УКД В 511.5 **к.т.н. Корчагин И.Ф.**

Симметричные алгебраические моменты

(Вторая исправленная редакция)

Аннотация.

Симметричные моменты – это всевозможные физические моменты точек плоскости, выраженные через коэффициенты уравнения, корнями которого эти точки являются. Одновременно, симметричный момент – это математический аппарат, позволяющий производить громоздкие вычисления.

1.1 Назначение и аналоги.

Симметричные моменты могут найти применение в физике, механике, статистике и т.д. Основной же потребитель моментов есть и останется математика, в т. ч. теория чисел, теория вероятностей, анализ и т. д.

Симметричный момент – это результат обоснованного правилами комбинаторики раскрытия матриц. Одновременно, симметричный момент – это аппарат, позволяющий, удерживая под контролем ситуацию, производить операции с выражениями, содержащими десятки, сотни и тысячи слагаемых.

Симметричные моменты – это коэффициенты полиномиальных функций, алгебраических уравнений и образов их отображений алгебраическими функциями. Только аппарат алгебраических моментов позволил вычислить, т.е. представить в форме функций коэффициентов оригиналов, коэффициенты образов, и таким образом осуществить само отображение.

Симметричные моменты – это матрицы и определители, раскрытые неинверсионно (знакопостоянные суммы). Раскрытые инверсионно определители и матрицы – это другой класс моментов, называемых несимметричными. Расширение области применения лаконичных правил аппарата симметричных моментов приводит к появлению ещё одной – квазисимметричной – разновидности моментов.

Итак, для прикладных наук симметричные моменты – это физические моменты ожидания, дисперсии и т.д. (Отсюда слово “моменты” перешло в название). Для математики симметричные моменты – это действенный аппарат и коэффициенты полиномиальных функций.

1.2 Определения.

Пусть нам задано четыре точки z_1, z_2, z_3 и z_4 на плоскости комплексного переменного. Аналитически, эти точки записываются уравнением четвертой степени

$$z^4 - n_1 z^3 + n_{11} z^2 - n_{111} z + n_{1111} = 0 \qquad (1)$$

где заданные точки теперь являются корнями уравнения (1).

Коэффициенты уравнения (1), в соответствии с формулами Виета, представляют собой функции корней:

$$\begin{aligned} n_1 &= z_1 + z_2 + z_3 + z_4 \\ n_{11} &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 \\ n_{111} &= z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4 \\ n_{1111} &= z_1 z_2 z_3 z_4 \end{aligned} \qquad (2)$$

Структурно приведенные функции (2) будем рассматривать как суммы сочетаний из общего количества корней по числу, соответствующему порядку коэффициента, как результат раскрытия матриц по правилу сочетаний и без инверсий:

$$n_1 = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$$

$$n_{11} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4$$

$$n_{111} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4$$

$$n_{1111} = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = z_1 z_2 z_3 z_4 \qquad (3)$$

Правила раскрытия матриц, т.е. представления их в строчной записи, по сочетаниям иллюстрируются приведённым примером (3).При этом число сомножителей в каждом слагаемом постоянно и равно числу столбцов матрицы. Слагаемые строчной записи матрицы называются частными моментами. Частный момент, индексы сомножителей которого расположены в порядке следования цифр натурального ряда, начиная с единицы , называется головным частным моментом матрицы. Отрезок прямой , на котором расположены элементы головного частного момента, называется главной диагональю матрицы.

Подряд выписанные индексы головного момента образуют число в $\nu-$ ичной системе исчисления , где ν-число строк матрицы. Число соответствующее каждому последующему частному моменту получается прибавлением единицы к предыдущему. Однако, числа выбираются только такие, в которых цифры разрядов (слева направо, от старшего к младшему) могут следовать только в возрастающем порядке.

Требование строгости выполнения правил раскрытия матриц непринципиально и имеет целью достижение единообразия и технологичности последующих операций.

Количество сочетаний из ν элементов по α определяется формулой [1]

$$\frac{\nu!}{\alpha!(\nu-\alpha)!}.$$

Математически, функции коэффициентов (2) представляют собой однородные алгебраические функции многих переменных. Физически, их можно рассматривать как моменты точек корней. Причем моменты, не зависящие от циклической перестановки индексов корней, симметричные моменты.

Раскрытая, полная форма записи моментов, представленная формулами (2) Виета, громоздка и непригодна в общем случае для оперирования. Например, для перемножения моментов (2) первого (n_1), второго (n_{11}) и третьего (n_{111}) порядков друг на друга. В связи с чем вводится сокращенная, компактная, операционная форма

$$n_1 = z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = (z_1 + \ldots)_4$$

$$n_{11} = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_1 z_4 + z_2 z_3 + z_2 z_4 + z_3 z_4 = (z_1 z_2 + \ldots)_6$$

$$n_{111} = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + z_1 z_3 z_4 + z_2 z_3 z_4 = (z_1 z_2 z_3 + \ldots)_4$$

$$n_{1111} = z_1 z_2 z_3 z_4 = (z_1 z_2 z_3 z_4 + \ldots)_1 \qquad (4)$$

где подстрочный заскобочный индекс означает количество слагаемых сочетаний в полной записи (2) момента.

Результатом проведения операций над моментами может оказаться и более сложная форма, обусловленная появлением показателей степеней у корней уравнения. Например, симметричный момент вида

$$\begin{aligned} n_{311} &= z_1^3 z_2^1 z_3^1 + z_1^1 z_2^3 z_3^1 + z_1^1 z_2^1 z_3^3 + \\ &\quad + z_1^3 z_2^1 z_4^1 + z_1^1 z_2^3 z_4^1 + z_1^1 z_2^1 z_4^3 + \\ &\quad + z_1^3 z_3^1 z_4^1 + z_1^1 z_3^3 z_4^1 + z_1^1 z_3^1 z_4^3 + \\ &\quad + z_2^3 z_3^1 z_4^1 + z_2^1 z_3^3 z_4^1 + z_2^1 z_3^1 z_4^3 = \\ &\quad = (z_1^3 z_2^1 z_3^1 + \ldots)_4^3 \end{aligned} \tag{5}$$

представленный в своем обозначении, полной записи и сокращенной записи.

Обозначение симметричного момента – это буква с подстрочными цифровыми индексами. Индексы – это степени корней, входящих в первое головное слагаемое полной записи момента. Пишутся индексы в строго убывающем порядке (слева направо), исходя из соображений унификации и технологичности последующих операций. Количество слагаемых симметричного момента зависит от количества корней или степени уравнения. Поэтому каждому уравнению определенной степени соответствует свое множество моментов. Соответственно каждое из этих множеств обозначается своей постоянной буквой. Моменты уравнения второй степени – буквой d, третьей – m, четвертой – n, пятой – p. Далее – произвольной. Это тоже унифицирующая условность.

Количество подстрочных индексов в обозначении симметричного момента указывает на количество корней сомножителей в каждом слагаемом его полной записи.

Сумма подстрочных индексов указывает на порядок величины симметричного момента.

Слагаемые полной записи симметричного момента называются частными моментами.

Полная запись симметричного момента представляет собой сумму сочетаний перестановок или перестановок сочетаний. В первом случае складываются суммы строк, а во втором – столбцов полной записи (5). Условно, с целью обеспечения технологичности последующих операций, принимаем перестановки более старшим, ранее выполняемым действием. Т. е. принимаем полную запись (5) равной сумме сумм строк. Сумме сочетаний перестановок (5).

Множество элементов (1, 2, 3) может быть представлено строчной записью своих перестановок как результат раскрытия матрицы по вышеприведенным общим правилам. При этом отличительным признаком перестановок является то, что линии, соединяющие элементы матрицы, входящие в комбинацию, могут иметь разные наклоны.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{l} \quad (1\cap 2\cap 3) \quad \cup \quad (1\cap 3\cap 2) \\ \cup \quad (2\cap 1\cap 3) \quad \cup \quad (2\cap 3\cap 1) \quad \cup \\ \cup \quad (3\cap 1\cap 2) \quad \cup \quad (3\cap 2\cap 1) \end{array} \tag{6}$$

Здесь матрица рассматривается как логико-математический элемент.

Количество перестановок из ν элементов определяется известной [1] формулой

$$\nu!$$

В рассматриваемом примере (5) множество элементов содержит два одинаковых (повторяющихся) элемента, эквивалентность (6) которого содержит справа только три комбинации

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \leftrightarrow (1\cap 1\cap 3) \quad \cup \quad (1\cap 3\cap 1) \quad \cup \quad (3\cap 1\cap 1) \tag{7}$$

вычисляемые формулой [1] перестановок с повторениями

$$\frac{\nu!}{\alpha!\beta!\ldots}$$

где α, β, … - кратности повторяющихся элементов.

Сокращенная запись симметричного момента содержит замкнутый в скобки головной частный момент полной записи, за которым стоят знаки продолжения суммирования. При этом, повторяемся, запись подстрочных индексов производится строго в возрастающем порядке, а надстрочных – в убывающем.

Подстрочный заскобочный индекс означает количество суммируемых сочетаний (при фиксированном значении верхних индексов) из полного количества корней по числу корней, входящих в частный момент.

Надстрочный заскобочный индекс означает количество суммируемых перестановок с повторениями верхних индексов корней в частном моменте при фиксированном значении нижних индексов.

В соответствии с приведенными определениями все частные моменты симметричного момента должны иметь один порядок величины, определяемый суммой степеней частного момента. Все частные моменты симметричного момента должны содержать одно и то же количество сомножителей. Общее количество частных моментов в симметричном моменте определяется произведением заскобочных индексов сокращенной записи. Количество частных моментов в симметричном моменте фиксировано.

Симметричный момент (5) можно представить в форме, раскрытой по одному из заскобочных индексов, например, по верхнему

$$n_{311} = (z_1^3 z_2^1 z_3^1 + \ldots)_4^3 = [(z_1^3 z_2^1 z_3^1 + z_1^1 z_2^3 z_3^1 + z_1^1 z_2^1 z_3^3) + \ldots]_4^1 \qquad (8)$$

Эта форма интересна тем, что содержит общий множитель слагаемых головного момента и позволяет, в конечном счете, произвести представление момента в функции коэффициентов заданного уравнения.

Симметричные моменты, в обозначении которых в качестве индексов фигурируют только единицы, считаются известными, заданными и называются единичными. Единичные моменты – это коэффициенты заданного уравнения или функции и их образов линейного отображения. Если в обозначении момента используется другая, но одна цифра, момент называется кратным или стандартным. Стандартные моменты являются коэффициентами образов простейших нелинейных отображений. Симметричные моменты, в обозначении которых употреблены разные цифры, называются смешанными. Такие моменты являются коэффициентами образов общих нелинейных отображений.

В зависимости от количества сомножителей в частном моменте симметричные моменты называются одно-, двух- и т.д. корневыми.

1.3 Свойства и действия над симметричными моментами.

Симметричный момент – это функция постоянных, заданных или вычисляемых значений своих аргументов точек или коэффициентов. Следовательно, и сам симметричный момент – это постоянная. Как следствие, отсюда вытекает, что к симметричным моментам применимы все алгебраические операции.

Т.е. их можно складывать и вычитать, при этом и сумма, и разность будут тоже симметричными моментами, т.е. независящими от циклической перестановки индексов.

Симметричные моменты можно умножать и делить друг на друга и на число, при этом и произведение, и частное будут тоже симметричными моментами , т.е. независящими от циклической перестановки индексов.

Действия над моментами обладают свойствами коммутативности, дистрибутивности и ассоциативности.

Особенностью сложения и вычитания является то, что эти операции выполняются для моментов одного и того же порядка величины. Важным следствием операции сложения является симметричность второго слагаемого, если симметричны сумма и первое слагаемое.

Произведение симметричных моментов симметрично в силу симметричности сомножителей. Так, произведение

$$n_1 \cdot n_{11} = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)\cdot(z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4) = \qquad (9)$$

может содержать только слагаемые третьего порядка, реализуемые однокорневыми, двух- или трехкорневыми симметричными моментами, т.е. ничего не может быть другого, кроме

$$= \alpha_1(z_1^3 + ...)_4^1 + \alpha_2(z_1^2 z_2^1 + ...)_6^2 + \alpha_3(z_1 z_2 z_3)_4^1 = \qquad (10)$$

Остается только лишь выяснить значение числовых множителей около симметричных моментов произведения (10), что делается по результатам анализа произведения (10) моментов в раскрытой, полной форме их записи. Так, видно, что множитель α_1 около момента n_3 равен нулю, так как головной частный момент его (z_1^3) произведением (9) не формируется. Множитель α_2 равен единице, так как головной частный момент ($z_1^2 z_2$) произведением (9) формируется один раз. Множитель α_3 равен трем, головное слагаемое ($z_1 z_2 z_3$) момента n_{111} произведением (9) формируется три раза.

$$= (z_1^2 z_2^1 + ...)_6^2 + 3(z_1^1 z_2^1 z_3^1 + ...)_4^1 = n_{21} + 3n_{111} \qquad (11)$$

В правильности полученного результата убеждаемся после проверки постоянства количества частных моментов в заданном произведении (9) и итоговом его выражении (11)

$$6\cdot 4 = 6\cdot 2 + 3\cdot 4 = 24$$

Из формул (9),(11) приведенного примера можно получить выражение смешанного момента через единичные

$$n_{21} = n_1 n_{11} - 3n_{111} \qquad (12)$$

Выражение этого, и вообще любого смешанного или кратного момента через единичные, единственно, ибо, в противном случае, имеет место связь между произвольными коэффициентами уравнения, что невозможно.

По существу, так же, как произведение, раскрывается степень симметричного момента. Например, степень

$$n_1^5 = (z_1 + z_2 + z_3 + z_4)^5 = \qquad (13)$$

может представлять собой только сумму одно-, двух-, трех- и четырехкорневых симметричных моментов пятого порядка

$$n_{5000},\ n_{4100},\ n_{3200},\ n_{3110},\ n_{2210},\ n_{2111}$$

Т.е. заданная степень должна иметь вид

$$= \alpha_1 n_{5000} + \alpha_2 n_{4100} + \alpha_3 n_{3200} + \alpha_4 n_{3110} + \alpha_5 n_{2210} + \alpha_6 n_{2111} =$$

(14)

где числовые множители около моментов являются полиномиальными коэффициентами и вычисляются формулами [1]

$$\alpha_1 = \frac{5!}{5!},\ \alpha_2 = \frac{5!}{4!\cdot 1!},\ \alpha_3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!},\ \alpha_4 = \frac{5!}{3!\cdot 1!\cdot 1!},\ \alpha_5 = \frac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!},\ \alpha_1 = \frac{5!}{2!} \qquad (15)$$

Окончательное выражение степени (13)

$$\begin{aligned}&= (z_1^5 + ...)_4^1 + 5(z_1^4 z_2^1 + ...)_6^2 + 10(z_1^3 z_2^2 + ...)_6^2 + 20(z_1^3 z_2^1 z_3^1 + ...)_4^3 + 30(z_1^2 z_2^2 z_3^1 + ...)_4^3 + \\ &+ 60(z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^1 + ...)_1^4\end{aligned} \qquad (16)$$

которое, однако, подлежит обязательной проверке на постоянство количества частных моментов в полной (13) и результирующей (16) формах:

$$4^5 = 4 + 5\cdot 6\cdot 2 + 10\cdot 6\cdot 2 + 20\cdot 4 + 30\cdot 4\cdot 3 + 60\cdot 1\cdot 4 = 1024$$

Важным следствием симметричности момента произведения и сомножителя является симметричность второго сомножителя. Из симметрии момента степени следует симметричность соответствующего корня из нее.

Делению подлежат только сложные симметричные моменты, такие как смешанные и кратные. У единичных моментов делителей нет. В качестве делителей рассматриваются, как более удобные, стандартные моменты, хотя могут быть и смешанные.

Рассмотрим деление момента n_{21} (12), полученного ранее в результате умножения (9):

$$n_{21} = (z_1^2 z_2^1 + ...)_6^2 = \tag{17}$$

Во-первых, делимый момент раскрывается по верхнему заскобочному индексу

$$= [(z_1^2 z_2^1 + z_1^1 z_2^2) + ...]_6^1 = \tag{18}$$

В этой форме у раскрытых слагаемых есть общий множитель, который и выносится за внутреннюю скобку

$$= [z_1 z_2 (z_1 + z_2) + ...]_6^1 = \tag{19}$$

В полученной форме по нижнему заскобочному индексу строятся и суммируются сочетания вынесенного общего множителя ($z_1 z_2$). В скобках же осталось “постоянное” – сумма ($z_1 + z_2$), подстрочные индексы которой соответствуют вынесенному общему множителю ($z_1 z_2$).

Дополнением необходимого количества нужных слагаемых во внутренней скобке формируется симметричный момент. Там же, дополненные частные моменты и вычитаются

$$= [z_1 z_2 (z_1 + z_2 + z_3 + z_4 - z_3 - z_4) + ...]_6^1 = \tag{20}$$

Раскрывая внутренние и наружные скобки, формируем симметричный момент в форме разности

$$= [z_1 z_2 (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + ...]_6^1 - [z_1 z_2 (z_3 + z_4) + ...]_6^1 = \tag{21}$$

Уменьшаемое полученной разности, без дополнительных комментариев, может быть представлено в виде

$$(z_1 z_2 \cdot n_1 + ...)_6^1 = n_1 \cdot (z_1 z_2 + ...)_6^1 = n_1 n_{11} \tag{22}$$

Вычитаемое, в силу отмеченного выше свойства сумм, является симметричным моментом. С другой стороны, как это видно, оно представляет собой сумму двенадцати трехкорневых частных моментов третьего порядка или, соответственно, трех моментов n_{111}, содержащего четыре частных момента

$$[z_1 z_2 (z_3 + z_4) + ...]_6^1 = \frac{2 \cdot 6}{4} (z_1 z_2 z_3 + ...)_4^1 = 3n_{111} \tag{23}$$

Итак, окончательно, делимый момент (17) представляется в форме разности произведения (21) делителя (n_{11}), сформированного из вынесенного общего множителя ($z_1 z_2$), на частное n_1, и остатка ($3n_{111}$) (23)

$$= n_1 n_{11} - 3n_{111} \tag{24}$$

Однако, законченным вычисление можно считать только после проверки начальной (17) и конечной (24) формул на постоянство количества частных моментов

$$2 \cdot 6 = 4 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 12$$

Полученный результат деления не обусловлен наложением каких бы то ни было условий на моменты, поэтому является общим. Т.е. любой сложный симметричный момент может быть представлен разностью произведения симметричных моментов (уменьшаемого) и симметричного момента (вычитаемого).

В рассмотренном примере (17) результат (24) оказался выраженным через единичные моменты. В общем же случае в результате могут оказаться и сложные симметричные моменты. Применяя к ним повторно и необходимое число раз обозначенное выше следствие, любой сложный симметричный момент, в конце концов, может быть представлен алгебраической функцией единичных моментов. Факт такого представления называется сходимостью. Таким образом, любой симметричный момент сходится и единственным образом, как это было показано ранее. Процесс преобразования момента в алгебраическую функцию единичных называется вычислением момента.

Рассмотрим вычисление еще одного сложного симметричного момента

$$n_{32} = (z_1^3 z_2^2 + ...)_6^2 = \tag{25}$$

Опять, сначала раскрываем момент по верхнему заскобочному индексу

$$= [(z_1^3 z_2^2 + z_1^2 z_2^3) + ...]_6^1 = \tag{26}$$

Экспериментальной проверкой легко показать, что из возможных конфигураций общего множителя головного момента

$$z_1 z_2,\ \ z_1^2 z_2^2,\ \ z_1^2 z_2^1,\ \ z_1^2,\ \ z_1$$

выбирать следует ту, которая собирается в симметричный момент при оставшихся (26) заскобочных индексах. В рассматриваемом случае – множители $z_1 z_2$ или $z_1^2 z_2^2$. И вообще, можно показать, что выносимым общим множителем должен быть частный момент симметричного стандартного.

Выносим множитель $z_1^2 z_2^2$, после которого внутренняя скобка момента остается более легкой

$$= [z_1^2 z_2^2 (n_1 - z_3 - z_4)_2 + ...]_6 = \tag{27}$$

Здесь около внутренней скобки проставлен новый подстрочный индекс, соответствующий количеству вычитаемых слагаемых внутри скобок

$$= n_1 n_{22} - (z_1^2 z_2^2 z_3^1 + ...)_4^3 \tag{28}$$

Здесь сформированный смешанный симметричный (n_{221}), как это видно после постановки его заскобочных индексов, содержит количество частных моментов, равное числу вычитаемых в предыдущей форме (27) момента. Т.е. все вычитаемые (27) вошли в состав вновь сформированного n_{221}.

1.4 Несимметричные моменты.

Рассмотрим уравнение второй степени

$$D_2(z) = z^2 - d_1 z + d_{11} = 0 \tag{29}$$

Если переменной поочередно придать значения корней, то получим систему равенств

$$\begin{aligned} z_1^2 - d_1 z_1 + d_{11} = 0 \\ z_2^2 - d_1 z_2 + d_{11} = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

позволяющую производить вычисление коэффициентов уравнения в функции корней.

Определитель этой системы

$$D_1 = \begin{vmatrix} z_1^0 & -z_1^1 \\ z_2^0 & -z_2^1 \end{vmatrix} = z_1 - z_2 \tag{31}$$

представляет собой дискриминант заданного (29) уравнения по существу и несимметричный момент по форме. Несимметричный момент – это знакопеременный симметричный момент или инверсионно раскрытый определитель.

Для вычисления несимметричного момента возводим в квадрат определяющее его равенство (31)

$$D_1^2 = z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2 = d_2 - 2d_{11} = d_1^2 - 4d_{11} \tag{32}$$

Здесь учтено, что

$$d_2 = (z_1^2 + ...)_2^1 = [z_1(d_1 - z_2)_1 + ...]_2^1 = d_1^2 - 2d_{11} \tag{33}$$

Таким образом, дискриминант уравнения (28) второй степени равен

$$D_1 = \pm\sqrt{d_1^2 - 4d_{11}} \tag{34}$$

Дискриминант (31) – это значение образующей уравнение функции (D_2,29) в точке ее экстремума, разграничивающей разнохарактерные корни (нули) уравнения (функции). Т.е. дискриминант – это, еще раз, не коэффициент заданного уравнения, не симметричный момент. Однако, дискриминант (31) является коэффициентом обращенного уравнения, действительная и мнимая части корней которого равны соответственно мнимой и действительной частям корней заданного уравнения. Дискриминант (31) является также коэффициентом резольвенты заданного (29) уравнения. Очевидно, в силу перечисленных свойств дискриминанта, а также в силу свойств второй степени, квадрат дискриминанта, т.е. квадрат несимметричного момента обращается в симметричный момент (32).

Всеми приведенными свойствами дискриминанта уравнения второй степени обладает и дискриминант уравнения третьей степени, а вычисляется он тоже через возведение во вторую степень определителя

$$D_3 = \begin{vmatrix} z_1^0 & -z_1^1 & z_1^2 \\ z_2^0 & -z_2^1 & z_2^2 \\ z_3^0 & -z_3^1 & z_3^2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} z_1^0 & z_1^1 & z_1^2 \\ z_2^0 & z_2^1 & z_2^2 \\ z_3^0 & z_3^1 & z_3^2 \end{vmatrix} \tag{35}$$

аналогичного определителю системы (30) уравнения второй степени.

Инверсионное вычисление определителей осуществляется в соответствии с приведенными выше общими правилами, плюс смена знаков перед перестановками, обусловленная инверсией (в рассматриваемом случае надстрочных индексов).

Продемонстрируем правила смены знаков на примере рассматриваемого определителя (32)

$$-D_3 = +(+z_1^0 z_2^1 z_3^2 - z_1^0 z_2^2 z_3^1) - (z_1^1 z_2^0 z_3^2 - z_1^1 z_2^2 z_3^0) + (z_1^2 z_2^0 z_3^1 - z_1^2 z_2^1 z_3^0) \tag{36}$$

Т.е. знаки поочередно, начиная с плюсового, меняются в строчной записи определителя дважды – перед каждой перестановкой и перед каждой последовательно организованной ассоциированной парой, независимо от размеров вычисляемого определителя.

Следует отметить, что правильности последовательности перестановок (36) соответствует восходящая последовательность чисел, образуемых цифрами степеней корней частных моментов, а ассоциированию подлежат перестановки с ближайшими числами в степенях.

Прежде чем возводить дискриминант D_3 во вторую степень, представим его в форме разности

$$\begin{aligned} D_3^2 &= [(z_2^2 z_3 + z_1 z_3^2 + z_1^2 z_2) - (z_2 z_3^2 + z_1 z_2^2 + z_1^2 z_3)]^2 = \\ &= (z_2^2 z_3 + z_1 z_3^2 + z_1^2 z_2)^2 + (z_2 z_3^2 + z_1 z_2^2 + z_1^2 z_3)^2 - \\ &- 2(z_2^2 z_3 + z_1 z_3^2 + z_1^2 z_2)(z_2 z_3^2 + z_1 z_2^2 + z_1^2 z_3) = \end{aligned} \tag{37}$$

и обратим внимание на следующее обстоятельство. Головные частные моменты суммы квадратов степени (37) дискриминанта имеют вид

$$z_1^4 z_2^2, \quad z_1^3 z_2^2 z_3^1 \tag{38}$$

в то время как головные моменты удвоенного произведения совершенно другие:

$$z_1^3 z_2^3, \quad z_1^4 z_2^1 z_3^1, \quad z_1^2 z_2^2 z_3^2 \tag{39}$$

т.е. моменты заведомо разные.

Но, если б дискриминант раскрывался как неинверсионный определитель, его квадрат был бы симметричным моментом, и приведенные головные моменты были б действительно таковыми. Таковыми они остаются и в случае инверсионно раскрываемого определителя. Так как уменьшаемое и вычитаемое разности квадрата дискриминанта (37) состоят из разных моментов (38, 39). Т.е. квадрат дискриминанта уравнения третьей степени – тоже симметричный момент

$$D_3^2 = (z_1^4 z_2^2 + ...)_3^2 + 2(z_1^3 z_2^2 z_3^1 + ...)_1^6 - 2(z_1^3 z_2^3 + ...)_3^1 - \\ - 2(z_1^4 z_2^1 z_3^1 + ...)_1^3 - 2(3z_1^2 z_2^2 z_3^2 + ...)_1^1 \quad (40)$$

Вычисляя моменты, вошедшие в формулу (40) дискриминанта, найдем

$$\begin{aligned} m_{411} &= m_1^3 m_{111} - 3m_1 m_{11} m_{111} + 3m_{111}^2 \\ m_{321} &= m_1 m_{11} m_{111} - 3m_{111}^2 \\ m_{33} &= m_{11}^3 - 3m_1 m_{11} m_{111} + 3m_{111}^2 \\ m_{42} &= -2m_1^3 m_{111} + m_1^2 m_{11}^2 + 4m_1 m_{11} m_{111} - 2m_{11}^3 - 3m_{111}^2 \\ m_{222} &= m_{111}^2 \end{aligned} \quad (41)$$

Подстановка вычисленных моментов в формулу дискриминанта (40) определит последний в произвольной точке пространства. В справочной литературе [1] дискриминант обычно рассматривается приведенным к центральной системе координат, где момент первого порядка (m_1) равен нулю. Квадрат дискриминанта представится соответственно формулой

$$D_3^2 = -4m_{011}^3 - 27m_{0111}^2 \quad (42)$$

а в обозначении моментов добавляется неканонический ноль.

1.5 Вычисление симметричных моментов.

Основным правилом вычисления симметричных моментов является последовательность. Т.е. вычисление строго по порядку возрастания, так как каждый последующий вычисляется через предыдущие.

Моменты – это коэффициенты полиномиальных функций или образуемых ими уравнений, поэтому особое внимание обращаем на запись уравнений. Уравнения, моменты которых ниже вычисляются, предполагаются изначально записанными в канонической, знакопеременной, симметричной форме.

Так, уравнение второй степени имеет вид

$$D_2 = d_{00} z^1 z^1 - d_{10} z^1 z^0 + d_{11} z^0 z^0 = \quad (43)$$

и может быть представлено в краткой форме записи

$$= (d_{00} z^{11} + ...)_3 \quad (44)$$

где подстрочный заскобочный индекс означает количество слагаемых в полной записи уравнения и вычисляется как число сочетаний с повторениями [1] из общего числа различных индексов (0 и 1 - два), встречающихся в записи, по числу подстрочных или надстрочных мест (0 и 0 – два или 1 и 1 – два) в обозначении момента или степени переменной.

Вычисляем симметричные моменты двух точек плоскости

$$\begin{aligned} d_0 &= (z_1^0 + ...)_2^1 = z_1^0 + z_2^0 = 1 + 1 = 2 \\ d_{00} &= (z_1^0 z_2^0 + ...)_1^1 = z_1^0 z_2^0 = 1 \\ d_1 &= (z_1^1 + ...)_2^1 = z_1^1 + z_2^1 = d_1 \\ d_{10} &= (z_1^1 z_2^0 + ...)_1^2 = z_1^1 z_2^0 + z_1^0 z_2^1 = d_1 \\ d_{11} &= (z_1^1 z_2^1 + ...)_1^1 = z_1^1 z_2^1 = d_{11} \\ d_2 &= (z_1^2 + ...)_2^1 = [z_1 (z_1^1 + z_2^1 - z_2^1)_1 + ...]_2^1 = \\ &= (z_1^1 d_1 + ...)_2^1 - [z_1^1 (z_2^1)_1 + ...]_2^1 = d_1^2 - 2d_{11} \\ d_{20} &= (z_1^2 z_2^0 + ...)_1^2 = z_1^2 + z_2^2 = (z_1^2 + ...)_2^1 = d_2 = d_1^2 - 2d_{11} \\ d_{21} &= (z_1^2 z_2^1 + ...)_1^2 = [z_1^1 z_2^1 (z_1^1 + z_2^1) + ...]_1 = d_1 d_{11} \\ d_{22} &= (z_1^2 z_2^2 + ...)_1^1 = [(z_1^1 z_2^1)]^2 = d_{11}^2 \end{aligned}$$

$$d_3 = (z_1^3 + ...)_2^1 = [z_1^2(d_1 - z_2^1)_1 + ...]_2^1 =$$
$$= d_1 d_2 - [z_1^2(z_2^1)_1 + ...]_2^1 = d_1 d_2 - (z_1^2 z_2^1 + ...)_1^2 = d_1^3 - 3d_1 d_{11}$$

В предпоследнем равенстве после анализа изменен порядок суммирования в вычитаемом симметричном моменте. После чего, на основании предыдущих результатов, получено окончательное выражение.

$$d_{30} = (z_1^3 z_2^0 + ...)_1^2 = z_1^3 + z_2^3 = d_3$$
$$d_{31} = (z_1^3 z_2^1 + ...)_1^2 = [z_1 z_2 (z_1^2 + z_2^2) + ...]_1^1 = d_2 d_{11} = d_1^2 d_{11} - 2d_{11}^2$$
$$d_{32} = (z_1^3 z_2^2 + ...)_1^2 = [z_1{}^2 z_2{}^2 (z_1^1 + z_2^1) + ...]_1^1 = d_1 d_{22} = d_1 d_{11}^2$$
$$d_{33} = (z_1^3 z_2^3 + ...)_1^1 = (z_1 z_2)^3 = d_{11}^3$$
$$d_4 = (z_1^4 + ...)_2^1 = [z_1^3(d_1 - z_2)_1 + ...]_2^1 = d_1 d_3 - (z_1^3 z_2^1 + ...)_1^2 =$$
$$= d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2$$
$$d_{40} = (z_1^4 z_2^0 + ...)_1^2 = z_1^4 + z_2^4 = d_4$$
$$d_{41} = (z_1^4 z_2^1 + ...)_1^2 = [z_1 z_2 (z_1^3 + z_2^3) + ...]_1^1 = d_3 d_{11} = d_1^3 d_{11} - 3d_1 d_{11}^2$$
$$d_{42} = (z_1^4 z_2^2 + ...)_1^2 = [z_1{}^2 z_2{}^2 (z_1^2 + z_2^2) + ...]_1^1 = d_2 d_{22} = d_1 d_{11}^2 - 2d_{11}^3$$
$$d_{43} = (z_1^4 z_3^2 + ...)_1^2 = [z_1{}^3 z_2{}^3 (z_1 + z_2) + ...]_1 = d_1 d_{33} = d_1 d_{11}^3$$
$$d_{44} = (z_1^4 z_2^4 + ...)_1^1 = d_{11}^4$$
$$d_5 = (z_1^5 + ...)_2^1 = [z_1^4(d_1 - z_2)_1 + ...]_2 = d_1 d_4 - d_{41} =$$
$$= d_1(d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2) - (d_1^3 d_{11} - 3d_1 d_{11}^2) = d_1^5 - 5d_1^3 d_{11} + 5d_1 d_{11}^2$$
$$d_{50} = (z_1^5 z_2^0 + ...)_1^2 = (z_1^5 + ...)_2^1 = d_5$$
$$d_{51} = (z_1^5 z_2^1 + ...)_1^2 = [z_1^1 z_2^1 (z_1^4 + z_2^4) + ...]_1 = d_4 d_{11} =$$
$$= (d_1^4 - 4d_1^2 d_{11} + 2d_{11}^2) d_{11} = d_1^4 d_{11} - 4d_1^2 d_{11}^2 + 2d_{11}^3$$
$$d_{52} = (z_1^5 z_2^2 + ...)_1^2 = [z_1{}^2 z_2{}^2 (z_1^3 + z_2^3) + ...]_1 = d_3 d_{22} = (d_1^3 - 3d_1 d_{11}) d_{11}^2 =$$
$$= d_1^3 d_{11}^2 - 3d_1 d_{11}^3$$
$$d_{53} = (z_1^5 z_2^3 + ...)_1^2 = [z_1{}^3 z_2{}^3 (z_1^2 + z_2^2) + ...]_1 = d_2 d_{33} = (d_1^2 - 2d_{11}) d_{11}^3 =$$
$$= d_1^2 d_{11}^3 - 2d_{11}^4$$
$$d_{54} = (z_1^5 z_2^4 + ...)_1^2 = z_1{}^4 z_2{}^4 (z_1 + z_2) = d_1 d_{44} = d_1 d_{11}^4$$
$$d_{55} = (z_1^5 z_2^5 + ...)_1^1 = d_{11}^5$$

2. Моменты трех точек.

$$m_0 = (z_1^0 + ...)_3^1 = 3$$
$$m_{00} = (z_1^0 z_2^0 + ...)_3^1 = 3$$
$$m_{000} = (z_1^0 z_2^0 z_3^0 + ...)_1^1 = 1$$
$$m_1 = (z_1^1 + ...)_3^1 = m_1$$
$$m_{10} = (z_1^1 z_2^0 + ...)_3^2 = m_1 \frac{6}{3} = 2m_1$$
$$m_{100} = (z_1^1 z_2^0 z_3^0 + ...)_1^3 = (z_1 + ...)_1^3 = m_1$$
$$m_{11} = (z_1 z_2 + ...)_3^1 = m_{11}$$
$$m_{110} = (z_1^1 z_2^1 z_3^0 + ...)_1^3 = (z_1 z_2 + ...)_1^3 = m_{11}$$
$$m_{111} = (z_1^1 z_2^1 z_3^1 + ...)_1^1 = m_{111}$$

$$m_2 = (z_1^2 + ...)_3^1 = [z_1(m_1 - z_2 - z_3)_2 + ...]_3^1 = m_1^2 - (z_1^1 z_2^1 + ...)_3^1 \frac{6}{3} =$$

$$= m_1^2 - 2m_{11}$$

$$m_{20} = (z_1^2 z_2^0 + ...)_3^2 = (z_1^2 + ...)_3^1 \frac{2 \cdot 3}{3} = 2m_2$$

$$m_{200} = (z_1^2 z_2^0 z_3^0 + ...)_1^3 = (z_1^2 + ...)_3^1 \frac{1 \cdot 3}{3} = m_2$$

$$m_{21} = (z_1^2 z_2^1 + ...)_3^2 = [z_1 z_2 (z_1 + z_2 + z_3 - z_3)_1 + ...]_3^1 =$$

$$= m_1 m_{11} - m_{111} \frac{1 \cdot 3}{1} = m_1 m_{11} - 3m_{111}$$

$$m_{210} = (z_1^2 z_2^1 z_3^0 + ...)_1^6 = (z_1^2 z_2^1 + ...)_3^2 = m_{21} = m_1 m_{11} - 3m_{111}$$

$$m_{211} = (z_1^2 z_2^1 z_3^1 + ...)_1^3 = [z_1 z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3) + ...]_1^1 = m_1 m_{111}$$

$$m_{22} = (z_1^2 z_2^2 + ...)_3^1 = [z_1 z_2 (m_{11} - z_1 z_3 - z_2 z_3)_2 + ...]_3^1 =$$

$$= m_{11}^2 - (z_1^2 z_2^1 z_3^1 + ...)_1^3 \frac{2 \cdot 3}{3} = m_{11}^2 - 2m_{211} = m_{11}^2 - 2m_1 m_{111}$$

$$m_{220} = (z_1^2 z_2^2 z_3^0 + ...)_1^3 = (z_1^2 z_2^2 + ...)_3^1 = m_{22}$$

$$m_{221} = (z_1^2 z_2^2 z_3^1 + ...)_1^3 = [z_1 z_2 z_3 (z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) + ...]_1^1 = m_{11} m_{111}$$

$$m_{222} = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 + ...)_1^1 = m_{111}{}^2$$

$$m_3 = (z_1^3 + ...)_3^1 = [z_1{}^2 (m_1 - z_2 - z_3)_2 + ...]_3^1 = m_1 m_2 - (z_1^2 z_2^1 + ...)_3^2 \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 2} =$$

$$= m_1 (m_1^2 - 2m_{11}) - (m_1 m_{11} - 3m_{111}) = m_1^3 - 3m_1 m_{11} + 3m_{111}$$

$$m_{30} = (z_1^3 z_2^0 + ...)_3^2 = (z_1^3 + ...)_3^1 \frac{2 \cdot 3}{3} = 2m_3$$

$$m_{300} = (z_1^3 z_2^0 z_3^0 + ...)_1^3 = (z_1^3 + ...)_3^1 = m_3$$

$$m_{31} = (z_1^3 z_2^1 + ...)_3^2 = [z_1 z_2 (m_2 - z_3{}^2)_1 + ...]_3^1 =$$

$$= m_2 m_{11} - (z_1^2 z_2^1 z_3^1 + ...)_1^3 \frac{1 \cdot 3}{3} =$$

$$= m_{11}(m_1^2 - 2m_{11}) - m_1 m_{111} = m_1^2 m_{11} - 2m_{11}^2 - m_1 m_{111}$$

$$m_{310} = (z_1^3 z_2^1 z_3^0 + ...)_1^6 = (z_1^3 z_2^1 + ...)_3^2 = m_{31} = m_1^2 m_{11} - 2m_{11}^2 - m_1 m_{111}$$

$$m_{311} = (z_1^3 z_2^1 z_3^1 + ...)_1^3 = [z_1 z_2 z_3 (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) + ...]_1^1 = m_2 m_{111} =$$

$$= (m_1^2 - 2m_{11}) m_{111} = m_1^2 m_{111} - 2m_{11} m_{111}$$

$$m_{32} = (z_1^3 z_2^2 + ...)_3^2 = [z_1{}^2 z_2{}^2 (m_1 - z_3)_1 + ...]_3^1 = m_1 m_{22} - m_{221} =$$

$$= m_1 (m_{11}{}^2 - 2m_1 m_{111}) - m_{11} m_{111} = m_1 m_{11}{}^2 - 2m_1{}^2 m_{111} - m_{11} m_{111}$$

$$m_{320} = (z_1^3 z_2^2 z_3^0 + ...)_1^6 = [z_1{}^3 z_2{}^2 + ...]_3^2 = m_1 m_{11}^2 - 2m_1^2 m_{111} - m_{11} m_{111}$$

$$m_{321} = (z_1^3 z_2^2 z_3^1 + ...)_1^6 = [z_1 z_2 z_3 (z_1^2 z_2^1 + ...)_3^2 + ...]_1^1 = m_{111} m_{21} =$$

$$= m_{111} (m_1 m_{11} - 3m_{111}) = m_1 m_{11} m_{111} - 3m_{111}{}^2$$

$$m_{322} = (z_1^3 z_2^2 z_3^2 + ...)_1^3 = [z_1^2 z_2^2 z_3^2 (z_1 + z_2 + z_3) + ...]_1^1 = m_1 m_{222} = m_1 m_{111}{}^2$$

$$m_{33}=(z_1^3z_2^3+...)_3^1=[z_1{}^2z_2{}^2(m_{11}-z_1z_3-z_2z_3)_2+...]_3^1=$$
$$=m_{11}m_{22}-(z_1^3z_2^2z_3^1+...)_1^6=m_{11}(m_{11}^2-2m_1m_{111})-(m_1m_{11}m_{111}-3m_{111}{}^2)=$$
$$=m_{11}^3-3m_1m_{11}m_{111}+3m_{111}{}^2$$
$$m_{330}=(z_1^3z_2^3z_3^0+...)_1^3=(z_1^3z_2^3+...)_3^1=m_{11}^3-3m_1m_{11}m_{111}+3m_{111}^2$$
$$m_{331}=(z_1^3z_2^3z_3^1+...)_1^3=m_{111}m_{22}=m_{111}(m_{11}^2-2m_1m_{111})=m_{11}^2m_{111}-2m_1m_{111}^2$$
$$m_{332}=(z_1^3z_2^3z_3^2+...)_1^3=z_1{}^2z_2{}^2z_3{}^2(z_1z_2+...)_3^1=m_{11}m_{222}=m_{11}m_{111}^2$$
$$m_{333}=(z_1^3z_2^3z_3^3+...)_1^1=m_{111}^3$$
$$m_4=(z_1^4+...)_3^1=[z_1{}^3(m_1-z_2-z_3)_2+...]_3^1=m_1m_3-(z_1^3z_2^1+...)_3^2=$$
$$=m_1(m_1^3-3m_1m_{11}+3m_{111})-(m_1^2m_{11}-2m_{11}^2-m_1m_{111})=$$
$$=m_1^4-4m_1^2m_{11}+2m_{11}^2+4m_1m_{111}$$
$$m_{40}=(z_1^4z_2^0+...)_3^2=(z_1^4+...)_3^1\frac{2\cdot 3}{3}=2m_4=2m_1^4-8m_1^2m_{11}+4m_{11}^2+8m_1m_{111}$$
$$m_{400}=(z_1^4z_2^0z_3^0+...)_1^3=(z_1^4+...)_3^1=m_4=m_1^4-4m_1^2m_{11}+2m_{11}^2+4m_1m_{111}$$
$$m_{41}=(z_1^4z_2^1+...)_3^2=[z_1{}^1z_2{}^1(m_3-z_3{}^3)_1+...]_3^1=m_3m_{11}-(z_1^3z_2^1z_3^1+...)_1^3=$$
$$=m_{11}(m_1^3-3m_1m_{11}+3m_{111})-(m_1{}^2m_{111}-2m_{11}m_{111})=$$
$$=m_1^3m_{11}-m_1^2m_{111}-3m_1m_{11}^2-5m_{11}m_{111}$$
$$m_{410}=(z_1^4z_2^1z_3^0+...)_1^6=[z_1^4z_2^1+...]_3^2=m_1^3m_{11}-m_1^2m_{111}-3m_1m_{11}{}^2+5m_{11}m_{111}$$
$$m_{411}=(z_1^4z_2^1z_3^1+...)_1^3=m_{111}[z_1^3+...]_3^1=m_{111}(m_1^3-3m_1m_{11}+3m_{111})=$$
$$=m_1^3m_{111}-3m_1m_{11}m_{111}+3m_{111}{}^2$$
$$m_{42}=(z_1^4z_2^2+...)_3^2=[z_1{}^2z_2{}^2(m_2-z_3{}^2)_1+...]_3^1=m_2m_{22}-3m_{222}=$$
$$=(m_1^2-2m_{11})(m_{11}^2-2m_1m_{111})-3m_{111}^2=$$
$$=-2m_1^3m_{111}+m_1^2m_{11}^2+4m_1m_{11}m_{111}-2m_{11}^3-3m_{111}^2$$
$$m_{420}=(z_1^4z_2^2z_3^0+...)_1^6=[z_1{}^2z_2{}^2(m_2-z_3{}^2)_1+...]_3^1=m_2m_{22}-3m_{222}=$$
$$=(m_1^2-2m_{11})(m_{11}^2-2m_1m_{111})-3m_{111}^2=$$
$$=-2m_1^3m_{111}+m_1^2m_{11}^2-2m_{11}^3-3m_{111}^2$$
$$m_{421}=(z_1^4z_2^2z_3^1+...)_1^6=m_{111}[z_1{}^3z_2{}^1+...]_3^2=m_{111}(m_1^2m_{11}-2m_{11}^2-m_1m_{111})=$$
$$=m_1^2m_{11}m_{111}-2m_{11}^2m_{111}-m_1m_{111}{}^2$$
$$m_{422}=(z_1^4z_2^2z_3^2+...)_1^3=m_{111}^2m_2=m_{111}^2(m_1^2-2m_{11})=m_1^2m_{111}^2-2m_{11}m_{111}^2$$
$$m_{43}=(z_1^4z_2^3+...)_3^2=[z_1{}^3z_2{}^3(m_2-z_3)_1+...]_3^1=m_1m_{33}-(z_1{}^3z_2{}^3z_3{}^1)_1^3=$$
$$=m_1(m_{11}{}^3-3m_1m_{11}m_{111}+3m_{111}^2)-(m_{11}^2m_{111}-2m_1m_{111}^2)=$$
$$=m_1m_{11}{}^3-3m_1^2m_{11}m_{111}-m_{11}^2m_{111}+5m_1m_{111}^2$$
$$m_{430}=(z_1^4z_2^3z_3^0+...)_1^6=m_{43}=m_1m_{11}{}^3-3m_1^2m_{11}m_{111}-m_{11}^2m_{111}+5m_1m_{111}^2$$
$$m_{431}=(z_1^4z_2^3z_3^1+...)_1^6=m_{111}m_{32}=m_1m_{11}{}^2m_{111}-2m_1^2m_{111}^2-m_{11}m_{111}^2$$

3. Моменты четырех точек.

$$n_0 = (z_1^0 + ...)_4^1 = 4$$
$$n_{00} = (z_1^0 z_2^0 + ...)_6^1 = 6$$
$$n_{000} = (z_1^0 z_2^0 z_3^0 + ...)_4^1 = 4$$
$$n_{0000} = (z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0 + ...)_1^1 = 1$$
$$n_1 = (z_1 + ...)_4^1 = n_1$$
$$n_{10} = (z_1^1 z_2^0 + ...)_6^2 = (z_1^1 + ...)_4^1 \frac{2 \cdot 6}{4} = 3n_1$$
$$n_{100} = (z_1^1 z_2^0 z_3^0 + ...)_4^3 = (z_1^1 + ...)_4^1 \frac{3 \cdot 4}{4} = 3n_1$$
$$n_{1000} = (z_1^1 z_2^0 z_3^0 z_4^0 + ...)_1^4 = (z_1^1 + ...)_4^1 = n_1$$
$$n_{11} = (z_1^1 z_2^1 + ...)_6^1 = n_{11}$$
$$n_{110} = (z_1^1 z_2^1 z_3^0 + ...)_4^3 = (z_1^1 z_2^1 + ...)_6^1 \frac{3 \cdot 4}{6} = 2n_{11}$$
$$n_{1100} = (z_1^1 z_2^1 z_3^0 z_4^0 + ...)_1^6 = (z_1^1 z_2^1 + ...)_6^1 = n_{11}$$
$$n_{111} = (z_1^1 z_2^1 z_3^1 + ...)_4^1 = n_{111}$$
$$n_{1110} = (z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_4^0 + ...)_1^4 = (z_1^1 z_2^1 z_3^1 + ...)_4^1 = n_{111}$$
$$n_{1111} = (z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_4^1 + ...)_1^1 = n_{1111}$$
$$n_2 = (z_1^2 + ...)_4^1 = [z_1 (n_1 - z_2 - z_3 - z_4)_3 + ...]_4^1 = n_1^2 - (z_1 z_2 + ...)_6^1 \frac{3 \cdot 4}{6} = n_1^2 - 2n_{11}$$
$$n_{20} = (z_1^2 z_2^0 + ...)_6^2 = [z_1{}^2 + ...]_4^1 \frac{2 \cdot 6}{4} = 3n_2$$
$$n_{200} = (z_1^2 z_2^0 z_3^0 + ...)_4^3 = [z_1{}^2 + ...]_4^1 \frac{3 \cdot 4}{4} = 3n_2$$
$$n_{2000} = (z_1^2 z_2^0 z_3^0 z_4^0 + ...)_1^4 = [z_1{}^2 + ...]_4^1 = n_2$$
$$n_{21} = (z_1^2 z_2^1 + ...)_6^2 = [z_1 z_2 (n_1 - z_3 - z_4)_2 + ...]_6^1 = n_1 n_{11} - (z_1 z_2 z_3 + ...)_4^1 \frac{2 \cdot 6}{4} = n_1 n_{11} - 3n_{111}$$
$$n_{210} = (z_1^2 z_2^1 z_3^0 + ...)_4^6 = [z_1^2 z_2^1 + ...]_6^2 \frac{4 \cdot 6}{2 \cdot 6} = 2n_{21}$$
$$n_{2100} = (z_1^2 z_2^1 z_3^0 z_4^0 + ...)_4^{12} = [z_1^2 z_2^1 + ...]_6^2 \frac{12}{12} = n_{21}$$
$$n_{211} = (z_1^2 z_2^1 z_3^1 + ...)_4^3 = [z_1 z_2 z_3 (n_1 - z_4)_1 + ...]_4 = n_1 n_{111} - 4n_{1111}$$
$$n_{2110} = (z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^0 + ...)_1^{12} = [z_1^2 z_2^1 z_3^1 + ...]_4^3 \frac{12}{12} = n_{211}$$
$$n_{2111} = (z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^1 + ...)_1^4 = n_{1111} [z_1 + ...]_4^1 = n_1 n_{1111}$$
$$n_{22} = (z_1^2 z_2^2 + ...)_6^1 = [z_1 z_2 (n_{11} - z_1 z_3 - ... - z_3 z_4)_3 + ...]_6^1 =$$
$$= n_{11}^2 - (z_1{}^2 z_2{}^1 z_3{}^1 + ...)_4^3 \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 4} - (z_1 z_2 z_3 z_4 + ...)_1^1 \frac{(5-4) \cdot 6}{1} =$$
$$= n_{11}^2 - 2n_{211} - 6n_{1111} = n_{11}^2 - 2n_1 n_{111} + 2n_{1111}$$
$$n_{220} = (z_1^2 z_2^2 z_3^0 + ...)_4^3 = [z_1{}^2 z_2{}^2 + ...]_6^1 \frac{3 \cdot 4}{6} = 2n_{22}$$
$$n_{2200} = (z_1^2 z_2^2 z_3^0 z_4^0 + ...)_1^6 = [z_1{}^2 z_2{}^2 + ...]_6^1 = n_{22}$$

$$n_{221} = (z_1^2 z_2^2 z_3^1 + ...)_4^3 = [z_1 z_2 z_3 (n_{11} - z_3 z_4)_3 + ...]_4^1 = n_{11} n_{111} - 3(z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^1 + ...)_1 =$$
$$= n_{11} n_{111} - 3 n_1 n_{1111}$$
$$n_{2210} = (z_1^2 z_2^2 z_3^1 z_4^0 + ...)_4^{12} = [z_1^2 z_2^2 z_3^1 + ...]_4^3 = n_{221}$$
$$n_{2211} = (z_1^2 z_2^2 z_3^1 z_4^1 + ...)_4^6 = n_{1111} [z_1 z_2 + ...]_6^1 = n_{11} n_{1111}$$
$$n_{222} = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 + ...)_4^1 = [z_1 z_2 z_3 (n_{111} - z_1 z_2 z_4 - z_1 z_3 z_4 - z_2 z_3 z_4)_3 + ...]_4^1 =$$
$$= {n_{111}}^2 - (z_1^2 z_2^2 z_3^1 z_4^1 + ...)_1^6 \frac{3 \cdot 4}{6} = n_{111}^2 - 2 n_{2211} = n_{111}^2 - 2 n_{11} n_{1111}$$
$$n_{2220} = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^0 + ...)_1^4 = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 + ...)_4^1 = n_{222}$$
$$n_{2221} = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^1 + ...)_1^4 = n_{1111} n_{111}$$
$$n_{2222} = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 + ...)_1^1 = n_{1111}^2$$
$$n_3 = (z_1^3 + ...)_4^1 = [{z_1}^2 (n_1 - z_2 - z_3 - z_4)_3 + ...]_4 = n_1 n_2 - ({z_1}^2 {z_2}^1 + ...)_6^2 =$$
$$= n_1 (n_1^2 - 2 n_{11}) - (n_1 n_{11} - 3 n_{111}) = n_1^3 - 3 n_1 n_{11} + 3 n_{111}$$
$$n_{30} = (z_1^3 z_2^0 + ...)_6^2 = [{z_1}^3 + ...]_4^1 \frac{2 \cdot 6}{4} = 3 n_3$$
$$n_{300} = (z_1^3 z_2^0 z_3^0 + ...)_4^3 = [{z_1}^3 + ...]_4^1 \frac{3 \cdot 4}{4} = 3 n_3$$
$$n_{3000} = (z_1^3 z_2^0 z_3^0 z_4^0 + ...)_1^4 = [{z_1}^3 + ...]_4^1 = n_3$$
$$n_{31} = (z_1^3 z_2^1 + ...)_6^2 = [z_1 z_2 (n_2 - {z_3}^2 - {z_4}^2)_2 + ...]_6^1 = n_2 n_{11} - ({z_1}^2 {z_2}^1 {z_3}^1 + ...)_4^3 =$$
$$= n_{11} (n_1^2 - 2 n_{11}) - (n_1 n_{111} - 4 n_{1111}) = n_1^2 n_{11} - n_1 n_{111} - 2 n_{11}^2 + 4 n_{1111}$$
$$n_{310} = (z_1^3 z_2^1 z_3^0 + ...)_4^6 = (z_1^3 z_2^1 + ...)_6^2 \frac{4 \cdot 6}{2 \cdot 6} = 2 n_{31}$$
$$n_{3100} = (z_1^3 z_2^1 z_3^0 z_4^0 + ...)_1^{12} = (z_1^3 z_2^1 + ...)_6^2 = n_{31}$$
$$n_{311} = (z_1^3 z_2^1 z_3^1 + ...)_4^3 = [z_1 z_2 z_3 (n_2 - {z_4}^2)_1 + ...]_4^1 = n_2 n_{111} - n_{1111} n_1 =$$
$$= n_{111} (n_1^2 - 2 n_{11}) - n_1 n_{1111} = n_1^2 n_{111} - 2 n_{11} n_{1111} - n_1 n_{1111}$$
$$n_{3110} = (z_1^3 z_2^1 z_3^1 z_4^0 + ...)_1^{12} = [z_1 z_2 z_3 + ...]_4^3 = n_{311}$$
$$n_{3111} = n_{1111} n_2 = n_{1111} ({n_1}^2 - 2 n_{11}) = {n_1}^2 n_{1111} = 2 n_{11} n_{1111}$$
$$n_{32} = (z_1^3 z_2^2 + ...)_6^2 = [{z_1}^2 {z_2}^2 (n_1 - z_3 - z_4)_2 + ...]_6 = n_1 n_{22} - ({z_1}^2 {z_2}^1 {z_3}^1 + ...)_4^3 =$$
$$= n_1 (n_{11}^2 - 2 n_1 n_{111} + 2 n_{1111}) - n_{11} n_{111} + 3 n_1 n_{1111}) =$$
$$= n_1 n_{11}^2 - 2 {n_1}^2 n_{111} + 5 n_1 n_{1111} - n_{11} n_{111}$$
$$n_{320} = (z_1^3 z_2^2 z_3^0 + ...)_4^6 = 2[{z_1}^2 {z_2}^2 (n_1 - z_3 - z_4)_2 + ...]_6 = 2 n_1 n_{22} - 2 n_{221} = 2 n_{32} =$$
$$= 2 n_1 n_{11}^2 - 4 {n_1}^2 n_{111} + 10 n_1 n_{1111} - 2 n_{11} n_{111}$$
$$n_{3200} = (z_1^3 z_2^2 z_3^0 z_4^0 + ...)_1^{12} = (z_1^3 z_2^2 + ...)_6^2 = n_{32}$$
$$n_{321} = (z_1^3 z_2^2 z_3^1 + ...)_4^6 = [z_1^1 z_2^1 z_3^1 (n_1 - z_1^2 z_4^1 - z_1 z_4^2 - z_2^2 z_4^1 - z_2^1 z_4^2 - z_3^2 z_4 - z_3^1 z_4^2)_6 + ...]_4 =$$
$$= n_{21} n_{111} - 3({z_1}^2 {z_2}^1 {z_3}^1 {z_4}^1 + ...)_1^4 - 2({z_1}^2 {z_2}^1 {z_3}^1 {z_4}^1 + ...)_1^6 =$$
$$= n_1 n_{11} n_{111} - 3 n_{111}^2 - 3 n_1^2 n_{1111} + 4 n_{11} n_{1111}$$
$$n_{3210} = (z_1^3 z_2^2 z_3^1 z_4^0 + ...)_1^{24} = (z_1^3 z_2^2 z_3^1 + ...)_4^6 = n_{321}$$
$$n_{3211} = (z_1^3 z_2^2 z_3^1 z_4^1 + ...)_1^{12} = n_{1111} n_{21} = n_1 n_{11} n_{1111} - 3 n_{111} n_{1111}$$

$$n_{322} = (z_1^3 z_2^2 z_3^2 + ...)_4^3 = [z_1^2 z_2^2 z_3^2 (n_1 - z_4)_1 + ...]_4 = n_1 n_{222} - (z_1{}^2 z_2{}^2 z_3{}^2 z_4{}^1 + ...)_1^4 =$$
$$= n_1 n_{222} - n_{1111} n_{111} = n_1 n_{111}^2 - 2n_1 n_{11} n_{1111} - n_{111} n_{1111}$$
$$n_{3220} = (z_1^3 z_2^2 z_3^2 z_4^0 + ...)_1^{12} = (z_1^3 z_2^2 z_3^2 + ...)_4^3 = n_{322}$$
$$n_{3221} = (z_1^3 z_2^2 z_3^2 z_4^1 + ...)_1^{12} = n_{1111} n_{211} = n_1 n_{111} n_{1111} - 4n_{1111}^2$$
$$n_{3222} = (z_1^3 z_2^2 z_3^2 z_4^2 + ...)_1^4 = n_{1111}{}^2 n_1$$
$$n_{33} = (z_1^3 z_2^3 + ...)_6^1 = n_{11}^3 + 3n_{111}^2 - 3n_1 n_{11} n_{111} + 3n_1^2 n_{1111} - 3n_{11} n_{1111}$$
$$n_{330} = (z_1^3 z_2^3 z_3^0 + ...)_4^3 = (z_1^3 z_2^3 + ...)_6^1 \frac{3 \cdot 4}{6} = 2n_{33}$$
$$n_{3300} = (z_1^3 z_2^3 z_3^0 z_4^0 + ...)_1^6 = (z_1^3 z_2^3 + ...)_6^1 = n_{33}$$
$$n_{331} = (z_1^3 z_2^3 z_3^1 + ...)_4^3 = [z_1 z_2 z_3 (n_{22} - z_1^2 z_4^2 - z_2^2 z_4^2 - z_3^2 z_4^2)_3 + ...]_4 =$$
$$= n_{111} n_{22} - (z_1{}^3 z_2{}^2 z_3{}^2 z_4{}^1 + ...)_1^{12} = n_{111} n_{22} - n_{1111} n_{21} =$$
$$= n_{11}^2 n_{111} - 2n_1 n_{111}^2 - n_1 n_{11} n_{1111} - 5n_{111} n_{1111}$$
$$n_{3310} = (z_1^3 z_2^3 z_3^1 z_4^0 + ...)_1^{12} = (z_1^3 z_2^3 z_3^1 + ...)_4^3 = n_{331}$$
$$n_{3311} = (z_1^3 z_2^3 z_3^1 z_4^1 + ...)_1^6 = n_{1111} n_{22} = n_{11}^2 n_{1111} - 2n_1 n_{111} n_{1111} - 2n_{1111}^2$$
$$n_{332} = (z_1^3 z_2^3 z_3^2 + ...)_4^3 = [z_1^2 z_2^2 z_3^2 (n_1 - z_3 z_4)_3 + ...]_4^1 = n_{11} n_{222} - (z_1{}^3 z_2{}^2 z_3{}^2 z_4{}^1 + ...)_1^4 =$$
$$= n_1 (n_{111}^2 - 2n_{11} n_{1111}) - n_1 n_{1111} n_{111} + 4n_{1111}^2 = n_{11} n_{111}^2 - 2n_{11}^2 n_{1111} - n_1 n_{111} n_{1111} + 4n_{1111}^2$$
$$n_{3320} = (z_1^3 z_2^3 z_3^2 z_4^0 + ...)_1^{12} = (z_1^3 z_2^3 z_3^2 + ...)_4^3 = [z_1^2 z_2^2 z_3^2 (n_1 - z_1 z_4 - z_2 z_4 - z_3 z_4)_3 + ...]_4 =$$
$$= n_{11} n_{222} - n_{3221} = n_{322}$$
$$n_{3321} = (z_1^3 z_2^3 z_3^2 z_4^1 + ...)_1^{12} = n_{1111} n_{221} = n_{1111} (n_{11} n_{111} - 3n_1 n_{1111}) = n_{11} n_{111} n_{1111} - 3n_1 n_{1111}^2$$
$$n_{3322} = (z_1^3 z_2^3 z_3^2 z_4^2 + ...)_1^6 = n_{1111}^2 n_{11}$$
$$n_{333} = n_{111}^3 - 3n_{11} n_{111} n_{1111} + 3n_1 n_{1111}^2$$
$$n_{3330} = (z_1^3 z_2^3 z_3^3 z_4^0 + ...)_1^4 = (z_1^3 z_2^3 z_3^3 + ...)_4^1 = n_{333}$$

4. Моменты пяти точек.

$$p_0 = (z_1^0 + ...)_5^1 = 5$$
$$p_{00} = (z_1^0 z_2^0 + ...)_{10}^1 = 10$$
$$p_{000} = (z_1^0 z_2^0 z_3^0 + ...)_{10}^1 = 10$$
$$p_{0000} = (z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0 + ...)_5^1 = 5$$
$$p_{00000} = (z_1^0 z_2^0 z_3^0 z_4^0 z_5^0 + ...)_1^1 = 1$$
$$p_1 = (z_1 + ...)_5^1 = p_1$$
$$p_{10} = (z_1^1 z_2^0 + ...)_{10}^2 = (z_1^1 + ...)_5^1 \frac{2 \cdot 10}{5} = 4p_1$$
$$p_{100} = (z_1^1 z_2^0 z_3^0 + ...)_{10}^3 = (z_1^1 + ...)_5^1 \frac{3 \cdot 10}{5} = 6p_1$$
$$p_{1000} = (z_1^1 z_2^0 z_3^0 z_4^0 + ...)_5^4 = (z_1^1 + ...)_5^1 \frac{4 \cdot 5}{5} = 4p_1$$
$$p_{10000} = (z_1^1 z_2^0 z_3^0 z_4^0 z_5^0 + ...)_1^5 = (z_1^1 + ...)_5^1 = p_1$$
$$p_{11} = (z_1 z_2 + ...)_{10}^1 = p_{11}$$
$$p_{110} = (z_1^1 z_2^1 z_3^0 + ...)_{10}^3 = (z_1^1 z_2^1 + ...)_{10}^1 \frac{3 \cdot 10}{10} = 3p_{11}$$

$$p_{1100} = (z_1^1 z_2^1 z_3^0 z_4^0 + ...)_5^6 = (z_1^1 z_2^1 + ...)_{10}^1 \frac{5\cdot 6}{10} = 3p_{11}$$

$$p_{11000} = (z_1^1 z_2^1 z_3^0 z_4^0 z_5^0 + ...)_1^{10} = (z_1^1 z_2^1 + ...)_{10}^1 = p_{11}$$

$$p_{111} = (z_1 z_2 z_3 + ...)_{10}^1 = p_{111}$$

$$p_{1110} = (z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_4^0 + ...)_5^4 = (z_1 z_2 z_3 + ...)_{10}^1 \frac{5\cdot 4}{10} = 2p_{111}$$

$$p_{11100} = (z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_4^0 z_5^0 + ...)_1^{10} = (z_1 z_2 z_3 + ...)_{10}^1 = p_{111}$$

$$p_{1111} = (z_1 z_2 z_3 z_4 + ...)_5^1 = p_{1111}$$

$$p_{11110} = (z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_4^1 z_5^0 + ...)_1^5 = (z_1 z_2 z_3 z_4 + ...)_5^1 = p_{1111}$$

$$p_2 = (z_1^2 + ...)_5^1 = [z_1(p_1 - z_2 - z_3 - z_4 - z_5)_4 + ...]_5^1 = p_1^2 - (z_1 z_2 + ...)_{10}^1 \frac{4\cdot 5}{10} = p_1^2 - 2p_{11}$$

$$p_{20} = (z_1^2 z_2^0 + ...)_{10}^2 = (z_1^2 + ...)_5^1 \frac{2\cdot 10}{5} = 4p_2$$

$$p_{200} = (z_1^2 z_2^0 z_3^0 + ...)_{10}^3 = (z_1^2 + ...)_5^1 \frac{3\cdot 10}{5} = 6p_2$$

$$p_{2000} = (z_1^2 z_2^0 z_3^0 z_4^0 + ...)_5^4 = (z_1^2 + ...)_5^1 \frac{4\cdot 5}{5} = 4p_2$$

$$p_{20000} = (z_1^2 z_2^0 z_3^0 z_4^0 z_5^0 + ...)_1^5 = (z_1^2 + ...)_5^1 = p_2$$

$$p_{21} = (z_1^2 z_2^1 + ...)_{10}^2 = [z_1 z_2(p_1 - z_3 ...)_3 + ...]_{10}^1 = p_1 p_{11} - (z_1 z_2 z_3 + ...)_{10}^1 \frac{3\cdot 10}{10} =$$
$$= p_1 p_{11} - 3p_{111}$$

$$p_{210} = (z_1^2 z_2^1 z_3^0 + ...)_{10}^6 = [z_1^2 z_2^1 + ...]_{10}^2 \frac{6\cdot 10}{2\cdot 10} = 3p_{21}$$

$$p_{2100} = (z_1^2 z_2^1 z_3^0 z_4^0 + ...)_5^{12} = [z_1^2 z_2^1 + ...]_{10}^2 \frac{5\cdot 12}{2\cdot 10} = 3p_{21}$$

$$p_{21000} = (z_1^2 z_2^1 z_3^0 z_4^0 z_5^0 + ...)_1^{20} = [z_1^2 z_2^1 + ...]_{10}^2 = p_{21}$$

$$p_{211} = (z_1^2 z_2^1 z_3^1 + ...)_{10}^3 = [z_1 z_2 z_3(p_1 - z_3 - z_4 - z_5)_2 + ...]_{10}^1 = p_1 p_{111} - (z_1 z_2 z_3 z_4 + ...)_5 =$$
$$= p_1 p_{111} - 4p_{1111}$$

$$p_{2110} = (z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^0 + ...)_5^{12} = (z_1^2 z_2^1 z_3^1 + ...)_{10}^3 \frac{5\cdot 12}{3\cdot 10} = 2p_{211}$$

$$p_{21100} = (z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^0 z_5^0 + ...)_1^{30} = (z_1^2 z_2^1 z_3^1 + ...)_{10}^3 = p_{211}$$

$$p_{2111} = (z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^1 + ...)_5^4 = [z_1 z_2 z_3 z_4(p_1 - z_5)_1 + ...]_5^1 = p_1 p_{1111} - 5p_{11111}$$

$$p_{21110} = p_{2111}$$

$$p_{21111} = p_{11111} p_1$$

$$p_{22} = (z_1^2 z_2^2 + ...)_{10}^1 = [z_1 z_2(p_{11} - z_1 z_3 ...)_9 + ...]_{10} =$$
$$= p_{11}^2 - (z_1^2 z_2^1 z_3^1 + ...)_{10}^3 \frac{6\cdot 10}{3\cdot 10} - (z_1 z_2 z_3 z_4 + ...)_5^1 \frac{3\cdot 10}{5} = p_{11}^2 - 2p_1 p_{111} + 2p_{1111}$$

$$p_{220} = (z_1^2 z_2^2 z_3^0 + ...)_{10}^3 = (z_1^2 z_2^2 + ...)_{10}^1 \frac{3\cdot 10}{10} = 3p_{22}$$

$$p_{2200} = (z_1^2 z_2^2 z_3^0 z_4^0 + ...)_5^6 = (z_1^2 z_2^2 + ...)_{10}^1 \frac{6\cdot 5}{10} = 3p_{22}$$

$$p_{22000} = p_{22}$$

$$p_{221} = (z_1^2 z_2^2 z_3^1 + ...)_{10}^3 = [z_1 z_2 z_3 (p_{11} - z_1 z_4 ...)_7 + ...]_{10}^1 =$$
$$= p_{11} p_{111} - (z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^1 + ...)_5^4 \frac{6 \cdot 10}{4 \cdot 5} - (z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 + ...)_1^1 \frac{10}{1} =$$
$$= p_{11} p_{111} - 3 p_{2111} - 10 p_{11111} = p_{11} p_{111} - 3 p_1 p_{1111} + 5 p_{11111}$$
$$p_{2210} = (z_1^2 z_2^2 z_3^1 z_4^0 + ...)_5^{12} = (z_1^2 z_2^2 z_3^1 + ...)_{10}^3 \frac{5 \cdot 12}{3 \cdot 10} = 2 p_{221}$$
$$p_{22100} = p_{221}$$
$$p_{2211} = (z_1^2 z_2^2 z_3^1 z_4^1 + ...)_5^6 = [z_1 z_2 z_3 z_4 (p_{11} - z_1 z_5 ...)_4 + ...]_5^1 =$$
$$= p_{11} p_{1111} - (z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^1 z_5^1 + ...)_1^5 \frac{4 \cdot 5}{5} = p_{11} p_{1111} - 4 p_1 p_{11111}$$
$$p_{22110} = p_{2211}$$
$$p_{22111} = p_{11111} p_{11}$$
$$p_{222} = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 + ...)_{10}^1 = [z_1 z_2 z_3 (p_{111} - z_1 z_2 z_4 ...)_9 + ...]_{10}^1 =$$
$$= p_{111}{}^2 - (z_1^2 z_2^2 z_3^1 z_4^1 + ...)_5^6 \frac{6 \cdot 10}{5 \cdot 6} - (z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^1 z_5^1 + ...)_1^5 \frac{3 \cdot 10}{5} = p_{111}^2 - 2 p_{2211} - 6 p_{21111} =$$
$$= p_{111}^2 - 2 p_{11} p_{1111} + 2 p_1 \, p_{11111}$$
$$p_{2220} = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^0 + ...)_5^4 = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 + ...)_{10}^1 \frac{4 \cdot 5}{10} = 2 p_{222}$$
$$p_{22200} = p_{222}$$
$$p_{2221} = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^1 + ...)_5^4 = [z_1 z_2 z_3 z_4 (p_{111} - z_1 z_2 z_5 ...)_6 + ...]_5^1 =$$
$$= p_{111} p_{1111} - (z_1^2 z_2^2 z_3^1 z_4^1 z_5^1 + ...)_1^{10} \frac{6 \cdot 5}{10} = p_{111} p_{1111} - 3 p_{22111} = p_{111} p_{1111} - 3 p_{11} p_{11111}$$
$$p_{22210} = p_{2221}$$
$$p_{22211} = p_{11111} p_{111}$$
$$p_{2222} = (z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2 + ...)_5^1 = [z_1 z_2 z_3 z_4 (p_{1111} - z_1 z_2 z_3 z_5 ...)_4 + ...]_5^1 =$$
$$= p_{1111}{}^2 - (z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^1 z_5^1 + ...)_1^{10} \frac{4 \cdot 5}{10} = p_{1111}{}^2 - 2 p_{22211} = p_{1111}{}^2 - 2 p_{11111} p_{111}$$
$$p_{22220} = p_{2222}$$
$$p_{22221} = p_{11111} p_{1111}$$
$$p_{22222} = p_{11111}{}^2$$
$$p_3 = (z_1^3 + ...)_5^1 = [z_1{}^2 (p_1 - z_2 ...)_4 + ...]_5^1 = p_1 \, p_2 - (z_1{}^2 z_2{}^1 + ...)_{10}^2 \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 10} = p_1 \, p_2 - p_{21} =$$
$$= p_1 (p_1^2 - 2 p_{11}) - (p_1 p_{11} - 3 p_{111}) = p_1^3 - 3 p_1 p_{11} + 3 p_{111}$$
$$p_{30} = (z_1^3 z_2^0 + ...)_{10}^2 = (z_1^3 + ...)_5^1 \frac{2 \cdot 10}{5} = 4 p_3$$
$$p_{300} = (z_1^3 z_2^0 z_3^0 + ...)_{10}^3 = (z_1^3 + ...)_5^1 \frac{3 \cdot 10}{5} = 6 p_3$$
$$p_{3000} = (z_1^3 z_2^0 z_3^0 z_4^0 + ...)_5^4 = (z_1^3 + ...)_5^1 \frac{4 \cdot 5}{5} = 4 p_3$$
$$p_{3000} = p_3$$
$$p_{31} = (z_1^3 z_2^1 + ...)_{10}^2 = [z_1 z_2 (p_2 - z_3^2 ...)_3 + ...]_{10}^1 = p_2 p_{11} - (z_1{}^2 z_2{}^1 z_3{}^1 + ...)_{10}^3 =$$
$$= p_{11} p_2 - p_{211} = p_{11} (p_1^2 - 2 p_{11}) - (p_1 p_{111} - 4 p_{1111}) = p_1^2 p_{11} - 2 p_{11}^2 - p_1 \, p_{111} + 4 p_{1111}$$

$$p_{310} = (z_1^3 z_2^1 z_3^0 + ...)_{10}^5 = (z_1^3 z_2^1 + ...)_{10}^2 \frac{6 \cdot 10}{10 \cdot 2} = 3 p_{31}$$

$$p_{3100} = (z_1^3 z_2^1 z_3^0 z_4^0 + ...)_5^{12} = (z_1^3 z_2^1 + ...)_{10}^2 \frac{12 \cdot 5}{10 \cdot 2} = 3 p_{31}$$

$$p_{31000} = p_{31}$$

$$p_{311} = (z_1^3 z_2^1 z_3^1 + ...)_{10}^3 = [z_1 z_2 z_3 (p_2 - z_4^2 - z_5^2 ...)_2 + ...]_{10}^1 = p_2 p_{11} - (z_1{}^2 z_2{}^1 z_3{}^1 z_4{}^1 + ...)_5^4 =$$
$$= p_{111}(p_1^2 - 2p_{11}) - (p_1 p_{1111} - 5p_{11111}) = p_1^2 p_{111} - 2p_{11} p_{111} - p_1 p_{1111} + 5p_{11111}$$

$$p_{3110} = (z_1^3 z_2^1 z_3^1 z_4^0 + ...)_5^{12} = (z_1^3 z_2^1 z_3^1 + ...)_{10}^3 \frac{12 \cdot 5}{3 \cdot 10} = 2 p_{311}$$

$$p_{31100} = p_{311}$$

$$p_{3111} = (z_1^3 z_2^1 z_3^1 z_4^1 + ...)_5^4 = [z_1^1 z_2^1 z_3^1 z_4^1 (p_2 - z_5^2)_1 + ...]_5^1 =$$
$$= p_2 p_{1111} - 5p_{11111} p_1 = p_1^2 p_{1111} - 2p_{11} p_{1111} - p_1 p_{11111}$$

$$p_{31110} = p_{3111}$$

$$p_{31111} = p_{1111} p_2 = p_{11111}(p_1^2 - 2p_{11}) = p_1^2 p_{11111} - 2p_{11} p_{11111}$$

$$p_{32} = (z_1^3 z_2^2 + ...)_{10}^2 = [z_1{}^2 z_2{}^2 (p_2 - z_3 ...)_3 + ...]_{10}^1 = p_1 p_{22} - (z_1{}^2 z_2{}^2 z_3{}^1 + ...)_{10}^3 =$$
$$= p_1(p_{11}^2 - 2p_1 p_{111} + 2p_{1111}) - (p_{11} p_{111} - 3p_1 p_{1111} + 5p_{11111}) =$$
$$= p_1 p_{11}{}^2 - 2p_1^2 p_{111} + 5p_1 p_{1111} - p_{11} p_{111} - 5p_{11111}$$

$$p_{320} = 3p_{32}$$

$$p_{3200} = 3p_{32}$$

$$p_{32000} = p_{32}$$

$$p_{321} = (z_1^3 z_2^2 z_3^1 + ...)_{10}^6 = [z_1 z_2 z_3 (p_{21} - z_1^2 z_4^1 - z_1^1 z_4^2 ...)_{14} + ...]_{10}^1 =$$
$$= p_{21} p_{111} - (z_1^3 z_2^1 z_3^1 z_4^1 + ...)_5^4 \frac{60}{20} - (z_1^2 z_2^2 z_3^1 z_4^1 + ...)_1^5 \frac{60}{30} - (z_1^2 z_2^1 z_3^1 z_4^1 z_5^1 + ...)_1^5 \frac{20}{5} =$$
$$= p_{21} p_{111} - 3p_{3111} - 2p_{2211} - 4p_{21111} =$$
$$= p_{111}(p_1 p_{11} - 3p_{111}) - 3(p_2 p_{1111} - p_{11111} p_1) - 2(p_{11} p_{1111} - 4p_1 p_{11111}) - 4p_1 p_{11111} =$$
$$= p_1 p_{11} p_{111} - 3p_{111}^2 - 3p_1^2 p_{1111} + 4p_{11} p_{1111} + 7p_1 p_{11111}$$

$$p_{3210} = 2p_{321}$$

$$p_{32100} = p_{32}$$

$$p_{3211} = (z_1^3 z_2^2 z_3^1 z_4^1 + ...)_5^{12} = [z_1 z_2 z_3 z_4 (p_{21} - z_1^2 z_5^1 - z_1^1 z_5^2 ...)_8 + ...]_5^1 =$$
$$= p_{21} p_{111} - (z_1^3 z_2^1 z_3^1 z_4^1 z_5^1 + ...)_1^5 \frac{4 \cdot 5}{5} - (z_1^2 z_2^2 z_3^1 z_4^1 z_5^1 + ...)_1^{10} \frac{4 \cdot 5}{10} =$$
$$= p_{1111}(p_1 p_{11} - 3p_{111}) - 4p_{11111}(p_1^2 - 2p_{11}) - 2p_{11111} p_{11} =$$
$$= p_1 p_{11} p_{111} - 3p_{111} p_{1111} - 4p_1^2 p_{11111} + 6p_{11} p_{11111}$$

$$p_{32110} = p_{3211}$$

$$p_{32111} = p_{11111} p_{21} = p_{11111}(p_1 p_{11} - 3p_{111}) = p_1 p_{11} p_{11111} - 3p_{111} p_{11111}$$

$$p_{322} = (z_1^3 z_2^2 z_3^2 + ...)_{10}^3 = [z_1{}^2 z_2{}^2 z_3{}^2 (p_1 - z_4 - z_5 ...)_2 + ...]_{10}^1 =$$
$$= p_1 p_{222} - (z_1{}^2 z_2{}^2 z_3{}^1 z_4{}^1 + ...)_5^4 =$$
$$= p_1(p_{111}{}^2 - 2p_{11} p_{1111} + 2p_1 p_{11111}) - (p_{111} p_{1111} - 3p_{11} p_{11111}) =$$
$$= p_1 p_{111}{}^2 - 2p_1 p_{11} p_{1111} + 2p_1{}^2 p_{11111} - p_{111} p_{1111} + 3p_{11} p_{11111}$$

Литература.

1. И.Н. Бронштейн , К.А. Семендяев “Справочник по математике” Москва “Наука” 1980 г.

Работы автора

1.”Решение алгебраических уравнений высоких степеней” - 2003

2.”Отображение алгебраических функций” - 2003

3.”Анализ и синтез математических моделей физических процессов” - 2004

Все работы размещены в Интернете на сайте Компании Безопасность по адресу
http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html

E-mail: office@bezopasnost.ru

Корчагин Игорь Федорович

115191, г. Москва , ул. 3-ая Рощинская д.6

тел. 234-3311,232-0040,737-9268