots\right]_3 = \quad (38)$$

Формируем головной частный момент коэффициента из первых слагаемых сомножителей (38)

$$\begin{aligned}&= q_0 Z_1^2 + q_1 Z_2^2 + q_2 Z_3^2 + \ldots = \\ &= \left(q_{000} m_{222} + \ldots\right)_{10} =\end{aligned} \tag{39}$$

При этом, количество слагаемых результата вычисляем как количество, сочетаний с повторениями из общего числа индекс-мест около символа параметра или момента (три) по числу возможных значений для индекса (0, 1, 2 – три)

$$\frac{(3+3-1)!}{3!(3-1)!} = 10 \tag{40}$$

При переходе от сокращенной (39) к полной (41) записи третьего коэффициента каждое очередное слагаемое формируются списанием единицы из числа в обозначении момента (m) и занесением его в обозначение параметра отображения (q) (или наоборот) по закону формирования сочетаний с повторениями

$$\begin{aligned}&= q_{000} m_{222} + q_{001} m_{221} + q_{002} m_{220} + q_{011} m_{211} + q_{012} m_{210} + \\ &+ q_{022} m_{200} + q_{111} m_{111} + q_{112} m_{110} + q_{100} m_{122} + q_{222} m_{000} =\end{aligned} \tag{41}$$

Теперь, для получения окончательного результата, следует перейти от представления параметров отображения в форме произведения индексов к форме произведения параметров

$$\begin{aligned}&= q_0^3 m_{222} + q_0^2 q_1 m_{221} + q_0^2 q_2 m_{220} + q_0 q_1^2 m_{211} + q_0 q_1 q_2 m_{210} + \\ &+ q_0 q_2^2 m_{200} + q_1^3 m_{111} + q_1^2 q_2 m_{110} + q_1 q_2^2 m_{100} + q_2^3 m_{000} =\end{aligned} \tag{42}$$

Все встречающиеся по тексту моменты корней считаем величинами известными, так как выражения их через единичные могут быть вычислены, а единичные считаем заданными (известными) по определению.

Упрощаем, функцию третьего коэффициента (a_{23}) и представляем её в форме многочлена по убывающим степеням параметра (q_2) размерности переменной функции-образа

$$
\begin{aligned}
&= q_0^3 m_{222} + q_0^2 q_1 m_{221} + q_0^2 q_2 m_{220} + q_0 q_1^2 m_{221} + q_0 q_1 q_2 m_{21} + \\
&+ q_0 q_2^2 m_2 + q_1^3 m_{111} + q_1^2 q_2 m_{11} + q_1 q_2^2 m_1 + q_2^3 = \\
&= a_{23} = q_2^3 + q_2^2 \left(q_1 m_1 + q_0 m_2\right) + q_2 \left(q_1^2 m_{11} + q_0 q_1 m_{21} + q_0^2 m_{22}\right) + \\
&+ \left(q_1^3 m_{111} + q_0 q_1^2 m_{220} + q_0^2 q_1 m_{221} + q_0^3 m_{222}\right)
\end{aligned}
\qquad (45)
$$

С целью проверки правильности проведенных выкладок убедимся в постоянстве количества частных моментов в начале (38) и конце (45) вычислений

$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 1 + (3+3) + (3+6+3) + (1+3+3+1) = 27 \qquad (46)$$

Наконец, коэффициенты второго и первого порядков функции-образа (37) вычисляем как соответственно первая и вторая целые производные третьего коэффициента по параметру (q_2) размерности плоскости отображения (или размерности новой переменной Z_2)

$$
\begin{aligned}
3a_{22} &= 3q_2^2 + 2q_2 \left(q_1 m_1 + q_0 m_2\right) + \left(q_1^2 m_{11} + q_0 q_1 m_{21} + q_0^2 m_{22}\right) \\
3a_{21} &= 3q_2 + \left(q_1 m_1 + q_0 m_2\right)
\end{aligned}
\qquad (47)
$$

Сравнивая формулы коэффициентов функций-образов линейного (22, 25) и квадратичного (44, 47) отображений, можно заключить, что отображение функцией (35) второго порядка это наложение трёх отображений, рис. 2.

Первое движение отображения это стандартное отображение функцией $Z_2 = Z^2$, где $q_0 = 1$, $q_1 = 0$, $q_2 = 0$. Этим действием треугольник корней функции-оригинала деформируется, центр его тяжести (a_1) располагается в точке (m_2) плоскости нового аргумента.

Второе движение преобразования это пропорциональное отображение функцией $Z_2 = q_1 Z$. Этим действием треугольник-образ конформно видоизменяется и из точки m_2 передвигается в точку $(m_2 + q_1 m_1)$ плоскости отображения (Z_2).

Третьим движением, отображением треугольник корней функции-образа параллельно перемещается из второго положения в конечное – $-a_{21} = m_2 + q_1 m_1 + q_2$.

Порядок переходов может быть прочитан и по-другому. Сначала линейное отображение центра треугольника-оригинала из точки a_1 в точку b_1. Затем стандартное отображение в точку $(m_2 + q_1 m_1)$ на плоскости отображения (Z_2), а в заключение, линейное перемещение (q_2) по плоскости (Z_2) отображения в конечную точку (a_{21}).

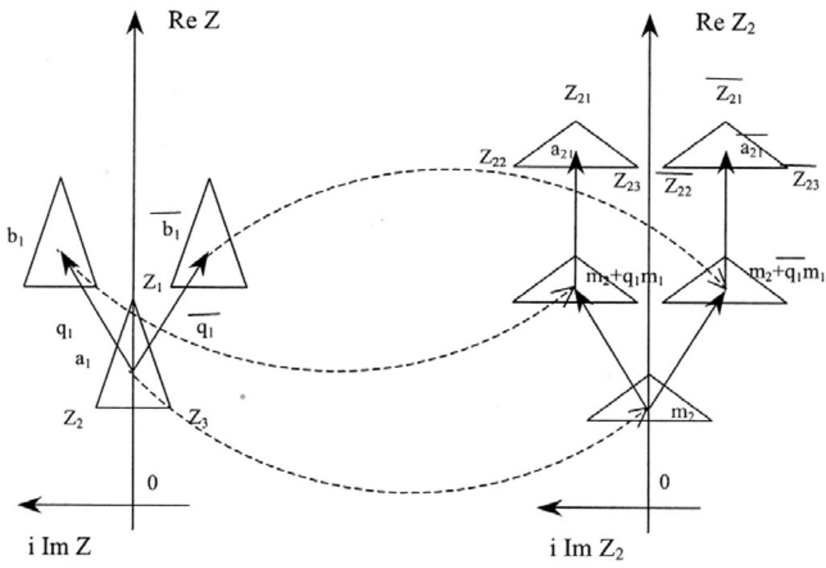

Рис. 2. *Отображение функций второго порядка*

В том, что последнее перемещение q_2 линейно, можно убедиться, построив инварианты линейного отображения функции-образа. Инварианты не должны зависеть от параметра q_2 линейного отображения. Действительно, инвариант второго порядка функции-образа равен

$$-a_{21}^2 + a_{22} = \tag{48}$$

а после подстановки значений коэффициентов, выраженных через параметры отображения (47), где одновременно принимаем $q_0 = 1$, находим подтверждение независимости инварианта от параметра (q_2) перемещения

$$= \frac{1}{9}\left[q_1^2\left(3m_{11} - m_1^2\right) + q_1\left(3m_{21} - 2m_1 m_2\right) + 3\left(m_{22} - m_2^2\right)\right] \tag{49}$$

Полученное выражение показывает, что существует два значения параметра отображения (q_1), при которых инварианту второго порядка функции-образа может быть придано любое значение, например нулевое. Управление инвариантами это управление конфигураций многоугольников корней функции и, следовательно, самой функцией.

Так нулевому значению инварианта второго порядка соответствует равносторонний треугольник корней функции. Нулевому значению инварианта третьего порядка соответствует треугольник – отрезок, лежащий на действительной или мнимой оси системы отчета, и т.д.

Пусть, например, требуется найти общее решение уравнения (или функции) третьей степени. Уравнение будем считать заданным в центральной системе координат

$$Z^3 + m_{011} Z - m_{0111} = 0 \tag{50}$$

на что указывает неканонический ноль в обозначении моментов.

Наметим для себя решение поставленной задачи через частную форму уравнения образа, у которого не только первый, но и второй коэффициенты равны нулю. То есть функция-образ должна удовлетворять двум новым условиям. Следовательно, функция отображения должна содержать два активных, произвольных параметра отображения. Например, рассмотренная функция второго порядка (35) с параметром $q_0 = 1$

Образы корней заданного уравнения (50) в этом случае будут определяться формулами (36)

$$\begin{aligned} Z_{21} &= Z_1^2 + q_1 Z_1 + q_2 \\ Z_{22} &= Z_2^2 + q_1 Z_2 + q_2 \\ Z_{23} &= Z_3^2 + q_1 Z_3 + q_2 \end{aligned} \tag{51}$$

Уравнение образ (37) должно иметь вид

$$Z_2^3 - a_{023} = 0 \tag{52}$$

и должны иметь место два наложенных нами условия на первый и второй коэффициенты (47) уравнения образа

$$\begin{aligned} 3a_{22} &= 3q_2^2 - 4q_2 m_{011} + q_1^2 m_{011} - 3q_1 m_{0111} + m_{011}^2 = 0 \\ 3a_{21} &= 3q_2 - 2m_{011} = 0 \end{aligned} \tag{53}$$

В последних двух уравнениях смешанные и кратные моменты заменены на центральные единичные.

Начинается решение с нахождения значений параметров отображения удовлетворяющих системе уравнений (53)

$$\begin{aligned} q_{11,2} &= \frac{3m_{0111}}{2m_{011}} \pm \sqrt{\frac{27m_{0111}^2 + 4m_{011}^3}{12m_{011}^2}} \\ q_2 &= \frac{2m_{011}}{3} \end{aligned} \tag{54}$$

Далее подстановкой найденных значений параметров отображения (54) определяется коэффициент третьего порядка (45) уравнения образа, в центральной системе координат.

$$a_{023} = \frac{D_3^2}{54\sqrt{3}m_{011}^3}\left(\sqrt{3}D_3 \pm 9m_{0111}\right)$$
$$D_3 = \sqrt{27m_{0111}^2 + 4m_{011}^3} \tag{55}$$

Следующим шагом вычисляются корни уравнения образа (52)

$$Z_{21,2,3} = \sqrt[3]{a_{023}} \tag{56}$$

и, наконец, корни заданного уравнения из уравнений (51), после подстановки значений найденных коэффициентов. В общем случае корни заданного уравнения находятся из системы – одно из уравнений (51) отображения корней и заданное уравнение (50).

Найденное решение сводится к известным формулам Кардано, что и должно произойти с любым «новым» решением, так как речь идет об одних и тех же корнях (точках плоскости) и одних и тех же коэффициентах одного и того же уравнения. Ничего «нового» не может и быть, или между коэффициентами задаваемого уравнения должна существовать априорная связь, что не возможно.

3.3. Отображение дробно-рациональными функциями

Рассмотренные примеры преобразований линейными и квадратичными функциями содержат достаточное количество информации для построения отображений полиномиальными функциями более высоких порядков. С повышением порядка усложняется только техника, принцип построений остаётся неизменным. Переходим поэтому к рассмотрению отображения новой функцией.

Отображение дробно-рациональными функциями рассмотрим на примере тоже простейшей из своего класса

$$æ = \frac{p_1}{Z + q_1} = \frac{p_1}{q_0 Z + q_1 Z^0} \qquad (60)$$

функции нулевой размерности. Здесь параметры отображения (p_1 и q_1) имеют размерность переменной (Z) функции-оригинала (11).

Параметр q_0 – безразмерен и вместе с нулевой степенью переменного $\left(Z^0 = 1\right)$, выполняет симметрирующую роль для функции отображения. Многочлены числителя и знаменателя отображающей функции (60) могут быть более высокого порядков, а сама дробно-рациональная функция может иметь как положительный, так и отрицательный порядок величины. Однако принцип построения коэффициентов функции-образа остается общим и неизменным.

Строим образы корней функции-образа на основании выбранной функции отображения (60) в зависимости от корней функции-оригинала (11)

$$\begin{aligned} æ_1 &= \frac{p_1}{q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0} \\ æ_2 &= \frac{p_1}{q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0} \\ æ_3 &= \frac{p_1}{q_0 Z_3 + q_1 Z_3^0} \end{aligned} \qquad (61)$$

Исходя из принятого для функции-образа количества корней (61), записываем ее формулу в общем виде

$$\begin{aligned} &\varphi_3(æ) = æ^3 - 3\alpha_1 æ^2 + 3\alpha_2 æ - \alpha_3 = \\ &= æ^3 - \mu_1 æ^2 + \mu_{11} æ + \mu_{111} \end{aligned} \qquad (62)$$

Выражаем первый коэффициент функции-образа через свои корни (61) и, далее, через корни и моменты функции-оригинала (34)

$$
\begin{aligned}
3\alpha_1 &= (\text{æ}_1 + \ldots)_3^1 = \left(\frac{p_1}{q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0} + \ldots \right)_3^1 = \\
&= p_1 \frac{\left[\left(q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0\right)\left(q_0 Z_2 + q_1 Z_2^0\right) + \ldots \right]_3^1}{\left[\left(q_0 Z_1 + q_1 Z_1^0\right) \ldots \right]_3} = \\
&= p_1 \frac{(q_{00} m_{11} + \ldots)_3}{(q_{000} m_{111} + \ldots)_4} = p_1 \frac{A_3'(q_1)}{A_3(q_1)}
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Аналогично, для второго и третьего коэффициентов функции-образа (62) можно получить выражения

$$
\begin{aligned}
3\alpha_2 &= p_1 \frac{(q_0 m_1 + \ldots)_2}{(q_{000} m_{111} + \ldots)_4} = p_1^2 \frac{A_3''(q_1)}{A_3(q_1)} \\
\alpha_3 &= p_1^3 \frac{1}{(q_{000} m_{111} + \ldots)_4} = p_1^3 \frac{A_3'''(q_1)}{A_3(q_1)}
\end{aligned}
\tag{64}
$$

Знаменатели выражений коэффициентов (63,64) как видим, представляют собой значение функции-оригинала в точке определяемой параметром q_1 отображения. Числители коэффициентов – значения соответствующих производных функции-оригинала в той же точке, (q_1).

Применим отображение дробно-рациональной функцией для построения графо-аналитического решения уравнения третьей степени. Уравнение (функцию) будем считать заданным в центральной системе координат $(m_1 = 0)$

$$
Z^3 + m_{011} Z - m_{0111} = 0 \tag{65}
$$

Графо-аналитическое решение уравнений предполагает безразмерную, форму уравнения-образа, т.е. ту самую, которая была только что рассмотрена (62). Решение также предполагает, что все, кроме одного, выполняющего роль параметра, коэффициенты около переменного должны быть постоянными числами, например

$$æ^3 + æ^2 + \mu_{111} = 0 \tag{66}$$

Принятая частная форма уравнения-образа (66) отличается от общей (62) тем, что в последней положен первый коэффициент (63) равным минус единице ($\mu = -1$), а второй (64) – нулю ($\mu = 0$).

$$\begin{aligned} \mu_1 &= p_1 \frac{A_3'(q_1)}{A_3(q_1)} = -1 \\ \mu_{11} &= p_1^2 \frac{A_3''(q_1)}{A_3(q_1)} = 0 \end{aligned} \tag{67}$$

Раскрывая уравнения полученной системы (67), и имея в виду $q_0 = 0$, $m_1 = 0$, найдем значения параметров отображения

$$\begin{aligned} q_1 &= 0 \\ p_1 &= -\frac{m_{0111}}{m_{011}} \end{aligned} \tag{68}$$

а через них и третий коэффициент (64) уравнения образа (62),

$$\mu_{111} = \frac{m_{0111}^2}{m_{011}^3} \tag{69}$$

который, в нашем случае, играет роль параметра искомого решения.

Уравнение-образ в задуманной форме (66) получает, в соответствии с равенствами 67,69, вид

$$æ^3 + æ^2 + \frac{m_{0111}^2}{2} = 0 \tag{70}$$

Теперь, графически или по заранее подготовленным таблицам, определяются корни $æ_1, æ_2, æ_3$ уравнения-образа

(70), а затем и корни заданного уравнения (65) через функцию отображения (60, 61)

$$Z_{1,2,3} = \frac{m_{0111}}{æ_{1,2,3} m_{0111}} \tag{71}$$

В общем случае, когда дробно-рациональная функция отображения неразрешима относительно переменной функции-оригинала, корни заданного уравнения вычисляются из системы уравнений – заданного и функции отображения.

3.4. Отображение стандартными функциями

Стандартными называются наиболее простые из нелинейных – степенные функции отображения

Эти функции нашли достаточно интенсивное применение при решении уравнений.

Отображение стандартными функциями также называется стандартным.

Рассмотрим стандартное отображение на примере все той же функции-оригинала третьего порядка

$$A_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111} \tag{72}$$

В качестве отображающей функции выберем стандартную функцию тоже третьего порядка

$$Z_3 = Z^3 \tag{73}$$

Функцией отображения (73), как мы полагаем, корни оригинала преобразовываются в корни образа

$$\begin{aligned} Z_{31} &= Z_1^3 \\ Z_{32} &= Z_2^3 \\ Z_{33} &= Z_3^3 \end{aligned} \tag{74}$$

Коэффициенты функции-образа

$$A_3(Z_3) = Z_3^3 - 3a_{31}Z_3^2 + 3a_{32}Z_3 - a_{33} \qquad (75)$$

в соответствии с формулами Виета и функцией отображения (74) могут быть представлены в моментах

$$\begin{aligned} 3a_{31} &= (Z_{31} + \ldots)_3^1 = (Z_1^3 + \ldots)_3^1 = m_3 \\ 3a_{32} &= (Z_{31}Z_{32} + \ldots)_3^1 = (Z_1^3 Z_2^3 + \ldots)_3^1 = m_{33} \\ a_{33} &= (Z_{31}Z_{32}Z_{33} + \ldots)_1^1 = (Z_1^3 Z_2^3 Z_3^3 + \ldots)_1^1 = m_{333} \end{aligned} \qquad (76)$$

Функция-образ, таким образом тоже может быть записана в моментах

$$A_3(Z_3) = Z_3^3 - m_3 Z_3^3 + m_{33} Z_3' - m_{333} \qquad (77)$$

<u>Моменты функции-образа полученной стандартным отображением тоже называются стандартными.</u>

Они достаточно просто, как и прочие сложные моменты, вычисляются через единичные, заданные и поэтому в процессе дальнейших выкладок принимаются тоже известными.

Функции стандартного отображения не содержат свободных параметров отображения. Эффект отображения стандартными функциями достигается за счет выбора порядка величины функции, которую в общем случае можно рассматривать как независимое переменное или параметр (υ). Функция отображения, при этом принимает, обобщенный вид

$$Z_\upsilon = Z^\upsilon \qquad (78)$$

а функция-образ обобщенную форму

$$A_3(Z_\upsilon) = Z_\upsilon^3 - m_\upsilon Z_\upsilon^2 + m_{\upsilon\upsilon} Z_\upsilon^1 - m_{\upsilon\upsilon\upsilon} \qquad (79)$$

Оказывается, что в такой форме всегда может быть выбрано значение параметра (υ), при котором, с любой наперед заданной точностью, уравнение-образ может быть разделено на элементарные подуравнения (первой и второй степеней) [2, 6]. Значение этого свойства стандартного отображения в том, что оно впервые позволило построить хоть и приближенные, но общие решения алгебраических уравнений. Свойство «вынесения» из зоны обзора всего «прочего» позволяет производить более детальный анализ функций в области точек их корней и рабочих точек физических процессов. Поведение функций рассматривается, как бы в увеличенном масштабе.

Функция-образ, размещенная над плоскостью аргумента функции-оригинала, позволяет сделать наглядное представление о многозначной фигуре образа стандартного отображения. *Эту фигуру будем называть симметрированным оригиналом*.

Для построения симметрированного оригинала сделаем подстановку отображающей функции (78) в функцию-образ (79)

$$A_3\left(Z^{\upsilon}\right) = Z^{3\upsilon} - m_{\upsilon} Z^{2\upsilon} + m_{\upsilon\upsilon} Z^{\upsilon} - m_{\upsilon\upsilon\upsilon} = \qquad (80)$$

Функция-образ, таким образом, оказалась в пространстве под плоскостью функции-оригинала. У построенной функции (80) отсутствует (равен нулю) первый коэффициент (при степени $3\upsilon - 1$ переменного). Значит фигура функции (80) расположена в центральной системе координат, а ее коэффициенты-инварианты линейного отображения [7].

Фигура построенной функции (80) центрально симметрична. Действительно, если ее разрешить относительно υ - тых степеней переменного

$$= \left(Z^{\upsilon} - Z_{11}Z_{12}Z_{13}...Z_{1\upsilon}\right)\left(Z^{\upsilon} - Z_{21}Z_{22}Z_{23}...Z_{2\upsilon}\right)\left(Z^{\upsilon} - Z_{31}Z_{32}Z_{33}...Z_{3\upsilon}\right) \qquad (81)$$

то υ - корней каждого из сомножителей решения (81) в соответствии с утверждением Муавра размещаются в вершинах центрального, равностороннего многоугольника.

Таким образом, если фигура уравнения-оригинала треугольник (73), то фигура симметрированного оригинала (80) – υ равномерно распределенных по окружности треугольников. Или, как будем говорить, оригинал симметрированный по υ-той степени.

Пусть, например, задан треугольник корней

$$\begin{aligned} Z_1 &= 4 \\ Z_{2,3} &= 1 \pm i \end{aligned} \tag{82}$$

описываемый нулевым сечением функции-оригинала

$$A_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z - m_{111} = Z^3 - 6Z^2 + 10Z - 8 = 0 \tag{83}$$

Преобразовываем фунцию-оригинал стандартной функцией отображения четвертого порядка

$$Z_4 = Z^4 \tag{84}$$

вычисляем корни функции-образа

$$\begin{aligned} Z_{41} &= Z_1^4 = 256 \\ Z_{42,3} &= Z_{2,3}^4 = -4,\ 4 \end{aligned} \tag{85}$$

и ее моменты

$$\begin{aligned} m_4 &= (Z_{41} + \ldots)_3^1 = (Z_1^4 + \ldots)_3^1 = 248 \\ m_{44} &= (Z_{41} Z_{42} + \ldots)_3^1 = (Z_1^4 Z_2^4 + \ldots)_3^1 = -2032 \\ m_{444} &= (Z_{41} Z_{42} Z_{43} + \ldots)_1^1 = (Z_1^4 Z_2^4 Z_3^4 + \ldots)_1^1 = 4096 \end{aligned} \tag{86}$$

Получившаяся функция-образ имеет вид

$$\begin{aligned} A_3(Z_4) &= Z_4^3 - m_4 Z_4^2 + m_{44} Z_4 - m_{444} = \\ &= Z_4^3 - 248 Z_4^2 + (-2032) Z_4 - 4096 \end{aligned} \tag{87}$$

а симметрированный по четвертой степени оригинал получим заменив переменное образа на переменное заданной функции (83)

$$A_3\left(Z^4\right)=Z^{3\cdot4}-248Z^{2\cdot4}+\left(-2032\right)Z^{1\cdot4}-4096 \qquad (88)$$

На рисунке 3 представлен график корней функции рассматриваемого примера. Точками Z_1, Z_2, Z_3 обозначен треугольник корней заданной функции (83).

Точками 1,2,3; 4,5,6; 7,8,9; 10,11,12 обозначены вершины треугольников симметрированного оригинала (87). Причем, для наглядности, кратные корни (85) функции-образа несколько раздвинуты (2,3; 5,6; 9; 11,12).

Подстановкой легко проверить, что четыре треугольника корней оригинала центрально симметричны. Т.е. корнями симметрированного оригинала являются числа 4, -4, 4i, -4i;... и т.д. Но тогда вместо исследования уравнения симметрированного оригинала достаточно рассматривать один из его многоугольников. В частности, в нашем случае, достаточно анализировать корни только главного (с точками корней 1,2,3) треугольника. Этот треугольник описывается функцией симметрированного оригинала (88), в степенях переменного которой опускается общий множитель $(\upsilon=4)$

$$A_3\left(Z\right)=Z^3-248Z^2-2032Z-4096 \qquad (89)$$

определяющий порядок функции отображения (84).

В результате построений получена однозначная (несимметрированная) функция-оригинал (89). Функция (89) расположена над плоскостью аргумента функции-оригинала и является ключевой в процессе синтезирования математических моделей. Формально, симметрированный оригинал представляет функцию-образ (87), у которой опущен подстрочный индекс $(\nu=4)$ определяющий порядок функции отображения (84). Однако, рассматривать эту операцию следует не как обратную отображению замену переменного, т.е. не как отображение, а как замену, *смену, всего лишь, символа переменного. Операцию, не влекущую за собой перерасчёт коэффициентов функции.*

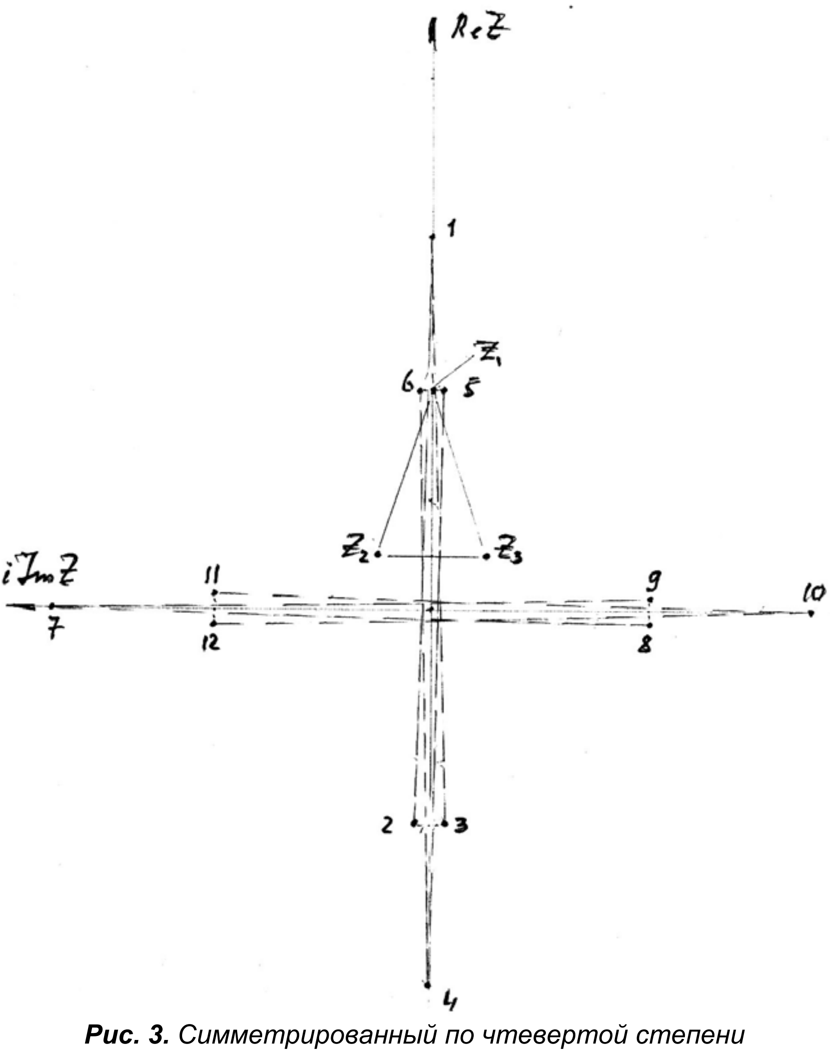

Рис. 3. *Симметрированный по чтевертой степени*

оригинал (треугольник корней)

3.5. Отображения многомерными функциями

По существу речь пойдет о стандартном отображении некоторой искусственно созданной функции-резольвенты и определении её через известный образ.

Итак, считаем заданной функцию третьего порядка

$$A_3(Z) = Z^3 - m_1 Z^2 + m_{11} Z^1 - m_{111} \tag{92}$$

Составим две линейные, симметричные по индексу, формы из корней заданной функции

$$\begin{aligned} V_1 &= \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3 \\ V_2 &= \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 \end{aligned} \tag{93}$$

и будем их считать корнями (ведь точки V_1 и V_2 лежат в плоскости аргумента) некоторой новой функции второго порядка, функции-резольвенты для заданной функции (92)

$$A_2(V) = V^2 - d_1 V + d_{11} \tag{94}$$

Перспектива в том, что когда будут найдены значения чисел α, β и корней V_1, V_2 резольвенты, то, добавив к уравнениям (93) образов корней первый коэффициент заданной функции (92), получим линейную систему однозначно определяющую корни заданного уравнения (92)

$$\begin{aligned} &\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \alpha_3 Z_3 = V_1 \\ &\beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_2 + \beta_3 Z_3 = V_2 \\ &Z_1 + Z_2 + Z_3 = m_1 \end{aligned} \tag{95}$$

Для составления уравнений определяющих числовые коэффициенты (α, β) и корни (V_1, V_2) введём стандартное отображение резольвенты (94) степенной функцией третьего порядка

$$V_3 = V^3 \tag{96}$$

(При отображении функцией второго порядка, результата не было найдено). Функция-образ резольвенты (94) в общем случае будет иметь вид

$$A_3(V_3) = V_3^2 - 2g_{31}V_3 + g_{32} \tag{97}$$

Введя временное обозначение для слагаемых корней (93) резольвенты

$$\begin{aligned} \alpha Z &= k \\ \beta Z &= r \end{aligned} \tag{98}$$

произведём вычисление коэффициентов функции-образа (97). С учётом предыдущего (93, 96,98) имеем для первого коэффициента

$$\begin{aligned} 2g_{31} &= (k_1 + k_2 + k_3)^3 + (r_1 + r_2 + r_3)^3 = \\ &= \left(k_1^3 + \ldots\right)_3^1 + 3\left(k_1^2 k_2^1 + \ldots\right)_3^2 + 6k_1k_2k_3 + \\ &+ \left(r_1^3 + \ldots\right)_3^1 + 3\left(r_1^2 r_2^1 + \ldots\right)_3^2 + 6r_1r_2r_3 = \\ &= \left[\left(\alpha_1^3 + \beta_1^3\right)Z_1^3 + \ldots\right]_3^1 + 3\left[\left(\alpha_1^2\alpha_2 + \beta_1^2\beta_2^1\right)Z_1^2Z_2^1 + \ldots\right]_3^2 + \\ &+ 6\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \beta_1\beta_2\beta_3\right)Z_1Z_2Z_3 = \end{aligned} \tag{99}$$

Видно, что первый коэффициент может быть представлен суммой трёх симметричных моментов. Для этого числовые множители около частных слагаемых каждого симметричного момента должны быть между собой равны, с тем, чтобы в последствии их можно было вынести за скобку суммирования сокращённой записи.

Накладывая на произвольные параметры α, β отображения сформулированное условие, получаем

$$\begin{aligned} &= \gamma_{31}\left(Z_1^3 + \ldots\right)_3^1 + 3\gamma_{32}\left(Z_1^2 Z_2^1 + \ldots\right)_3^2 + 6\gamma_{33} Z_1 Z_2 Z_3 = \\ &= \gamma_{31} m_3 + 3\gamma_{32} m_{21} + 6\gamma_{33} m_{111} \end{aligned} \tag{100}$$

где вынесенные числовые множители равны

$$\begin{aligned} &\gamma_{31} = \alpha_1^3 + \beta_1^3 = \alpha_2^3 + \beta_2^3 = \alpha_3^3 + \beta_3^3 = \left[\left(\alpha_1^3 + \beta_1^3\right) = \ldots\right]_3^1 \\ &\gamma_{32} = \left[\left(\alpha_1^2 \alpha_2^1 + \beta_1^2 \beta_2^1\right) = \ldots\right]_3^2 \\ &\gamma_{33} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \beta_1 \beta_2 \beta_3 \end{aligned} \tag{101}$$

Переходим к вычислению второго коэффициента образа резольвенты

$$\begin{aligned} &2g_{32} = \left(k_1 + k_2 + k_3\right)^3 \left(r_1 + r_2 + r_3\right)^3 = \\ &= \left[\left(k_1 r_1 + \ldots\right)_3^1 + \left(k_1 r_2 + \ldots\right)_3^2\right]^3 = \end{aligned} \tag{102}$$

Здесь по верхнему, внутреннему заскобочному индексу комбинации перестановки составляются из нижних индексов частных моментов.

$$\begin{aligned} &= \left[\left(\alpha_1 \beta_1 z_1^2 + \ldots\right)_3^1 + \left(\alpha_1 \beta_2 z_1 z_2 + \ldots\right)_3^2\right]^3 = \\ &= \left[\gamma_{21}\left(z_1^2 + \ldots\right)_3^1 + \gamma_{22}\left(z_1 z_2 + \ldots\right)_3^1\right]^3 = \\ &= \left(\gamma_{21} m_2 + \gamma_{22} m_{11}\right)^3 \end{aligned} \tag{103}$$

где числовые коэффициенты около моментов равны

$$\begin{aligned} &\gamma_{21} = \left(\alpha_1 \beta_1 + \ldots\right)_3 \\ &\gamma_{22} = \left[\left(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1\right) + \ldots\right]_3 \end{aligned} \tag{104}$$

Условия (101, 104), которым должны удовлетворять параметры (α, β) отображения, симметричны относительно букв и индексов, что позволяет предположить и принять их равными корням одного и того же уравнения, степени наибольшей из встречающихся у параметров (α, β), т.е. третьей

$$\alpha^3 - \mu_1\alpha^2 + \mu_{11}\alpha - \mu_{111} = 0 \qquad (105)$$

Из уравнений (101, 104) могут быть найдены первый и третий моменты уравнения параметров (105)

$$\begin{aligned}
&\mu_1^2 = 3\gamma_{21} + 3\gamma_{22} = (\alpha_1 + ...)_3^1 \cdot (\beta_1 + ...)_3^1 = \left[(\alpha_1 + ...)_3^1\right]^2 \\
&\mu_1^3 = \frac{3\gamma_{31}}{2} + \frac{18\gamma_{22}}{2} + 3\gamma_{33} = \left[(\alpha_1 + ...)_3^1\right]^2 \qquad (106) \\
&\mu_{111} = \frac{\gamma_{33}}{2} = \alpha_1\alpha_2\alpha_3
\end{aligned}$$

Из тех же уравнений (101, 104) могут быть найдены первый (μ_3) и третий (μ_{333}) моменты стандартного отображения уравнений параметров (105) на плоскость третьего порядка

$$\begin{aligned}
&\mu_3 = \frac{3\gamma_{31}}{2} = (\alpha_1 + ...)_3^1 \\
&\mu_{333} = \mu_{111}^3 = \left(\frac{\gamma_{33}}{2}\right)^3
\end{aligned} \qquad (107)$$

Условиями (101, 104) введено пять параметров (γ), связанных между собой пока ещё только одной связью (106.1, 106.2). Наложим на параметры (γ) ещё два условия, которые позволяют разрешить уравнение образа параметров

$$\alpha^3 - \mu_3\alpha_3^2 + \mu_{33}\alpha_3 - \mu_{333} = 0 \qquad (108)$$

а именно, положим

$$\begin{aligned} \mu_3^2 &= 3\mu_{33} \\ \mu_3^3 &= 27\mu_{333} \end{aligned} \qquad (109)$$

и тогда с учётом предыдущего (107.1, 108, 109)

$$\alpha_3 = \frac{\gamma_{31}}{2} \qquad (110)$$

Раскрывая связь, наложенную на моменты (109) образа через единичные моменты, с учётом полученных выражений (106) для первого и третьего моментов оригинала можно найти

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 0 \\ \mu_{11} &= 0 \\ \mu_{111} &= \frac{\gamma_{33}}{2} \end{aligned} \qquad (111)$$

Параметр (α) отображения вычисляем как корни уравнения (105, 111)

$$\alpha_{1,2,3} = \sqrt[3]{\frac{\gamma_{33}}{2}} \left(1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{-i\frac{2\pi}{3}} \right) \qquad (112)$$

Параметр (β) отображения вычисляется по параметру (α) через формулу связи (104.1)

$$\beta_{1,2,3} = \frac{\gamma_{21}}{\alpha_{1,2,3}} \qquad (113)$$

Промежуточные параметры (γ) определяются условиями их введения (101, 104)

$$\begin{aligned} \gamma_{31} &= 2, \\ \gamma_{32} &= -1 \\ \gamma_{22} &= -1 \\ \gamma_{33} &= 2 \\ \gamma_{21} &= 1 \end{aligned} \qquad (114)$$

Коэффициенты функции-образа резольвенты вычисляются формулами их определения (100, 103)

$$\begin{aligned} 2g_{31} &= 2m_3 - 3m_{21} + 12m_{111} \\ g_{32} &= \left(m_2 - m_{11}\right)^3 \end{aligned} \qquad (115)$$

Итак, образ резольвенты на плоскости третьего порядка имеет вид

$$A_2\left(V_3\right) = V_3^2 - \left(2m_3 - 3m_2 1 + 12m_{111}\right)V_3 + \left(m_2 - m_{11}\right)^3 \qquad (116)$$

Сама функция резольвенты (94) нас не интересует. Нужны корни (V_1 и V_2) резольвенты, через которые система уравнений (95) однозначно определит искомые корни заданной функции (92). Корни же функции резольвенты в соответствии с функцией отображения (96), вычисляются как корни третьей степени из корней функции-образа (97, 116).

Здесь не приводятся числовые примеры, так как таковые легко составить и проверить корректность проведённых выкладок. Во-вторых, если выкладки закончить конечной формулой, то получится некоторое подобие решений Кардано, другого быть не может. Но, такое общее решение неприемлемо для практики, потому что сложно. Естественно, ещё более сложно решение уравнения четвертой степени и принципиально не решаемо в общей форме уравнение более высокой степени.

Точные, общие формулы приемлемы для численного решения уравнений. Однако и здесь они уступают методам вычислительной математики, особенно при вычислении корней уравнений более высоких степеней.

Недостатком численных решений уравнений является то, что они способны всего лишь констатировать факты, например, наличия или отсутствия какого либо свойства у исследуемого объекта. Например, констатировать устойчивость или неустойчивость, надёжность, ресурс и т.д. Общее решение указывает пути изменения той же устойчивости, экономичности, надёжности и т.д. В связи, с чем поиск общего решения всегда был и остаётся актуальной задачей математики.

Решение проблемы построения общей конечной формулы для корней уравнений высоких степеней, хотя и приближенное, но аналитически несложное и с любой наперед заданной, оцениваемой, точностью, предложено на основе применения изложенных начал отображений [2]. Этими же решениями (формулами) осуществляется и численное решение уравнений. Численные решения используются, в частности, для оценки точности приближений соответствующих общих решений. В более широком плане, отображение позволяет систематизировано подойти к проблеме построения вычислительных алгоритмов.

Отображение позволяет поставить и решать качественно новые задачи практики, например, аналитически произвести необходимую корректировку заданной математической модели. В частности, разместить входной параметр описываемого функцией процесса или устройства в требуемом интервале изменений; разместить выходной параметр (рабочую точку) модели на требуемом участке кривой рабочей функции. Вычислить коэффициенты синтезируемой функции и построить её. Численно определить номиналы физических элементов синтезированной модели [5].

Через анализ и последовательный синтез математических моделей отображение позволяет решать научные задачи по исследованию новых явлений, и т. д.

В решении поставленных задач следует усматривать основное прикладное назначение теории отображений.

Литература

1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. «Справочник по математике», Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980 г.

2. Корчагин И.Ф. Решение алгебраических уравнений высоких степеней. 2002. Интернет, http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html

3. Корчагин И.Ф. Отображение алгебраических функций. 2003. Интернет, http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html

4. Корчагин И.Ф. Симметричные алгебраические моменты. 2003. Интернет, http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html

5. Корчагин И.Ф. Анализ и синтез математических моделей физических устройств и процессов. 2004. Интернет, http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html

6. Корчагин И.Ф. Общее предельное решение алгебраических уравнений. 2005. Интернет, http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html

7. Корчагин И.Ф. Алгебраические уравнения — М.: Физматкнига, 2006.

8. Корчагин И.Ф. Аналитический синтез и анализ математических моделей. — М.: Физматкнига, 2006.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

Научное издание

КОРЧАГИН Игорь Федорович

ТЕОРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Подписано в печать 08.02.2006. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,9. Уч.-изд. л. 6,0
Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство «Физматкнига»
141700, г. Долгопрудный Московской области, Институтский пер., 6*б*
Тел. (095) 408-76-81, (095) 409-93-28

Отпечатано в ГУП Типография «Наука» АИЦ РАН
1210099, Москва, Шубинский пер., 6