

Корчагин И.Ф..

**Целочисленные решения
уравнений кривых второго порядка**

**(Решение проблемы
Берча и Свиннертон -Дайера)**

(ФРАГМЕНТ РАБОТЫ « НЕЛИНЕЙНЫЕ
АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ»)

Москва 2008

3. Уравнения второй степени от двух переменных

Постановка задачи.

Уравнение – это задача по отысканию корней образующей его функции. Задача по отысканию координат точек плоскости аргумента, в которых образующая функция принимает нулевые значения.

Нам известно, что геометрическими местами точек (корней) исследуемых образующих функций являются кривые второго порядка – окружность, эллипс, гипербола, парабола и их различные формы. Эти кривые являются сечениями фигур образующих функций плоскостью аргумента. Поэтому мы называем их также опорными кривыми фигур функций. Названные кривые являются общим решением уравнений и образующих их функций. Непрерывным, упорядоченным множеством рабочих точек (корней) определяющим некоторое состояние, фазу рабочего процесса, описываемого образующей функцией.

Для прикладных задач интерес представляют также выбранные определённым образом подмножества, последовательностей корней этих уравнений. Привлекательность таких подмножеств состоит в том, что они упорядочены, являются готовым цифровым образом своего непрерывного аналитического и, соответственно, физического аналога. Для некоторых задач важно также и то, что эти подмножества являются скрытыми под замком своих уравнений.

Повышенный интерес вызывают подмножества целочисленных, наиболее простых по форме корней. Корней, аргументы которых являются целыми числами. Выделение из решения функции организованной последовательности целочисленных корней является основным содержанием ближайших параграфов.

Отметим, в заключение, принципиальные границы возможного проникновения желаемых результатов в решении поставленной задачи. Поставленная задача решения уравнений (например, окружности, с которой, кстати, мы и начнём) от двух переменных принципиально не решается однозначно. Изначально, она разрешима только в параметрической форме

$$X = \pm\sqrt{R^2 - Y^2}$$

Любое второе решение задачи $X = f(Y)$, при приравнивании результатов, должно свестись к первому

$$\pm\sqrt{R^2 - Y^2} \equiv f(Y)$$

ибо, в противном случае, второе переменное превращается в постоянное, что невозможно. Т.о., второго решения задачи не существует. Остаётся, следовательно, решение только в параметрической форме, т.е., принципиально, методом бесконечных переборов фиксированных значений второй переменной. К этому следует быть готовым, чтобы не перехлёстывать в поисках точного расположения точки корня на плоскости по одной координате.

3.1. Целочисленные решения уравнений окружностей и эллипса.

Исследование функций на предмет наличия целочисленных корней начинаем с окружности потому, что, как увидим, она связывает воедино все кривые второго порядка. Более того, расположенные с общим центром концентрации окружности и параболы имеют совпадающие целочисленные корни.

Из желания создать некую периодичность, повторяемость картины предстоящей задачи, выпишем формулы уравнений серии окружностей, образованных функцией второго порядка от двух переменных.

$$P_{22}(X, Y) = Y^2 + X^2 - R_{\mu}^2 = 0 \quad (1)$$

где μ – числа натурального ряда, которыми одновременно обозначаются величина и порядковый номер радиуса окружности. Т.е., здесь радиусам приданы значения ($R_1 = 1, R_2 = 2, R_3 = 3, \dots, R_v = v$) которыми мы будем именовать окружности. Величина радиуса, одновременно, является порядковым номером окружности.

Занесём эти окружности на рисунок (рис.1). На рисунке, из соображений простоты и экономии места, представлен концентрический ряд не целых, а только первых четвертей этих окружностей.

Остальные четверти являются сопряженными частями первой четверти и достаточно легко просматриваются в воображении.

Радиусы (R) окружностей откладываем по осям системы координат монограммы и придаём им только целочисленные (v) значения. Т.е., рассматриваем, для начала, уравнения только с целочисленными коэффициентами.

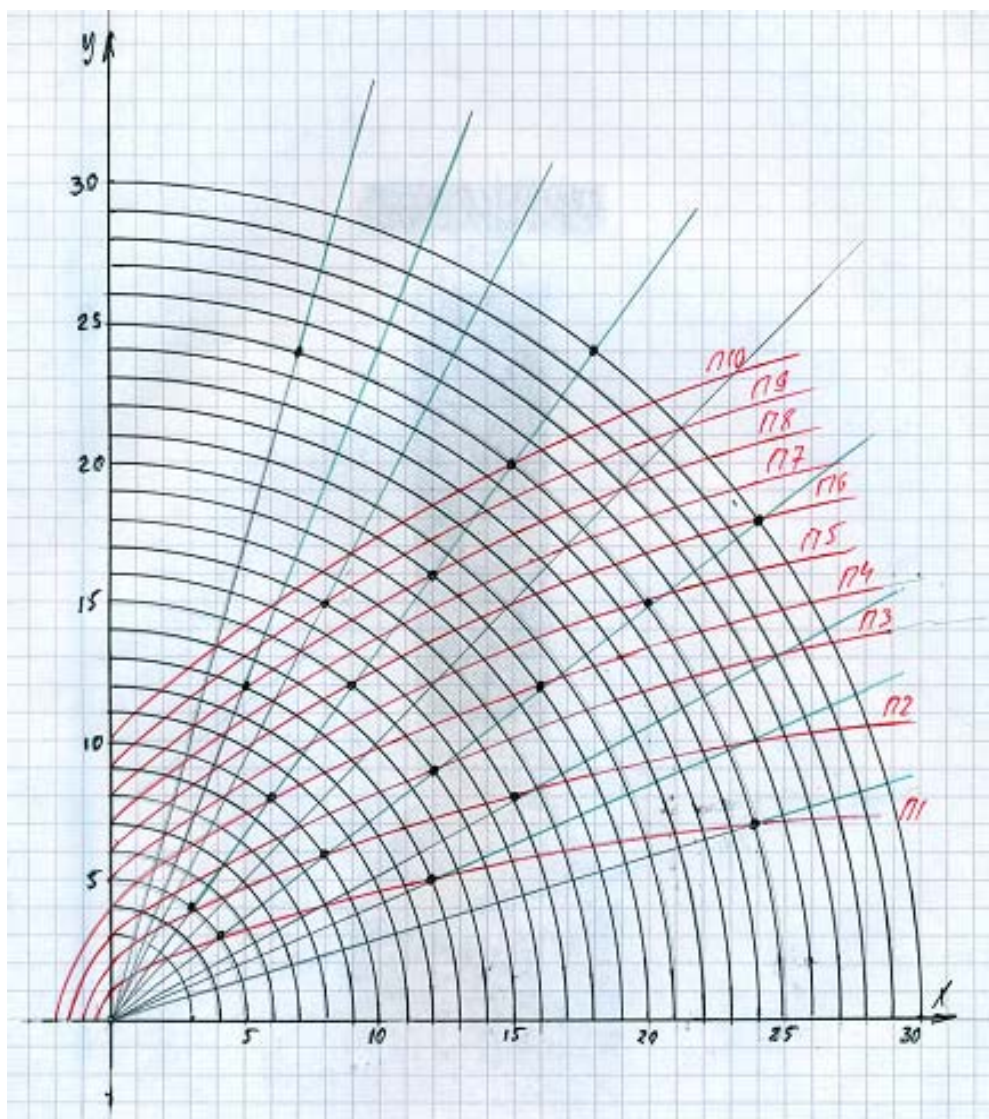


Рис.1 Закономерности распределения целочисленных корней по окружностям.

Целочисленные корни уравнения окружности (1), имеют место только в пересечениях её дуг с узлами масштабной сетки. В пределах поля рисунка (рис.1) корни окружностей вычислены заранее и нанесены выделенными точками.

Какую поверхность, представляет сама функция (1), образовавшая выписанные нами уравнения окружностей (1) мы пока не знаем. И узнаем только после того, когда найдём и проведём анализа её сечений.

Анализ расположения целочисленных корней окружностей показывает, что размещение их подчинено определённому порядку.

Не все окружности имеют целочисленные корни.

Рассматривая распределение точек корней (рис.1) находим, что все корни лежат не только на дугах «счастливых» окружностей, но и на лучах, проходящих через центр системы координат. Продолженные лучи представляют собой центрально расположенный пучок прямых линий. Так и должно быть. Дуги окружностей размещаются во всех квадрантах плоскости аргумента функции (1). Лучи, как и окружности, представляют собой проекции сечений фигуры функции на плоскость аргументов.

Одновременно, все точки корней окружностей группируются, как это видно из рассмотрения монограммы (рис.1), на, организованно размещённых, параболических кривых. Следовательно, это тоже проекции сечений фигуры образующей функции на плоскость аргументов.

Перейдём к более подробному анализу распределения корней окружностей по обнаруженным кривым.

Первая закономерность распределения корней.

Из приведённого рисунка (рис.1) видно

0. Количество целочисленных корней на окружности ограничено.

1. Целочисленные корни встречаются не на всех окружностях целочисленных радиусов.

Это объективные свойства окружностей и её корней. Сейчас мы их обнаруживаем (открываем) и, одновременно, попытаемся объяснить и построить закономерности с тем, чтобы впоследствии использовать для вычисления корней произвольно заданной окружности.

2. Все целочисленные корни концентрических окружностей, дополнительно, размещаются на лучах, исходящих из центра системы координат.

3. Лучи, разделены на две сопряженные (зеркально отражённые) части относительно биссектрисы центрального угла координатного квадранта.

Ниже будет рассматриваться 45-градусный сектор окружностей расположенный между биссектрисой центрального угла и координатной осью (X). Второй сектор, как это явствует из приведённой монограммы, представляет собой зеркальное отображение первого.

4. Корни, расположенные на сопряжённых лучах, тоже взаимно сопряжены относительно биссектрисы. Количество корней на окружности, в силу сказанного и по факту, может быть только чётным.

5. Вдоль лучей корни окружностей распределяются с постоянной разностью. Разность распределения определяется радиусом окружности, на которой расположен ближайший к центру отсчёта (первый) корень луча.

Т.е., целочисленные корни окружностей распределяются вдоль лучей по закономерности арифметической прогрессии первого порядка.

Обозначим первый корень луча его радиус-вектором $\mathbf{r}_1$, модуль которого ($r_1 = R_{\mu_1}$) будем обозначать обычным (не выделенным) шрифтом. Последующие корни ($r_k = R_{\mu_k}$) вдоль этого же луча будут вычисляться формулой арифметической прогрессии первого порядка

$$\mathbf{r}_k = k \mathbf{r}_1 \quad (2)$$

где k – порядковый номер и кратность определяемого корня по отношению к первому корню луча, а (R_{μ_k}) – радиус окружности (1), на которой находится кратный корень.

6. По факту, первые (подчеркнём, именно первые, не кратные) корни лучей размещаются на окружностях только простых (μ_k) чисел или чисел равных произведениям этих же простых чисел.

Обобщая обнаруженные закономерности распределения корней вдоль луча, можно вывести, что на окружности радиуса простого числа может быть только один и только первый (потому, что он не кратен) корень луча.

7. На окружности радиуса простого числа может быть только один и только первый корень луча.

Это важнейшие закономерности, на которых будет создаваться метод вычисления корней целочисленных окружностей.

8. В силу приведённых свойств и по факту, координаты всех последующих корней, размещённых на фиксированном луче, определяются числами кратными относительно координат первого корня.

Т.е., отношение соответствующих координат кратных корней, равно введённому выше числу кратности

$$k = X_k/X_1 = Y_k/Y_1 \quad (3)$$

На введённом уравнении связи радиусов (3), в дальнейшем, будет построено вычисление координат удалённых целочисленных корней.

При необходимости различать лучи будем обозначать их числами первых, из размещённых на них, корней. Будем говорить: «Луч 5», когда будем иметь в виду: «Луч, модуль первого корня которого равен пяти».

У радиус-вектора целочисленного корня окружности, в общем случае, появится второй индекс. Индекс (λ) луча, на котором располагается радиус-вектор – $r_{\lambda k}$. Индекс луча мы будем, при необходимости, присваивать и соответствующему числу кратности корня – k_λ . Аналитически, λ – луч запишем как линию, проходящую через точку центра отсчёта и первый свой корень

$$Y_\lambda = (Y_1/X_1) X_\lambda \quad (4)$$

где буквами (Y_1, X_1) обозначены координаты первого корня.

Если в пересечениях дуги заданной окружности радиуса R с лучами λ_1 и λ_2 имеются корни, то необходимо должно выполняться условие

$$R = k_{\lambda_1} \cdot r_{\lambda_1 1} = k_{\lambda_2} \cdot r_{\lambda_2 1} = k \cdot r_{\lambda_1 1} \cdot r_{\lambda_2 1} \quad (5)$$

Откуда следует, что радиус R окружности несущей корни лучей λ_1 и λ_2 необходимо должен содержать множителями числа $r_{\lambda_1 1}$ и $r_{\lambda_2 1}$.

Действительно. В силу необходимого равенства (5) радиус-векторов удалённых корней, каждый из них, порознь, необходимо является сомножителем радиуса (R) окружности, на которой эти корни находятся.

8. Радиус R окружности несущей целочисленные корни лучей λ_1 и λ_2 необходимо должен содержать множителями модули (r_{λ_1} и r_{λ_2}) радиус-векторов первых корней этих лучей.

Эта закономерность (6) имеет решающее значение для вычисления целочисленных корней окружностей.

9. По факту (рис.1), окружность, несущая корни $r_2 r_{\lambda_1}$ и $r_1 r_{\lambda_2}$ лучей λ_1 и λ_2 несёт также первый корень $r_{\lambda_3} = r_{\lambda_1} \cdot r_{\lambda_2}$ третьего луча.

В частности, когда $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, мы имеем дело с кратным корнем $r_{1,2} = r_2 r_{\lambda_1} = r_1 r_{\lambda_2}$ и корнем $r_3 = r_{\lambda_1} \cdot r_{\lambda_2}$. Однако, свойство (9) имеет и невыясненные исключения.

Например, окружность $R = 25$ (рис.1).

Вторая закономерность распределения корней по концентрическим окружностям.

Анализ рассматриваемой монограммы (рис.1) показывает, что в секторах окружностей, прилегающих к осям координатной системы, на значительных участках широт отсутствуют пересечения дуг окружностей с нормальными координатной сетки. Следовательно, в этих участках секторов не может быть целочисленных корней. Отмечаем, дополнительно, что ближайшая к координатной оси (X) цепочка целочисленных корней ($Y=3, X=4; Y=5, X=12; Y=7, X=14\dots$), лежит в точках первых пересечений дуг окружностей с вертикалями координатной сетки.

Соединяем плавной кривой ближайшие к оси (X) точки монограммы, дополняя их при необходимости точками первых пересечений дуг окружностей с вертикальными линиями координатной сетки.

Идентифицируем полученную линию.

Прежде всего – это кривая второго порядка, так как представляет собой геометрическое место точек пересечений окружностей (кривых второго порядка) и прямых.

Кривая постоянно и бесконечно возрастает. Такова тенденция роста ординат точек первых пересечений дуг окружностей с вертикалями координатной сетки.

Кривая не имеет асимптоты, так как пересекает лучевые линии.

Заключаем.

0. Кривая, на которой лежат корни цепочки ближайшей к оси абсцисс представляет собой параболу.

Здесь, таким образом, сформулирован метод графического построения парабол с помощью циркуля и линейки.

Приведённую процедуру построений можно повторить на вторых, третьих и т.д., точках пересечений дуг окружностей с вертикалями координатной сетки. Результатом построений будет множество парабол, в некоторых из пересечений которых (и только в них) с окружностями, будут встречаться целочисленные корни последних. Это видно на монограмме (рис.1).

Аналогичные построения можно провести и во втором секторе квадранта, вдоль координатной оси ординат. Там будет получено множество парабол смежное первому относительно биссектрисы центрального угла координатного квадранта.

1. Целочисленные корни концентрических окружностей, помимо линейной организации, подчинены ещё и параболической закономерности распределения.

Есть и различие этих закономерностей. Лучами корни окружностей объединяются, собираются. Параболами корни окружностей выявляются, обнаруживаются.

2. Множество парабол первого квадранта, выделяющих целочисленные корни окружностей, как и лучи, разбиты на две сопряжённые, относительно биссектрисы центрального угла, подгруппы.

Аналитически, графически построенную, первую параболу восстановим по первым двум, имеющимся и заведомо ей принадлежащим, точкам целочисленных корней: $Y_1 = 3$, $X_1 = 4$ и $Y_2 = 5$, $X_2 = 12$. Хотя, безусловно, построение можно осуществить и по любым, в том числе и по нецелочисленным точкам.

Составляем систему из уравнения параболы поочерёдной подстановкой значений заданных корней

$$\begin{aligned} Y_1^2 &= 2pX_1 + d_2 \\ Y_2^2 &= 2pX_2 + d_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Разрешая построенную систему относительно неизвестных коэффициентов, можно получить

$$\begin{aligned} 2p &= \frac{Y_1^2 - Y_2^2}{2(X_1 - X_2)} = \frac{9 - 25}{4 - 12} = 2 \\ d_2 &= \frac{X_1 Y_2^2 - X_2 Y_1^2}{X_1 - X_2} = \frac{4 \cdot 25 - 12 \cdot 9}{4 - 12} = 1 \end{aligned} \quad (7)$$

численные значения коэффициентов первой параболы.

Повторяя приведённые выкладки, можно найти коэффициенты парабол расположенных и над первой (8). Выпишем формулы этих парабол

$$\begin{aligned} Y^2 &= 2 \cdot 1 \cdot X + 1^2 \\ Y^2 &= 2 \cdot 2 \cdot X + 2^2 \\ Y^2 &= 2 \cdot 3 \cdot X + 3^2 \\ &\dots\dots\dots \\ Y^2 &= 2pX + p^2 \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее из приведённых уравнений здесь получено как обобщение первых, полученных вычислением.

Отметим, что фокальные параметры парабол (9), выделяющих целочисленные корни, распределяются так же как и радиусы окружностей, без пропусков, по закономерности распределения чисел арифметической последовательности первого порядка

$$p_k = kp_1 \quad (9)$$

Как это видно из рисунка (рис.1) и общей формулы парабол (9), обозначать некоторую частную параболу удобно через фокальный параметр. Действительно. Фокальный параметр это единственный и жёстко привязанный коэффициент рассматриваемых парабол.

В дальнейшем, мы будем говорить: «парабола 1», «парабола 5»,..., подразумевая под этим: «парабола с параметром фокуса 1», «парабола с фокальным параметром 5»,...

Множество соосных парабол, фокусы которых располагаются в одной точке плоскости, будем называть концентрически расположенными параболом.

Концентрические параболы (8), размещённые на монограмме (рис.1), объединены общим свойством, которое можно обнаружить из сравнения формул (6 и 8)

3. *Параболы выделяющие целочисленные корни окружностей связаны между собой общим свойством – равенством квадрата фокального параметра смещению параболы относительно центра отсчёта*

$$p^2 = d_2 \quad (10)$$

4. *Смещение парабол таково, что фокус каждой из них (в силу приведённого свойства 3 и по факту) находится в одной точке плоскости аргумента, в центре системы отсчёта.*

Действительно, раскрыв свойство фокус–смещение параболы (10) через корни (7) и сделав подстановку тривиальных корней ($Y_1 = 0, X = X_1$ и $Y = Y_2, X_2 = 0$), можно найти (рис.1).

$$2X_1 = Y_2 \quad (11)$$

что расстояние от центра координат до вершины кривой вдвое меньше фокального параметра. Т.е., центр отсчёта и фокус парабол – одна и та же точка.

В нашем случае, по факту (рис.1), можно отметить, что, в рассматриваемом первом секторе, множества целочисленных корней концентрических парабол и окружностей совпадают. То же можно сказать и про второй сектор. С той лишь разницей, что там картина монограммы представляет собой зеркальное отображение картины первого сектора.

5. *Множества целочисленных корней концентрических, в одном центром расположенных, парабол и окружностей совпадают.*

Других целочисленных корней ни у парабол, ни у окружностей расположенных на монограмме (рис.1) нет. Концентрические окружности обнаруживают целые корни концентрических парабол, а параболы – окружностей.

Тривиальными конями функции двух переменных будем называть корни, одна или обе из координат которых равны нулю.

Тривиальные корни – это точки пересечения двумерных кривых второго порядка с осями координат. Дальше, такие корни мы знаем как доопределять. Это уравнения от одного переменного, которые мы умеем решать.

6. *Тривиальные корни парабол лежат на осях системы отсчёта.*

В частности, тривиальным корнем окружности нулевого радиуса является точка начала координат.

7. *Ординаты целочисленных корней расположенных вдоль парабол, как это видно из рисунка (рис.1) распределяются по закономерности арифметической прогрессии первого порядка*

Рассмотрим систему уравнений окружности (1) и параболы (8)

$$\begin{aligned} Y^2 + X^2 &= R^2 \\ Y^2 &= 2pX + p^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Основываясь на уравнениях системы, вычислим три последовательности распределения целочисленных корней монограммы (рис.1) вдоль первой и второй парабол (10):

- задаваемое целочисленное значение ординаты (**Y**) корня системы (13) окружность – парабола;
- вычисляемое из уравнения параболы (с параметром соответствующим её номеру) значение абсциссы (**X**) целочисленного корня окружности и параболы;
- вычисляемый из уравнения окружности её радиус (**R**);

– порядковый номер (v) окружности, несущей целочисленные корни, вдоль параболы

Для параболы 1.	Для параболы 2.	
Y_v : 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ...	(т1)
X_v : 0, 4, 12, 24, 40, 60, 84, 112, ...	0, 3, 8, 15, 24, 35, 40, 63, ...	
R_v : 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, ...	2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, ...	
v : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,	

Сравнивая найденное распределение с данными монограммы (рис.1), можно убедиться в совпадении результатов таблицы и рисунка.

Дополнительной проверкой можно убедиться в том, что распределение радиусов, окружностей несущих целочисленные корни, и самих корней вдоль любой из парабол (рис.1) подчиняется тем же закономерностям (т1).

Приведённая таблица (т1) положена в основу метода вычисления целочисленных корней окружностей.

Отмечаем, что распределение (т1) координат корней и радиусов окружностей вдоль первой параболы целиком содержится во второй, только в удвоенном масштабе. Распределение аргумента (Y) корней подчинено закономерности арифметической прогрессии первого порядка. Распределение аргумента (X) корней и радиусов окружностей подчинено закономерности арифметической прогрессии второго порядка, так как и то, и другое – кривые второго порядка.

8. Распределение абсцисс целочисленных корней вдоль линии параболы подчиняется закономерности арифметической прогрессии второго порядка

Из совместного решения уравнений окружности и параболы (12) можно получить общее уравнение связи

$$X = R - p \quad (13)$$

где, X , R и p , соответственно, аргумент, радиус окружности и фокальный параметр параболы, пересекающей окружность в точке общего корня. Это уравнение будет использоваться нами для вычисления абсцисс корней, по заданным или предварительно определённым радиусу окружности и параметру параболы.

Ордината целочисленного корня, лежащего в пересечении окружности и параболы может быть вычислена и из решения уравнения окружности (1) через вычисленную абсциссу по формуле

$$Y_v = \sqrt{R_v^2 - X_v^2} \quad (14)$$

Раскроем разности последовательности распределения радиусов (R) окружностей несущих целочисленные корни вдоль второй параболы (т1)

Последовательность радиусов	R : 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, ...	
Последовательность первых разностей	Δ_1 : 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...	(т2)
Последовательность вторых разностей	Δ_2 : 2, 2, 2, 2, 2, 2, ...	

Как видим – действительно, распределение представляет собой арифметическую прогрессию второго порядка. Нам было заранее ясно, что дело обстоит именно так, потому что выборка точек производится с кривой второго порядка.

9. Распределение радиусов окружностей, несущих целочисленные корни, вдоль линии параболы подчиняется закономерности арифметической прогрессии второго порядка.

Численное значение произвольно выбранного радиуса (R_v) окружности, выбранной вдоль параболы, может быть вычислено полиномиальной формулой [1] для среднего члена арифметической прогрессии второго порядка

$$R_v = \alpha_0 v^2 + \alpha_1 v^1 + \alpha_2 \quad (15)$$

где $(v = 1, 2, 3, \dots)$ – порядковый номер коня и окружности (радиуса R_v), несущей целочисленные корни. Коэффициенты полинома (15) вычисляются из системы уравнений составленной на его (полинома 15) основе. Например, по предварительно вычисленным трём произвольным радиусам окружностей, несущих целочисленные корни, система для вычисления коэффициентов полинома будет выглядеть так

$$\begin{aligned} R_1 &= \alpha_0 1^2 + \alpha_1 1 + \alpha_2 \\ R_2 &= \alpha_0 2^2 + \alpha_1 2 + \alpha_2 \\ R_3 &= \alpha_0 3^2 + \alpha_1 3 + \alpha_2 \end{aligned} \quad (16)$$

Разрешая её, относительно искомым коэффициентов, можно найти

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (R_1 - 2R_2 + R_3)/2 \\ \alpha_1 &= (-5R_1 + 8R_2 - 3R_3)/2 \\ \alpha_2 &= (6R_1 - 6R_2 + 2R_3)/2 \end{aligned} \quad (17)$$

В интересах задачи поставленной в настоящей работе, вычисление коэффициентов (16) производится один раз. Проблема только в памяти.

Подставив найденные значения коэффициентов в формулу полинома (15), можно произвести вычисление любой и любого количества радиусов окружностей, каждая из которых будет нести целочисленные корни. Этот результат заложить в память ещё более выгодно.

Если нас интересует непрерывная последовательность последующих (после первых трёх известных) радиусов окружностей несущих целочисленные корни, то вычисление целесообразно производить таблично. Покажем это на примере.

Пример 1. Известны (рис.1) три радиуса окружностей, несущих целочисленные корни первой параболы 5,13,25. Вычислить последующие радиусы заданного распределения.

Строим таблицу для членов заданной последовательности радиусов и последовательностей их разностей.

Последовательность радиусов	R:	5	13	25	(41)	(61)...
Последовательность первых разностей	Δ_1 :		8	12	(16)	(20)...
Последовательность вторых разностей	Δ_2 :			4	(4)	(4)...

Здесь, числа таблицы, выделенные скобками, внесены вновь. Не выделенные являются заданными.

Далее проводим следующие операции:

- дублируем элемент нижней строки в следующий столбец $4 = (4)$;
- $(4) + 12 = (16)$ и заносим его в таблицу;
- $(16) + 25 = (41)$, заносим его в таблицу.

Повторяя обозначенный цикл вычислений необходимое число раз, выстраиваем нужную последовательность.

Пример 2. Вычислить средние (последующие) радиусы окружностей и координаты размещённых на них целочисленных корней принадлежащих параболе с параметром фокуса равным единице. Вычисление произвести по трём (известным) радиусам: 5,13,25 окружностей (рис.1), несущим целочисленные корни.

Производим вычисление коэффициентов расчетного полинома (15) по формулам (17)

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= (R_1 - 2R_2 + R_3)/2 = (5 - 2 \cdot 13 + 25)/2 = 2 \\ \alpha_1 &= (-5R_1 + 8R_2 - 3R_3)/2 = -(5 \cdot 5 + 8 \cdot 13 - 3 \cdot 25)/2 = 2 \\ \alpha_2 &= (6R_1 - 6R_2 + 2R_3)/2 = (6 \cdot 5 - 6 \cdot 13 + 2 \cdot 25)/2 = 1 \end{aligned}$$

Производим вычисление последующих радиусов, несущих целочисленные корни, окружностей по формуле (15)

$$R_4 = \alpha_0 4^2 + \alpha_1 4^1 + \alpha = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 4 + 1 = 41$$

$$R_5 = \alpha_0 5^2 + \alpha_1 5^1 + \alpha = 2 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 = 61$$

.....

Производим вычисление абсцисс корней по формуле (13)

$$X_4 = R_4 - p_1 = 41 - 1 = 40$$

$$X_5 = R_5 - p_1 = 61 - 1 = 60$$

.....

Производим вычисление ординат корней по формуле (14)

$$Y_4 = \sqrt{R_4^2 - X_4^2} = \sqrt{41^2 - 40^2} = 9$$

$$Y_5 = \sqrt{R_5^2 - X_5^2} = \sqrt{61^2 - 60^2} = 11$$

Проведённый анализ окружностей и выявленных сопутствующих линий с достаточной определённости позволяет сделать вывод о фигуре образующей уравнение (1) функции.

Действительно. Если представить себе линии окружностей, парабол и лучей монограммы (рис.1) сечениями некоторой пространственной фигуры, то фигуру эту следует назвать вертикально расположенный трёхмерный круговой конус второго порядка с вершиной в центре системы координат и осью (Z). В аналитической геометрии этот конус описывается уравнением

$$P_{23}(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - Z^2 = 0 \quad (18)$$

В функциональном анализе построенное выражение (18) называется неявно выраженной функцией. Фигура этой функции (18), как мы выяснили, – конус, сечения которого мы только что исследовали. Тем самым мы выяснили и функцию, образующую уравнение (1). Функцией, образующей уравнение окружности (1) является уравнение кругового конуса (18).

Уравнение конуса (18), в свою очередь, образовано функцией второго порядка уже от трёх переменных. Фигура самой, образующей уравнение конуса функции (18) нам неизвестна и непредставима, так как четырёхмерна. Здесь трёхмерная плоскость аргумента, плюс ордината функции

Последовательности распределения окружностей несущих целочисленные корни.

Некоторое обобщение, проведённого анализа, позволяет вывести общие правила вычисления целочисленных корней распределённых как по концентрически расположенным окружностям, так и корней расположенных на отдельных окружностях. Отметим ещё раз, что здесь мы имеем в виду окружности только целочисленных радиусов, только целочисленные корни, в то же время, постоянно сохраняется возможность перехода и к менее жёстким условиям задачи.

Однако, прежде чем приступить к обобщениям следует убедиться в полноте построенного (рис.1) и описанного множества целочисленных корней окружностей.

Покажем, что в процессе исследования нами не пропущен ни один претендент на целочисленный корень рассматривавшихся окружностей, в поле первого сектора первого координатного квадранта.

Действительно. При движении по дуге окружности (рис.1) от оси X в направлении биссектрисы мы поочерёдно пересекаем все вертикали масштабной сетки плоскости рисунка. Шаг следования величин радиусов окружностей равен шагу масштабной сетки. Через все точки первых пересечений окружностей с вертикалями масштабной сетки мы проводим кривую первой параболы.

Парабола, в нашем случае – это геометрическое место точек пересечений окружностей с вертикалями масштабной сетки.

Через *все* точки вторых пересечений окружностей с вертикалями масштабной сетки проводим вторую параболу, через *все* точки третьих пересечений проводим третью параболу и т.д. Т.е., в поле первого и второго секторов первого квадранта, без пропусков обследуются все пересечения окружностей с вертикалями масштабной сетки.

Встречно, при движении по дуге окружности от оси Y к биссектрисе центрального угла квадранта, строятся сопряжённые параболы. (Этого построения мы не делали, так как из рисунка видно, что пересечения смежных парабол дублируют уже найденные точки корней) Сопряжёнными параболой под контроль берутся *все* пересечения окружностей с горизонталями масштабной сетки.

В результате, параболой «ощупываются» *все* пересечения окружностей с вертикалями и параллелями масштабной сетки первого квадранта. Но, целочисленные корни окружностей могут встречаться только в точках рассматриваемых пересечений линий масштабной сетки и окружностей. Следовательно, можно утверждать, что в процессе исследования, нами не пропущен ни один претендент на целочисленный корень окружности.

Выпишем последовательности радиусов окружностей выделяемых корнями первого десятка парабол (15)

$$\begin{aligned}
 &\text{Парабола 1, } \mathbf{R_1: 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, \dots, (2v^2 + 2v + 1), \dots} \\
 &\text{Парабола 2, } \mathbf{R_2: 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101, 122, \dots, (v^2 + 1), \dots} \\
 &\text{Парабола 3, } \mathbf{R_3: 3, 15, 39, 75, 123, 183, \dots = 3 \cdot (1, 5, 13, 25, 41, 61, \dots)} \\
 &\text{Парабола 4, } \mathbf{R_4: 4, 10, 20, 34, 52, 74, \dots = 2 \cdot (2, 5, 10, 17, 26, 37, \dots)} \\
 &\text{Парабола 5, } \mathbf{R_5: 5, 25, 65, 125, 205, 305, \dots = 5 \cdot (1, 5, 13, 25, 41, 61, \dots)} \\
 &\text{Парабола 6, } \mathbf{R_6: 6, 15, 30, 51, 78, 111, \dots = 3 \cdot (2, 5, 10, 17, 26, 37, \dots)} \\
 &\text{Парабола 7, } \mathbf{R_7: 7, 35, 91, 175, 287, 427, \dots = 7 \cdot (1, 5, 13, 25, 41, 61, \dots)} \\
 &\text{Парабола 8, } \mathbf{R_8: 8, 20, 40, 68, 104, 148, \dots = 4 \cdot (2, 5, 10, 17, 26, 37, \dots)} \\
 &\text{Парабола 9, } \mathbf{R_9: 9, 45, 117, 225, 369, 549, \dots = 9 \cdot (1, 5, 13, 25, 41, 61, \dots)} \\
 &\text{Парабола 10, } \mathbf{R_{10}: 10, 25, 50, 85, 130, 185, \dots = 5 \cdot (2, 5, 10, 17, 26, 37, \dots)} \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\text{Парабола } (2k-1), \mathbf{R_{(2k-1)} = (2k-1) R_1 = (2k-1) (2v^2 + 2v + 1)} \\
 &\text{Парабола } 2k, \mathbf{R_{2k} = 2k R_2 = 2k (v^2 + 1)} \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{т3}$$

где k – порядковый номер строки (т3); параболы; и её фокальный параметр; а $(v = 0, 1, 2, 3, \dots)$ – порядковый номер корня параболы; и радиуса окружности, несущей целочисленный корень.

Каждый член приведённых последовательностей (т3) – это величина радиуса окружности, несущей целочисленный корень. Вместе – это все существующие значения целочисленных радиусов окружностей на которых встречаются целочисленные корни. Больше таких окружностей не существует. Одновременно, каждый член таблицы (т3), является корнем уравнения одной из парабол (15), корнем уравнения одной из окружностей (1) и корнем уравнения одного из лучей (4). Так мы и будем их называть, в зависимости от контекста.

Последовательности (т3) корней парабол 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ..., как это видно, выделяют только кратные радиусы тем первым, которые уже выделены последовательностями корней парабол 1 и 2.

Окружности радиусов, выделяемых первыми корнями парабол (т3), в соответствии с рисунком (рис.1), содержат только тривиальные корни. Эти корни не входят в состав лучей. Это точки оси ординат (Y) монограммы (рис.1).

Чётные члены последовательности корней параболы 2, как это видно (т3), являются удвоенными членами последовательности корней параболы 1. Это двукратные корни первых, которые выделяются корнями параболы 1.

Удаляем чётные члены последовательности корней параболы 2. Оставшаяся последовательность нечётных членов последовательности параболы 2 и последовательность корней параболы 1 представляют собой последовательности первых корней лучей. Выписываем эти последовательности.

$$\begin{aligned}
 &\mathbf{R_1: 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, 221, 285, \dots, (2v^2 + 2v + 1), \dots} \\
 &\mathbf{R'_2: 5, 17, 37, 65, 101, 145, 197, 257, 325, 401, 485, \dots, (4v^2 + 1), \dots}
 \end{aligned} \tag{т4}$$

где, одновременно, исключён (не выделен) первый член (5) второй последовательности. Исключён как элемент сопряженный первому члену первой последовательности (рис.1).

Приведённые последовательности охватывают все возможные радиусы окружностей несущих целочисленные первые (лучеобразующие) корни, но теперь без кратных.

Окружности, радиусов простых чисел (5,13,17,37,41,61,101,113,...), последовательностей (т4), содержат только по одному (рис.1) первому (первому, потому, что он не кратен) корню $Z(X = a, Y = b)$ в первом секторе первого квадранта. Дополнительно, во втором секторе первого квадранта находится корень $Z(X = b, Y = a)$; далее, во втором квадранте находятся корни $Z(X = -a, Y = b)$ и $Z(X = b, Y = -a)$; в третьем квадранте находятся корни $Z(X = -a, Y = -b)$ и $Z(X = -b, Y = -a)$, и наконец, в четвёртом квадранте находятся корни $Z(X = a, Y = -b)$ и $Z(X = -b, Y = a)$.

Для проведения дальнейших исследований, по выявлению окружностей несущих целочисленные корни, таблицы (т3 и т4) удобно разделить на две.

В первую выносятся первая парабола и только ей кратные элементы других парабол (т3)

$$\begin{aligned}
 &\text{Парабола 1. } \mathbf{R}_1: 5, 13, 25, 41, 61, 85, 113, 145, 181, \dots, (2v^2 + 2v + 1), \dots \\
 &\text{Парабола 2'. } \mathbf{R}'_2: 10, 26, 50, 82, 122, 170, 226, 290, 362, 442, 530, \dots \\
 &\text{Парабола 3. } \mathbf{R}_3: 15, 39, 75, 123, 183, 225, 339, 435, 543, 663, 795, \dots \\
 &\text{Парабола 4'. } \mathbf{R}'_4: 20, 52, 100, 164, 244, 340, 452, 580, 724, 884, 1060, \dots \\
 &\text{Парабола 5. } \mathbf{R}_5: 25, 65, 125, 205, 305, 425, 565, 725, 905, 1105, 1325, \dots \quad (\text{т5.1}) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\text{Парабола к. } \mathbf{R}_k = k \cdot \mathbf{R}_1 = k(2v^2 + 2v + 1) \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

где ($k = 1, 2, 3, \dots$) соответствует номеру строки, кратности элементов k -строки элементам первой строки таблицы (т5.1), фокальному параметру параболы, порядковому номеру корня по столбцу таблицы (вдоль луча монограммы). Индекс ($v = 1, 2, 3, \dots$) – это порядковый номер корня вдоль параболы; порядковый номер окружности монограммы (рис.1), несущей целочисленный корень

Здесь чётные параболы отмечены штрихом. В них оставлены только кратные элементам параболы 1 корни чётных парабол 2, 4, 6, 8, ... таблицы (т3). Это те элементы, которые мы удаляли, создавая последовательность $\mathbf{R}'_2$ таблицы (т4) и кратные элементам параболы 1 корни чётных парабол 4, 6, 8, ... таблицы (т3).

Во вторую таблицу занесена купированная вторая парабола $\mathbf{R}'_2$ таблицы (т4) и кратные её элементам, элементы последующих чётных парабол (т3).

$$\begin{aligned}
 &\text{Парабола 2''. } \mathbf{R}''_2: 5, 17, 37, 65, 101, 145, 197, 257, 325, \dots, (4v^2 + 1), \dots \\
 &\text{Парабола 4''. } \mathbf{R}''_4: 10, 34, 74, 130, 202, 290, 394, 514, 650, 802, 970, \dots \\
 &\text{Парабола 6''. } \mathbf{R}''_6: 15, 51, 111, 195, 303, 435, 591, 771, 975, 1203, 1455, \dots \\
 &\text{Парабола 8''. } \mathbf{R}''_8: 20, 68, 148, 195, 404, 580, 788, 1028, 1300, 1604, 1940, \dots \\
 &\text{Парабола 10''. } \mathbf{R}''_{10}: 25, 85, 185, 325, 505, 725, 985, 1285, 1625, 2005, 2425, \dots \quad (\text{т5.2}) \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\text{Парабола 2к } \mathbf{R}''_{2к} = k \cdot \mathbf{R}''_2 = k(4v^2 + 1) \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

где ($k = 1, 2, 3, \dots$), как и в предыдущем случае, соответствует: номеру строки (т5.2), кратности элементов k -строки элементам первой строки таблицы (т5.2), фокальному параметру параболы и порядковому номеру корня вдоль столбца таблицы (луча монограммы). Индекс ($v = 1, 2, 3, \dots$) – это порядковый номер корня вдоль параболы; порядковый номер окружности монограммы (рис.1), несущей целочисленный корень

Здесь (т5.2) парабола 2 таблицы (т3) представлена с изъятими чётными членами, помещёнными во вторую строку таблицы (т5.1) В остальных параболах оставлены элементы только кратные элементам параболы 2.

Проведённым построением, как это можно видеть, все элементы таблицы (т3) перенесены в таблицы (т5.1, 2).

В таблицах (т5) первые строки занимают лучеобразующие, первые корни лучей монограммы (рис.1). Каждая строка таблиц представляет собой последовательность (или часть) корней соответствующей параболы монограммы (рис.1).

Следует отметить, одно неудобство реконструированных таблиц (т5). В таблице (т5.1), номера строк соответствуют кратности увеличения и величинам фокальных параметров парабол. В таблице (т5.2), номера строк соответствуют кратности увеличения, но не соответствуют величинам фокальных параметров парабол. Фокальные параметры парабол в таблицах (т5.2) равны удвоенным значениям кратности и номеров строк.

Каждый столбец таблиц (т5) – это тоже последовательность, организованная закономерностью арифметической прогрессии первого порядка. Это последовательности кратных корней парабол 1 и 2. Это таблично записанные лучи монограммы (рис.1).

Строки матриц (т5) – это корни уравнений парабол, это дискретно записанные параболы. Столбцы – это корни уравнений лучей, это дискретно записанные лучи монограммы (рис.1).

Итогом проведённого анализа распределения корней по окружности и параболе является не только то, что мы теперь знаем эти закономерности, но и то, что мы теперь умеем синтезировать и решать окружности и параболы несущие целочисленные корни.

Вычисление целочисленных корней окружности.

Пусть задана окружность радиуса R.

Первый вопрос, на который следует получить ответ: «Есть ли на заданной окружности целочисленный корень?».

Если на заданной окружности есть целочисленный корень, можно задать второй вопрос: «Как его вычислить?».

Ответ на второй вопрос заключается в определении фокального параметра или, что – то же самое, в определении порядкового номера параболы, на пересечении, заданной окружности с которой, лежит этот корень. Здесь, знание фокального параметра параболы, на которой находится корень, нужно для последующего вычисления его (корня) координат. Уместно напомнить, что мы по-прежнему продолжаем работать только в первом секторе первого координатного квадранта, в то время как постоянно (условно), оперируем понятиями окружность, парабола, выходящими за рамки обозначенного сектора.

На основе результатов проведённого анализа распределения, сформулируем некоторые общие выводы и приёмы, позволяющие, на наш взгляд, более успешно произвести вычисление целочисленных корней окружности.

1. Число, определяющее радиус R заданной окружности, раскладываем на произведение простых сомножителей. Делается это последовательными пробами делений на простые числа элементов первых строк таблиц (т5.1,2). Разложение числа R можно осуществить и последовательными пробами решений уравнений для средних элементов таблиц (т5.1,2)

$$k(2v^2 + 2v + 1) = R \quad (19)$$

$$k(4v^2 + 1) = R \quad (20)$$

где переменные (индексы) должны удовлетворять целочисленным значениям соответствующих таблиц (т5.1,2).

Только наличие или отсутствие элементов, найденных приведёнными способами, в сомножителях заданного радиуса определяет наличие или отсутствие целочисленных корней на заданной окружности.

В случае если будет обнаружено, что радиус R не содержит простых сомножителей равных элементам первых строк таблиц (т5.1,2), на окружности радиуса R нет целочисленных корней.

В случае, когда в составе сомножителей числа R будет обнаружен хотя бы один сомножитель равный элементу первых строк таблиц (т5.1,2), в первом секторе координатного квадранта заданной окружности, имеется целочисленный корень.

2. Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}_1$ – простое число, корень параболы 1 содержащейся в таблице (т5.1). Для окружности $\mathbf{R}$ это число корень, являющийся, одновременно, первым корнем луча $\lambda = \mathbf{r}_1$.

Так как число обнаружено на параболе 1, фокальный параметр её равен $p_1 = 1$. Если бы число $\mathbf{r}_1$ было обнаружено на параболе 2, таблицы (т5.2), фокальный параметр параболы следовало бы принять равным $p_1 = 2$.

3. Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ – составное число, где $\mathbf{r}_1$ содержится в первой строке одной из матриц (т5), а второй $\mathbf{r}_2$ не содержится. Число $\mathbf{r}_2$ может быть составным, но ни один из его сомножителей не содержится в первых строках таблиц (т5.1,2).

На заданной окружности радиуса $\mathbf{R}$, в этом случае, имеется один кратный величине $\mathbf{r}_2$ корень на луче $\mathbf{r}_1$. Действительно, числа кратности строк обеих матриц (т5.1,2) пробегают все натуральные числа. Значит, или в первой, или во второй таблицах, в $\mathbf{r}_2$ –той строке на пересечении со столбцом $\mathbf{r}_1$ должно стоять число $|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2|$ – целочисленный корень, принадлежащий параболе $\mathbf{r}_2$ – той строки таблиц (т5.1,2), лучу $\mathbf{r}_1$ и окружности $\mathbf{R}$.

Если корень $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ расположен в первой таблице (т5.1) то фокальный параметр параболы вычисляется по формуле (9) и равен $p_k = 1 \cdot \mathbf{r}_2$. Если корень $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ расположен во второй таблице (т5.2), то $p_k = 2 \cdot \mathbf{r}_2$.

Пример 3. $\mathbf{r}_1 = 5$, $\mathbf{r}_2 = 6$. Чему соответствует – $\mathbf{R} = |\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2| = 30$, шестой элемент столбца **5**, таблицы (т5.1). Это окружность радиуса $\mathbf{R} = 30$, луч 5 и парабола 6 (т5.1) (с параметром $p_6 = 1 \cdot 6 = 6$), имеющие своим общим корнем точку плоскости аргумента с радиус-вектором $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$, на луче 5.

4. Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$, где оба простых числа $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ находятся в последовательностях корней парабол (1, 2), в первых строках таблиц (т5.1,2). В этом случае, в первых строках таблиц следует искать и третье число – $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$. Оно там может быть, а может и не быть. Это объективное, невыясненное свойство (9) корней вдоль лучей окружности.

Если оно есть в первой строке одной из таблиц, то это тоже лучеобразующий корень. Тогда на окружности $\mathbf{R}$ находятся три корня: на луче $\mathbf{r}_1$ кратный $\mathbf{r}_2$ корень $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$; на луче $\mathbf{r}_2$ кратный $\mathbf{r}_1$ корень $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$; на луче $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ его первый, однократный, лучеобразующий корень $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ с фокальным параметром параболы последовательности которой он обнаружен. Фокальные параметры парабол с корнями $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2$ вычисляются по формуле (9) $p_r = \mathbf{r}_2 \cdot p_{r_1}$ и $p_r = \mathbf{r}_1 \cdot p_{r_2}$, где p_{r_1} и p_{r_2} , соответственно, фокальные параметры парабол выделяющих лучеобразующие корни $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

В случае, когда имеет место равенство $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, два предыдущих кратных корня объединяются в один $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1$. Корень $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1$ опять, может быть, а может и не быть в таблицах (т5.1,2). Т.е., в итоге, корней на окружности $\mathbf{R}$ может быть или один или два.

Фокальные параметры парабол, несущих корни окружности $\mathbf{R}$ строго определяются номерам нижних парабол, в последовательностях которых обнаруживаются числа $|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1|$ и $|\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_1|$.

5. Пусть $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, где все три сомножителя содержатся в таблицах (т5.1,2) и, следовательно, являются лучеобразующими окружностями. Заданное произведение из трёх лучей сомножителей представим последовательностью сочетаний из трёх по три, по два и по одному лучу: $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$. Ибо, в соответствии с монограммой (рис.1) и таблицей (т5.1,2), каждое из приведённых сочетаний может оказаться лучеобразующим корнем. Приведённые сочетания определяют максимальное количество корней заданной окружности радиуса $\mathbf{R}$. Уменьшение количества корней может произойти вследствие отсутствия в первых строках таблиц (т5.1,2) каких то из трёх парных и тройного произведений сомножителей заданного радиуса $\mathbf{R}$ окружности. Т.е., как минимум, на заданной окружности должно остаться три корня.

6. Пусть выяснено, что на окружности радиуса $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$ существуют корни на лучах: $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$.

6.1 Абсцисса $\mathbf{X}$ однократного корня луча $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$ вычисляется по формуле (13)

$$\mathbf{X} = \mathbf{R} - k \cdot p_1 \quad (21)$$

Здесь число кратности $k = 1$, так как число $\mathbf{R}$ является элементом первых строк таблиц (т5.1,2). Фокальный параметр соответствующей параболы $p_1 = 1$, если число $\mathbf{R}$ является элементом таблицы (т5.1) или $p_1 = 2$, если число $\mathbf{R}$ является элементом таблицы (т5.2).

Абсцисса $\mathbf{X}$ корня $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$ кратности $\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, луча $\mathbf{r}_1$ вычисляется по той же формуле (13), где $k = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_3$, а фокальный параметр p_1 соответствует параболе выделяющей радиус $\mathbf{r}_1$.

Абсциссы двух оставшихся корней вычисляются в соответствии с изложенным.

6.2. Ординаты корней вычисляются из решения уравнения заданной окружности по формулам (14) по найденной абсциссе X

$$Y = \sqrt{R^2 - X^2} \quad (22)$$

Пример 4. Есть ли корень на окружности радиуса $R=155$? В пересечении с параболой какого параметра?

$R = 155 = 5 \cdot 31 = r_1 \cdot r_2$ – первый множитель r_1 радиуса содержится в последовательности лучеобразующих корней (т5.1) параболы 1 ($p_1 = 1$). Второй r_2 – не обнаружен в последовательностях (т5.1,2). Следовательно. На заданной окружности имеется один целочисленный корень кратности r_2 на луче r_1 . Фокальный параметр параболы, в пересечении с которой находится наш кратный корень, определяется формулой (9)

$$p_k = k \cdot p_1 = 31 \cdot 1$$

Отметим, что если б первый множитель r_1 был выбран из последовательности корней (т5.2) параболы 2 ($p_1 = 2$), фокальный параметр параболы определяющей кратный корень оказался бы равным $p_k = k \cdot p_1 = 31 \cdot 2$. Т.е., был бы определён смежный относительно биссектрисы центрального угла квадранта корень (рис.1). Корень второго сектора первого квадранта.

Пример 5. Вычислить корни окружности радиуса $R=181$.

Число 181 является корнем (т5.1) параболы с фокальным параметром $p_1=1$
Абсциссу корня вычисляем по формуле (13)

$$X = R - p = 181 - 1 = 180$$

Ординату корня вычисляем по формуле (14)

$$Y = \sqrt{R^2 - X^2} = \sqrt{181^2 - 180^2} = 19$$

Найденный корень является первым на луче 181.

Пример 6. Вычислить корни первого сектора окружности радиуса $R=285$ в первом координатном квадранте.

Представляем заданную величину радиуса в форме произведения простых сомножителей

$$R=5 \cdot 57$$

Первый сомножитель произведения является (т5.1) корнем параболы 1. Вторым сомножитель не является корнем парабол ни 1, ни 2 (т5). Корень заданной окружности может быть только 57-кратным корнем луча 5.

Вычисляем абсциссу корня заданной окружности по формуле (13)

$$X = R - r_2 p = 285 - 57 \cdot 1 = 228$$

Вычисляем ординату корня заданной окружности по формуле (14)

$$Y = \sqrt{R^2 - X^2} = \sqrt{285^2 - 228^2} = 171.$$

Других целочисленных корней в первом секторе первого квадранта у заданной окружности нет.

Целочисленные корни уравнений эллипсов.

Представим уравнение эллипса

$$P_2(X, Y) = \frac{Y^2}{b^2} + \frac{X^2}{a^2} - 1 = 0 \quad (23)$$

в форме

$$(a/b)^2 Y^2 + X^2 = a^2 \quad (24)$$

Из приведённой формы видно, что эллипс может рассматриваться, как параллельно (одной из осей) деформированная окружность. Если отношение полуосей (a/b) численно больше единицы окружность превращается в эллипс вытянутый по оси X . Отношение равно единице – окружность осталась окружностью. Отношение меньше единицы – окружность превращается в эллипс вытянутый вдоль оси Y .

Для определённости, в дальнейшем будем полагать, что отношение полуосей численно больше единицы, что радиус $(R = a)$ исходной окружности остаётся неизменным и равным большой полуоси эллипса. Т.е., рассматриваем деформацию исходной окружности только по оси ординат плоскости аргумента, когда при различных преобразованиях окружности в эллипс, мы получаем различными только значения полуоси (b) эллипса. Т.о., нами задаются линейные функции отображения

$$\begin{aligned} Y &= (b/R)\bar{Y} \\ X &= \bar{X} \end{aligned} \quad (25)$$

и условия: $R = a \geq b$, которыми окружность (1)

$$\bar{Y}^2 + \bar{X}^2 = R^2 \quad (26)$$

преобразовывается в эллипс (24).

$$(R/b)^2 Y^2 + X^2 = R^2 \quad (27)$$

Отмечаем, что линейное отображение окружности в эллипс является внутритиповым. Для функций различных типов, как мы знаем, такая возможность исключена (разд. 2). Т.е., в данном случае, мы имеем дело с функциями одного типа.

Окружность и эллипс функции одного типа.

Применительно к гиперболе, функции отображения (25), преобразовывают равностороннюю фигуру в неравностороннюю. Применительно к параболе, изменяется фокальный параметр кривой. Т.е., тоже внутритиповые преобразования. Это мы увидим несколько позже.

Итак, можно сделать вывод. Целочисленные корни эллипса пересчитываются из целочисленных корней окружности по формулам отображения (25). Где имеется виду, что радиус окружности постоянен и равен большой полуоси эллипса.

Пример 1. Задана большая полуось эллипса $a = R = 285$, окружности такого же радиуса решенной нами в примере (6, разд.3). При каких значениях малой полуоси (b) на эллипсе будут целочисленные корни?

Абсциссы корней эллипсов, в соответствии с формулами отображения (25) постоянны и равны абсциссе целого корня заданной окружности

$$X = 228.$$

Ординату целого корня эллипса вычисляем формулой отображения (25) в функции величины малой полуоси

$$Y = b \frac{\bar{Y}}{R} = b \frac{171}{285} = b \frac{3}{5}.$$

откуда следует, что малая полуось эллипса должна быть выбрана, исходя из полученного условия и условий отображения (25)

$$b = 5\nu \quad \text{и} \quad R = a \geq b$$

где $b < 285$ и $\nu = 1, 2, 3, \dots < 285/5 = 57$ – целое натуральное.

Откуда можно получить возможные значения для малой полуоси создаваемого эллипса и соответствующих ординат его целочисленного корня

$$b = 5[1, 2, 3, \dots, 57]$$

$$Y = 3[1, 2, 3, \dots, 57]$$

Здесь мы не проводили исследования сечений фигуры образующей уравнение эллипса функции (23), так как ограничились рассмотрением единичного эллипса. Если рассматривать уравнение единичного эллипса, то функцией образующей его уравнение будет эллиптический цилиндр.

Если рассматривать концентрическую серию эллипсов, то образующей её функцией следует признать эллиптический конус второго порядка. Концентрическая серия эллипсов рассматривалась нами при разборе примера 1.

3.2. Целочисленные корни уравнений гипербол.

Практически, здесь будет повторено всё, что было проделано в отношении окружности. Теперь мы построим серию равносторонних гипербол и найдём, что их целочисленные корни организованы лучами, а определяются эти корни пересечениями гипербол с параболы. Построим последовательности точек пересечений, которые определяют нам полуось гиперболы и фокальный параметр параболы. Вычислим координаты целочисленных корней, размещённых на гиперболе.

Запишем уравнение равносторонней гиперболы

$$P_2(X, Y) = Y^2 - X^2 - a^2 = 0 \quad (30)$$

Именно её мы и будем строить. Неравносторонние гиперболы будут получены из равносторонней аналогично тому, как преобразовывались окружности в эллипсы.

Построение равносторонней гиперболы.

На листе с масштабной сеткой и прямоугольными осями координат (рис.1), из точки начала координат, откладываем отрезки полуосей ($a = \pm 4$) гиперболы.

– Устанавливаем опорную ножку циркуля в точку центра отсчёта, а ножку пишущего стержня в точку +5 оси абсцисс.

– Установленным раствором делаем отметку на ординате, над абсциссой (–a). Помечаем полученную точку буквой Y_1 и переносим её значение на ординату над абсциссой +5. Нами получена вторая, после вершины, точка (Y_{11}) выстраиваемой гиперболы.

– Устанавливаем раствор циркуля до точки +6, и в порядке выше изложенного находим следующую (Y_{12}) точку выстраиваемой гиперболы.

Чтобы убедиться в том, что точки Y_{11} Y_{12} , принадлежат гиперболе, следует применить формулу гиперболы (30) к построенным треугольникам $0(-a)Y_1$, $0(-a)Y_2$.

Упрощая процедуру построения, точки $Y_{11}, Y_{12} \dots$ можно откладывать непосредственно, но из точек абсцисс $+1, +2, \dots$ (см. рис.2).

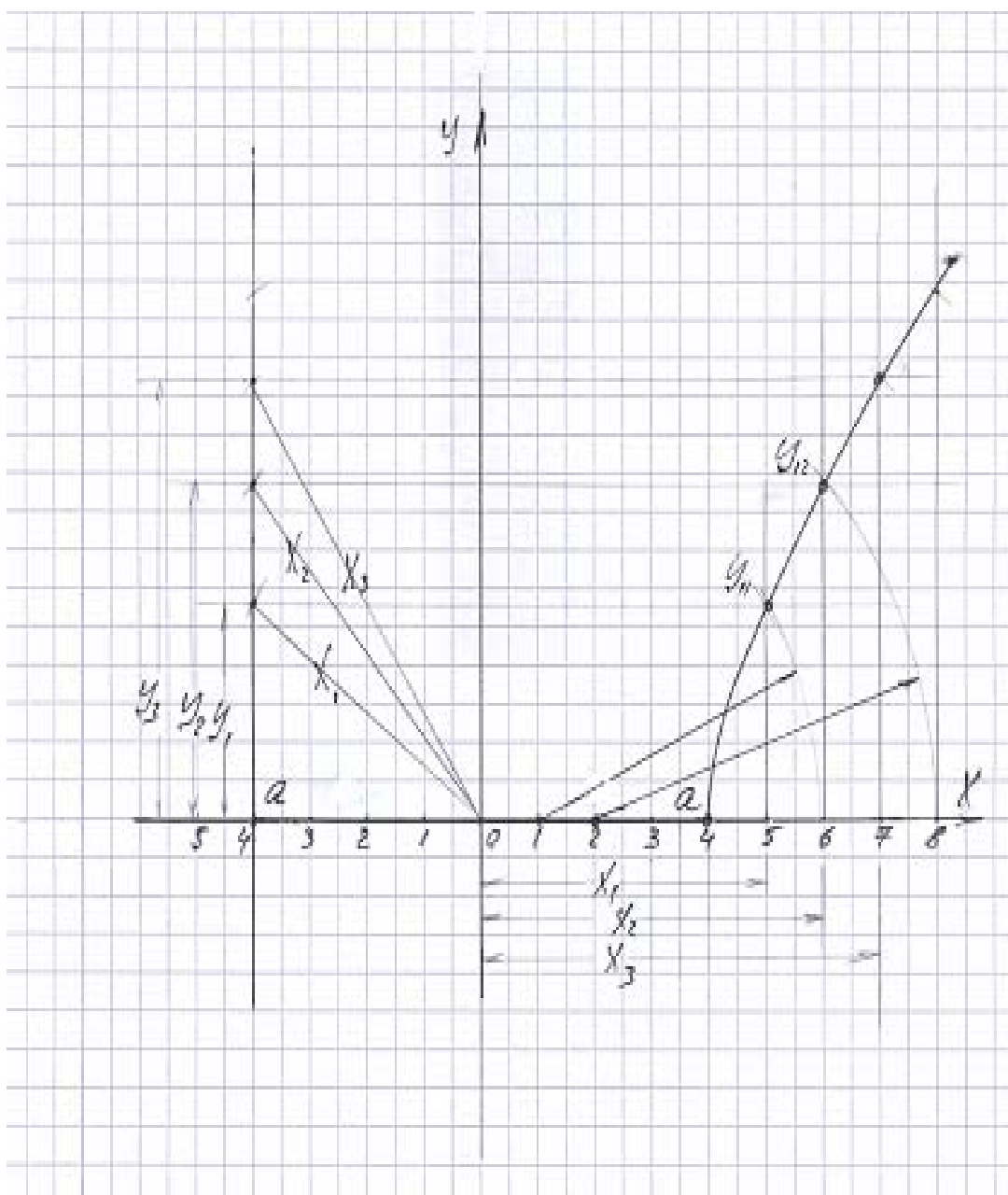


Рис.2. Построение равносторонней гиперболы.

Закономерности распределения корней по гиперболам.

На рисунок (рис.3) нанесена, с шагом масштабной ячейки, серия полуветвей равносторонних гипербол с полуосями, $a = 1, 2, 3, \dots$

На поле рисунка, на гиперболы нанесены, заранее вычисленные, точки их целочисленных корней.

Кривые гипербол, как это видно, заканчиваются на ограничивающей линии

$$Y = X - 1 \quad (31)$$

Выше этой линии (рис.3) вплоть до асимптоты (она же – биссектриса центрального угла первого координатного квадранта) целочисленных корней вдоль линий гипербола быть не может. Здесь расстояние, между ограничивающей линией и общей асимптотой гипербола, меньше масштабной ячейки. Исключаемый шлейф гипербола не может встретить узел масштабной сетки и «произвести» целочисленный корень.

Количество целочисленных корней на гиперболе конечно.

Из совместного решения уравнений гипербола (30) и ограничивающей линии (31) можно получить предельное значение для абсцисс и ординат целочисленных корней гипербола с заданной полуосью (a)

$$X_{\max} = \frac{a^2 + 1}{2}, \quad Y_{\max} = \frac{a^2 - 1}{2} \quad (32)$$

Отличительной особенностью распределения корней гипербола является то, что они размещаются на прямых параллельных ограничивающей линии (31). На линиях

$$Y = X - \gamma \quad (33)$$

где $\gamma = 1, 2, 3, \dots$ – шаг следования новых, объединяющих корни гипербола, линий.

Нижние полуветви гипербола сопряжены с верхними полуветвями относительно действительной оси (X) гипербола. Именовывать гипербола будем численными значениями их действительных полуосей.

Все целочисленные корни гипербола, как это видно, размещаются на лучах, в полном соответствии с тем как это было в случае с окружностью. Вдоль луча корни гипербола распределяются по закономерности арифметической прогрессии первого порядка. Лучи, как и в предыдущем случае, будем именовать значением полуоси ближайшей к центру отсчёта гипербола, на которой находится корень луча. Корень этот будем именовать первым корнем луча. Каждый следующий, после первого, корень луча будем называть кратным первому. Его кратность (k), в соответствии с закономерностью арифметической прогрессии, равна отношению величин полуосей

$$a_k = k \cdot a_1 \quad (34)$$

Отмечаем точки первых пересечений ветвями гипербола вертикалей масштабной сетки, при движении вдоль её линии от действительной оси к асимптоте. Плавная линия, соединяющая выделенные точки, как и в случае окружности, представляет собой параболу

$$Y^2 = 2X - 1 \quad (35)$$

правда, несколько по другому размещённую. Здесь, между абсциссой и параболой (35), тоже не может быть целочисленных корней. Это видно из монограммы (рис.3).

Отмечая точки вторых пересечений гипербола с вертикалями масштабной сетки, можно построить, соответственно, вторую параболу. Далее третью, четвёртую, и т.д.

$$\begin{aligned} Y^2 &= 2 \cdot 1 \cdot X - 1 \\ Y^2 &= 2 \cdot 2 \cdot X - 2^2 \\ Y^2 &= 2 \cdot 3 \cdot X - 3^2 \\ &\dots\dots\dots \\ Y^2 &= 2 \cdot p \cdot X - p^2 \end{aligned} \quad (36)$$

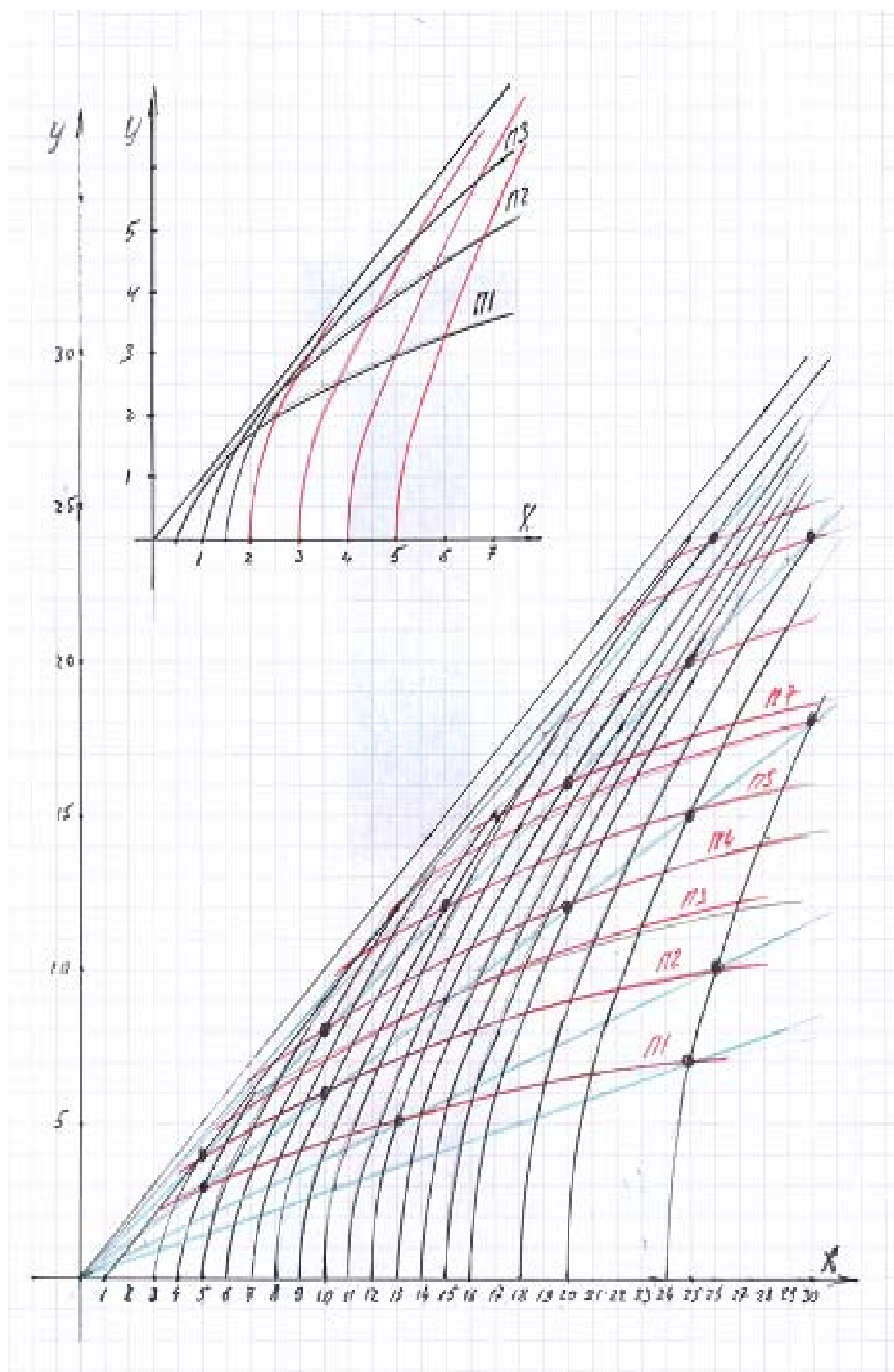


Рис.3. Распределения целочисленных корней по гиперболам.

Последняя парабола (36) построена как обобщение первых. Сдвиг парабол, как и в случае с окружностями, оказался численно равным квадрату фокального параметра. Поменялось только направление сдвига. Построенные параболы, как это видно, имеют общую директрису, смещённую с осью ординат системы отсчёта. Отмеченное свойство можно доказать и аналитически.

Целочисленные корни парабол естественным образом совпадают с целочисленными корнями гипербол, так как точки пересечений кривых располагаются, по построению, на масштабных линиях. Парабола, таким образом, выделяет гиперболы несущие целочисленные корни. Множество выделенных параболой корней гипербол полно, что можно доказать аналогично тому, как это делалось в случае с окружностью.

Совместное решение уравнений гиперболы (30) и параболы (36), позволяет найти формулу вычисления абсциссы общего корня

$$X_k = R - p_k \quad (37)$$

через коэффициенты кривых.

Подставляя в формулу (37) предельное значение абсциссы (32) корня, можно вычислить предельное значение для фокального параметра параболы, за которым (выше по линии гиперболы) отсутствуют целочисленные корни последней

$$p_{\max} = \frac{(a-1)^2}{2} \quad (38)$$

В силу наличия «свободной зоны» (от целочисленных корней) за линией (31), гиперболы (рис.3) могут нести лишь ограниченные последовательности целочисленных корней, заканчивающиеся на пересечении с параболой предельного фокального параметра (40).

Записав приведённую формулу (37) один раз для первого корня луча и второй раз – для некоторого среднего (p_k) и учитывая принятое определение кратности (34), можно найти

$$p_k = k \cdot p_1 \quad (39)$$

что фокальный параметр параболы k кратного корня на луче кратен фокальному параметру первой параболы 1, выделяющей первый корень этого луча. Т.е., распределение фокальных параметров парабол подчинено закономерности арифметической прогрессии первого порядка, что видно и непосредственно из рассмотрения системы парабол (36)

Ординаты корней уравнения гиперболы, как и в случае окружности, будем вычислять непосредственно из уравнения исследуемой кривой

$$Y = \sqrt{X^2 - a^2} \quad (40)$$

по предварительно найденному значению абсциссы.

Набор и анализ обнаруженных сечений фигуры образующей уравнения гипербол функции показывает, что все они принадлежат пространственной фигуре трёхмерного кругового конуса

$$P_{23}(X, Y, Z) = Y^2 + Z^2 - X^2 = 0 \quad (41)$$

Теперь, однако, этот конус лежит в плоскости аргумента (X,Y). Вершина его находится в начале координат, а осью его является абсцисса (X).

В начале настоящего раздела была высказана мысль о том, что уравнения всех кривых второго порядка объединяет окружность. Теперь мы получили объективное тому обоснование. Высказанная мысль, оказывается, имеет своё развитие. Кривые второго порядка не просто объединены, а породнены фигурой своей единой образующей функцией. Конусом второго порядка. Мы подошли к издревле известной истине изнутри и это отраднo утверждает нас в верности поисков.

Последовательность распределения полуосей гипербол вдоль линии парабол.

Выписываем таблицу последовательностей полуосей A_k гипербол, выделяемых параболами

Парабола 1.	A_1 :	4, 12, 24, 40, 60, 84, 112, 144, ..., $(2v^2 + 2v)$, ...
Парабола 2.	A_2 :	3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80, ..., $(v^2 + 2v)$, ...
Парабола 3.	A_3 :	12, 36, 72, 120, 180, 252, 336, 432, 540, 660, ...
Парабола 4.	A_4 :	6, 16, 30, 48, 70, 96, 126, 160, 198, 240, ...
Парабола 5.	A_5 :	20, 60, 120, 200, 300, 420, 560, 720, 900, 1100, ...
Парабола 6.	A_6 :	9, 24, 45, 72, 105, 144, 189, 240, 297, 360, ...
Парабола 7.	A_7 :	28, 84, 168, 280, 420, 588, 784, 1008, 1260, 1540, ...
Парабола 8.	A_8 :	12, 24, 60, 96, 140, 192, 252, 320, 396, 480, ...
Парабола 9.	A_9 :	36, 108, 216, 360, 540, 756, 1008, 1296, 1620, 1980, ...
Парабола 10.	A_{10} :	15, 40, 75, 120, 175, 240, 315, 400, 495, 600, ...
(т6)		
.....		
Парабола (2к-1).	$A_{2к-1}$:	$= (2к-1) A_1 = (2к-1) (2v^2 + 2v)$
Парабола 2к	$A_{2к}$:	$= 2к A_2 = 2к (v^2 + 2v)$

Построенную таблицу, как и в случае с радиусами окружностей, можно представить себе последовательностями корней одновременно трёх уравнений – уравнений парабол, уравнений гипербол и уравнений лучей монограммы (рис.3). В соответствии с тем как это было в случае с окружностью, выведены формулы вычисления и средних (общих) элементов последовательностей первой и второй парабол.

В отличие от аналогичных последовательностей построенных для радиусов окружностей, здесь парабола 1 состоит из составных, а не из простых чисел. Однако, по-прежнему, только первые две параболы (1 и 2) содержат лучеобразующие полуоси, по-прежнему, чётные элементы параболы 2 представляют собой удвоенные элементы параболы 1.

Исключаем эти элементы и их кратные из чётных последующих парабол и, в качестве самостоятельных (чётных с надстрочным штрихом) последовательностей, вносим в одну таблицу с нечётными параболами

Парабола 1.	A_1 :	4, 12, 24, 40, 60, 84, 112, 144, ..., $(2v^2 + 2v)$, ...
Парабола 2'.	A'_2 :	8, 24, 48, 80, 120, 160, 224, 288, 360, 440, ...
Парабола 3.	A_3 :	12, 36, 72, 120, 180, 252, 336, 432, 540, 660, ...
Парабола 4'.	A'_4 :	16, 48, 96, 160, 240, 320, 448, 576, 720, 880, ...
Парабола 5.	A_5 :	20, 60, 120, 200, 300, 420, 560, 720, 900, 1100, ...
(т7.1.)		
.....		
Парабола к.	A_k :	$= к \cdot A_1 = к (2v^2 + 2v)$

где $к = 1, 2, 3, \dots$ – порядковые номера строк таблицы, парабол и величины параметров парабол. Индекс $v = 1, 2, 3, \dots$ – это порядковые номера корней парабол и столбцов таблицы.

Построенная таблица нечётных последовательностей является рабочей. С её помощью, в полном соответствии с тем как это было в случае работы с окружностями (т5.1.), определяются полуоси составляющих гипербол и фокальные параметры соответствующих парабол.

Из купированных остатков чётных парабол исходной таблицы (т6) строим рабочую таблицу чётных последовательностей полуосей гипербол

Парабола 2''.	A_2 :	3, 15, 35, 63, 99, 143, 195, 255, 323, ..., $(4v^2 - 1)$, ...
Парабола 4''.	A_4 :	6, 30, 70, 126, 198, 286, 390, 510, 646, 798, 966, ...
Парабола 6''.	A_6 :	9, 45, 105, 189, 297, 429, 585, 765, 969, 1197, 1449, ...
Парабола 8''.	A_8 :	12, 60, 140, 252, 396, 572, 780, 1020, 1292, 1596, 1932, ...
Парабола 10''.	A_{10} :	15, 75, 175, 315, 495, 715, 975, 1275, 1615, 1995, 2415, ...
(т7.2.)		
.....		
Парабола 2к.	$A_{2к}$:	$= 2к \cdot A_2 = 2к (4v^2 - 1)$

где $k = 1, 2, 3, \dots$ – порядковые номера строк таблицы, парабол и величины параметров парабол. Индекс $v = 1, 2, 3, \dots$ – это порядковые номера корней парабол и столбцов таблицы.

Вычисление целочисленных корней равносторонних гипербола.

Вычисление целочисленных корней гипербола производится строго в соответствии с методикой изложенной в разделе посвящённом окружности. Следует только заменить слова «радиус окружности» на слова «полуось гипербола».

Пример 1. Вычислить целочисленные корни равносторонней гипербола с полуосью $A = 180$.

– Представляем полуось заданной гипербола в форме произведения простых сомножителей – $A = 180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

– Выписываем последовательность всех сочетаний разных сомножителей по одному, по два, по три, и т.д. до полного их количества:

~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~,
~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~,
~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~,
~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~, ~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~,
~~2~~·~~2~~·~~3~~·~~3~~·~~5~~.

– Вычёркиваем из построенной последовательности члены, в которых произведение выделенных сомножителей не образует лучеобразующих корней таблиц (т7).

– Заключаем. На заданной равносторонней гиперболе, с полуосью $A = 180$, находятся: шестидесяти кратный корень на пересечении с лучом $3 - (3 \cdot 60)$, а также корни: $4 \cdot 45$, $15 \cdot 12$, $12 \cdot 15$, $60 \cdot 3$, $180 \cdot 1$.

– Абсциссы найденных корней заданной гипербола вычисляем по формуле (37)

$$\begin{aligned} X_{3 \cdot 60} &= A_{180} + k \cdot p_1 = 180 + 60 \cdot 2 = 300 \\ X_{4 \cdot 45} &= A_{180} + k \cdot p_1 = 180 + 45 \cdot 1 = 225 \\ X_{15 \cdot 12} &= A_{180} + k \cdot p_1 = 180 + 12 \cdot 2 = 204 \\ X_{12 \cdot 15} &= A_{180} + k \cdot p_1 = 180 + 15 \cdot 1 = 195 \\ X_{60 \cdot 3} &= A_{180} + k \cdot p_1 = 180 + 3 \cdot 1 = 183 \\ X_{180 \cdot 1} &= A_{180} + k \cdot p_1 = 180 + 1 \cdot 1 = 181 \end{aligned}$$

где значение фокального параметра (p_1) снималось каждый раз с параболы, определяющей полуось гипербола, на которой находится лучеобразующий корень.

– Ординаты корней вычисляем по формуле заданной гипербола и соответственно получаем

$$Y = \sqrt{X^2 - A^2} = 40, 135, 96, 75, 33, 19.$$

Вычисление целочисленных корней неравносторонних гипербола.

Отобразим равностороннюю гиперболу (30)

$$P_2(X, Y) = \bar{Y}^2 - \bar{X}^2 + a^2 = 0 \quad (42)$$

функциями отображения

$$\begin{aligned} Y &= (b/a) \bar{Y} \\ X &= \bar{X} \end{aligned} \quad (43)$$

в неравностороннюю гиперболу

$$P_2(X, Y) = (a/b)^2 Y^2 - X^2 + a^2 = 0 \quad (44)$$

Видно, что неравносторонняя гипербола является результатом параллельной (относительно действительной оси X) деформации равносторонней гиперболы. Т.е., равномерное сжатие или растяжение ординат фигуры функции при неизменной абсциссе. Можно наоборот. Можно вместе.

Таким образом, если нам задана и решена равносторонняя гипербола, то корни неравносторонней гиперболы можно получить как результат преобразования функциями отображения (43). Действительно, ведь все точки кривой функции оригинала однозначно отображаются в точки кривой функции образа.

Не вызывает сомнений и фигура образующей функции. Для одиночной кривой – это, безусловно, гиперболический цилиндр. Для серии – гиперболический конус второго порядка.

Пример 2. При каких значениях полуоси b образ гиперболы примера 1 будет иметь целым первый корень?

Абсцисса корня останется неизменной при любых значениях полуоси b . Ординату вычисляем по формуле (43)

$$Y_1 = b \frac{240}{180} = b \frac{4}{3}, \quad b = 3\kappa$$

где κ – произвольное целое число.

3.3. Целочисленные корни парабол, заданных в канонической форме.

Парабола с целыми коэффициентами, в отличие от прочих кривых второго порядка, каждая имеет целочисленные корни. Причём, организованное по закономерности прогрессии второго порядка, бесконечное множество. Это свойство параболы позволяет несколько проще подойти к задаче вычисления её целочисленных корней.

На рисунке (рис.4) размещена серия полупарабол канонической формы

$$P_2(X, Y) = Y^2 - 2p_v X = 0 \quad (45)$$

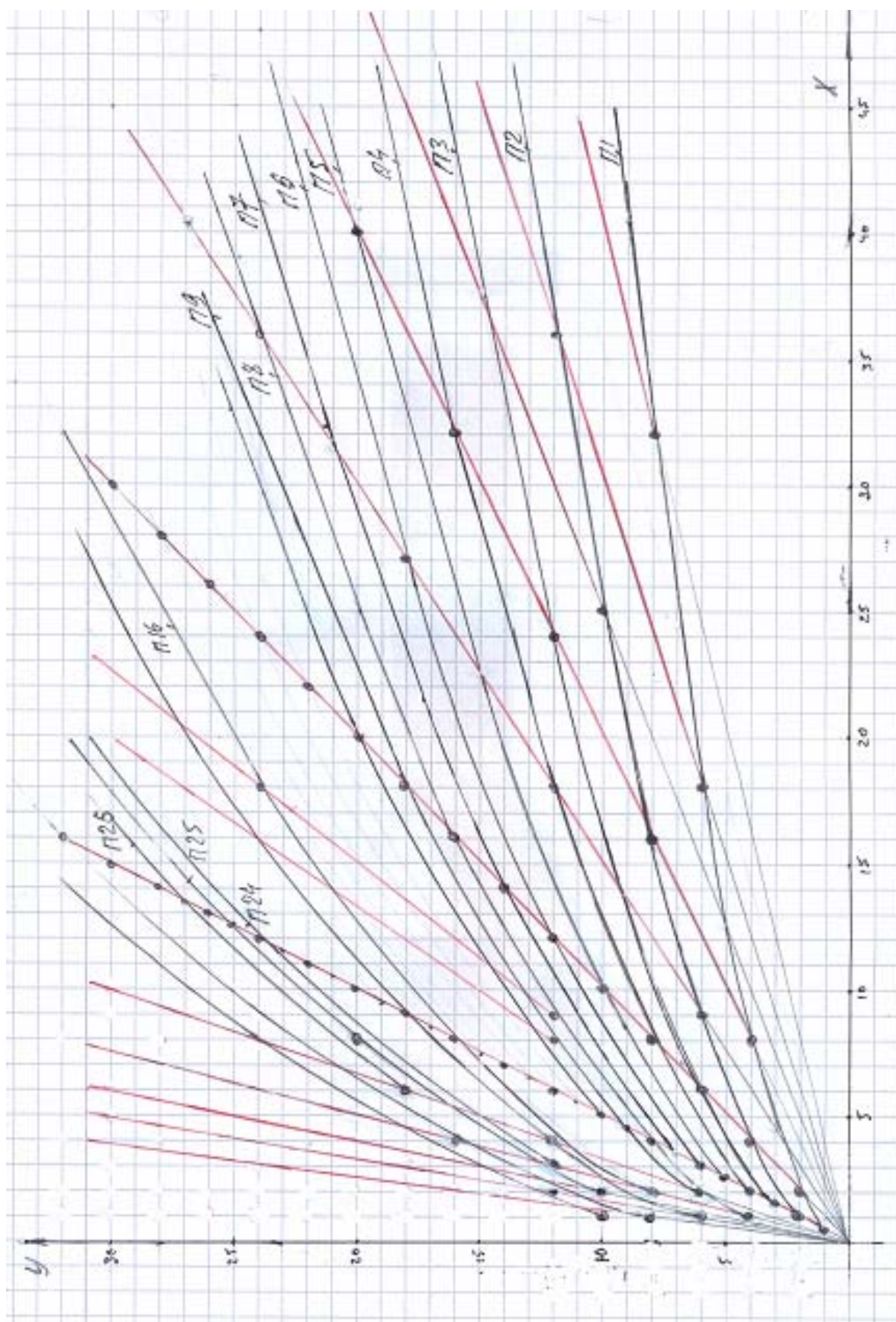
в функции параметра своего фокального показателя.

Вторая половина, парабол зеркально отображается относительно своей оси, размещённой на абсциссе плоскости аргумента.

Вершины парабол совмещены с центром системы отсчёта. Построение осуществлено графическим линейным сдвигом парабол рисунка (рис.1), т.е., линейным отображением, осуществляемым посредством линейки или циркуля. Параболы (рис.4) отличаются только своими фокальными параметрами, которыми мы и будем их обозначать. На параболах отмечены точки их целочисленных корней.

Корни парабол, как это видно, одновременно являются корнями лучей, исходящих из центра системы координат. Вдоль лучей корни распределяются по закономерности арифметической прогрессии первого порядка, что облегчает, при необходимости, построение кривых с большими фокальными параметрами.

Фигурой функции образующей уравнения парабол рассматриваемой серии по-прежнему является круговой конус второго порядка. Образующая линия этого конуса совпадает с осью ординат пространства. Вершина конуса размещается в начале системы координат.



ис.4. Распределение целочисленных корней парабол.

Построим, непосредственным подбором по формуле (45), таблицу целочисленных корней для первых пяти парабол 1,2,3,4,5 (рис.4.)

Парабола 1	$X_{lv} : 2, 8, 18, 32, 50, \dots, 2\nu^2, \dots = 2(1, 4, 9, 16, 25, \dots, \nu^2, \dots)$ $Y_{lv} : 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2\nu, \dots = 2(1, 2, 3, 4, 5, \dots, \nu, \dots)$	(т8)
Парабола 2	$X_{lv} : 1, 4, 9, 16, 25, \dots, 2\nu^2, \dots = 1(1, 4, 9, 16, 25, \dots, \nu^2, \dots)$ $Y_{lv} : 2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2\nu, \dots = 2(1, 2, 3, 4, 5, \dots, \nu, \dots)$	
Парабола 3	$X_{lv} : 6(1, 4, 9, 16, 25, \dots, \nu^2, \dots)$ $Y_{lv} : 6(1, 2, 3, 4, 5, \dots, \nu, \dots)$	
Парабола 4	$X_{lv} : 2(1, 4, 9, 16, 25, \dots, \nu^2, \dots)$ $Y_{lv} : 4(1, 2, 3, 4, 5, \dots, \nu, \dots)$	
Парабола 5	$X_{lv} : 2(1, 4, 9, 16, 25, \dots, \nu^2, \dots)$ $Y_{lv} : 4(1, 2, 3, 4, 5, \dots, \nu, \dots)$	

Здесь каждый столбец матрицы представляет координаты ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) – того (слева на право) корня параболы 1.

Последовательность абсцисс корней параболы 1 представляет собой арифметическую прогрессию второго порядка. Члены её равны, соответственно, удвоенным квадратам чисел натурального ряда.

Последовательность ординат (т8.) корней параболы 1 представляет арифметическую прогрессию первого порядка. Члены прогрессии представляют собой подряд выписанные, удвоенные числа натурального ряда.

Последовательности могут быть продлены с использованием включённых в них общих формул средних членов.

По существу, построенные последовательности представляют собой табличную (точечную) форму записи аналитически заданной (45) параболы 1.

Обращает на себя внимание то, что структурно, координаты корней парабол представляют собой произведения из переменного числового коэффициента и постоянной последовательности. Это закономерность. Объясняется она, тем что при переходе к последующей параболе изменяется лишь общий числовой коэффициент (параметр), не переменное.

Введём обозначение для постоянного сомножителя элементов последовательностей таблицы (т8)

$$\begin{aligned} X_v &= 1, 4, 9, 16, 25, \dots, \nu^2, \dots \\ Y_v &= 1, 2, 3, 4, 5, \dots, \nu, \dots \end{aligned} \quad (46)$$

Последовательности абсцисс и ординат корней таблицы (т8), соответственно, можно записать в сокращённом виде

$$\begin{aligned} \text{Парабола 1.} \quad X_{lv} &= 2 \cdot X_v \\ Y_{lv} &= 2 \cdot Y_v \end{aligned} \quad (47)$$

в котором они и будут фигурировать в дальнейшем.

Замечаем, что, так как постоянные последовательности (46) начинаются с единиц, числовые коэффициенты таблиц корней парабол (47) всегда будут равны первым членам последовательностей корней (т8). Таким образом, для построения таблицы (и, соответственно, последовательности корней) очередной параболы необходимо вычислить только первый её корень.

Проведя построения аналогичные предыдущим, выпишем в прок таблицы корней первых десяти парабол

$$\begin{array}{ll}
 \text{П1} & X_{1v} = 2 \cdot X_v \\
 & Y_{1v} = 2 \cdot Y_v \\
 \text{П2} & X_{2v} = 1 \cdot X_v \\
 & Y_{2v} = 2 \cdot Y_v \\
 \text{П3} & X_{3v} = 6 \cdot X_v \\
 & Y_{3v} = 6 \cdot Y_v \\
 \text{П4} & X_{4v} = 2 \cdot X_v \\
 & Y_{4v} = 4 \cdot Y_v \\
 \text{П5} & X_{5v} = 10 \cdot X_v \\
 & Y_{5v} = 10 \cdot Y_v \\
 \text{П6} & X_{6v} = 3 \cdot X_v \\
 & Y_{6v} = 6 \cdot Y_v \\
 \text{П7} & X_{7v} = 14 \cdot X_v \\
 & Y_{7v} = 14 \cdot Y_v \\
 \text{П8} & X_{8v} = 1 \cdot X_v \\
 & Y_{8v} = 4 \cdot Y_v \\
 \text{П9} & X_{9v} = 2 \cdot X_v \\
 & Y_{9v} = 6 \cdot Y_v \\
 \text{П10} & X_{10v} = 5 \cdot X_v \\
 & Y_{10v} = 10 \cdot Y_v
 \end{array} \tag{т9}$$

где X_v и Y_v раскрываются по формулам (46).

Отмечаем, что числовые коэффициенты построенных формул не образуют упорядоченных последовательностей. Т.е., для каждой вновь заданной параболы, вычисление корней следует начинать с построения своей таблицы аналогичной приведённым в (т9).

Пример 1. Построить последовательность целочисленных корней парабол 8, 10.

Раскрываем таблицы координат корней (т9) парабол 8, 10

$$\begin{array}{ll}
 \text{П8} & X_{8v} = 1 \cdot X_v = 1 \cdot (1, 4, 9, 16, 25, \dots, v^2, \dots) = 1, 4, 9, 16, 25, \dots, 1v^2, \dots \\
 & Y_{8v} = 4 \cdot Y_v = 4 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, \dots, v, \dots) = 4, 8, 16, 20, 50, \dots, 4v, \dots \\
 \text{П10} & X_{10v} = 5 \cdot X_v = 5 \cdot (1, 4, 9, 16, 25, \dots, v^2, \dots) = 5, 20, 45, 80, 125, \dots, 5v^2, \dots \\
 & Y_{10v} = 10 \cdot Y_v = 10 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, \dots, v, \dots) = 10, 20, 30, 40, 50, \dots, 10v, \dots
 \end{array}$$

где ($v=1,2,3,\dots$) – порядковый номер корня заданной параболы.

Столбцы построенных матриц представляют собой последовательности целочисленных корней распределённых вдоль линий парабол 8 и 10 (рис.4)

Пример 2. Построить последовательность корней параболы 36.

В соответствии с формулой (45) параболы, удваиваем её фокальный параметр и раскладываем полученное число на простые сомножители

$$2 \cdot 36 = 2^3 \cdot 3^2$$

Определяем минимальное число, дополняющее заданное до полного квадрата – это число 2. В соответствии с формулой (45) параболы, этому числу должна быть равна абсцисса первого корня заданной параболы $X_{36,1} = 2$. Ордината первого корня заданной параболы, соответственно равна $Y_{36,1} = 12$. Выписываем формулу сокращённой записи последовательности (т9) корней заданной параболы и раскрываем её

$$\begin{array}{ll}
 \text{П36} & X_{36,1} = 2 \cdot X_v = 2 \cdot (1, 4, 9, 16, 25, \dots) = 2, 8, 18, 32, 50, \dots \\
 & Y_{36,1} = 12 \cdot Y_v = 12 \cdot (1, 2, 3, 4, 5, \dots) = 12, 24, 36, 48, 60, \dots
 \end{array}$$

Литература

1. Корчагин И. Ф. «Симметричные алгебраические моменты» - 2003

<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>

2. Корчагин И. Ф. «Отображение алгебраических функций» - 2003

<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>

3. Корчагин И. Ф. «Решение алгебраических уравнений высоких степеней» – 2003

<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>

4. Корчагин И. Ф. «Общее предельное решение алгебраических уравнений» - 2005

<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>

5. Корчагин И. Ф. «Анализ и синтез математических моделей физических устройств и процессов» - 2004

6. Корчагин И. Ф. «Алгебраические уравнения» . — М.: Физматкнига, 2006.

7. Корчагин И. Ф. «Теория отображения алгебраических функций» . — М.: Физматкнига, 2006.

8. Корчагин И.Ф. «Решение проблемы Г. Римана и построение ряда простых чисел» - 2008

<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>

