

### **Аннотация**

Настоящая статья является продолжением работы автора “Решение алгебраических уравнений высоких степеней”, в которой обоснованы принцип разделения уравнений на элементарные и решение последних в общей форме. Здесь детализуются принципы, выводятся практические приемы и “конечные” формулы решения уравнений.

# Общее предельное решение алгебраических уравнений

## Введение

Открытие теории отображений [1]–[4] оправдало себя уже появлением своих первых трех приложений. Первое из них — это возможность дальнейшего развития аналитических приемов вычислительной математики в теоретически обоснованные, систематизированные методы. Второе — это возможность построения практически приемлемых общих решений алгебраических уравнений, позволяющих перейти от констатации факта наличия или отсутствия качественного признака (что мы имеем при численном решении) к управлению этим признаком функций. Третье. Отображение позволяет произвольно изменять качественные признаки функций, т.е. подстраиваясь, исследовать неведомые или создавать новые, в том числе, и прежде всего, математические модели конструируемых устройств и процессов.

## § 1. Общие закономерности распределения корней

Пусть задано уравнение пятой степени

$$Z^5 - p_1 Z^4 + p_{11} Z^3 - p_{111} Z^2 + p_{1111} Z - p_{11111} = 0 \quad (1)$$

а его образ на плоскость  $\nu$ -го порядка

$$Z_\nu^5 - p_\nu Z_\nu^4 + p_{\nu\nu} Z_\nu^3 - p_{\nu\nu\nu} Z_\nu^2 + p_{\nu\nu\nu\nu} Z_\nu - p_{\nu\nu\nu\nu\nu} = 0 \quad (2)$$

(здесь имеется в виду стандартное отображение) распался на элементарные подуравнения

$$\begin{aligned} Z_\nu^5 - p_\nu Z_\nu^4 + p_{\nu\nu} Z_\nu^3 &= p_{\nu\nu} Z_\nu^3 - p_{\nu\nu\nu} Z_\nu^2 \\ &= p_{\nu\nu\nu} Z_\nu^2 - p_{\nu\nu\nu\nu} Z_\nu = p_{\nu\nu\nu\nu} Z_\nu - p_{\nu\nu\nu\nu\nu} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Вычислим и перенумеруем корни подуравнений (3) и уравнения (1) в порядке их написания (слева направо) (3)

$$\begin{aligned}
Z_{1,2}(\nu) &= \sqrt[\nu]{\frac{p_\nu \pm \sqrt{p_\nu^2 - 4p_{\nu\nu}}}{2}}. \\
Z_3(\nu) &= \sqrt[\nu]{\frac{p_{\nu\nu\nu}}{p_{\nu\nu}}}. \\
Z_4(\nu) &= \sqrt[\nu]{\frac{p_{\nu\nu\nu\nu}}{p_{\nu\nu\nu}}}. \\
Z_5(\nu) &= \sqrt[\nu]{\frac{p_{\nu\nu\nu\nu\nu}}{p_{\nu\nu\nu\nu}}}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Назовем установленный порядок (4) чередования корней каноническим. Тогда основной (первой) закономерностью распределения корней уравнения является утверждение

$$|Z_1| \geq |Z_2| > |Z_3| > |Z_4| > |Z_5| \tag{5}$$

То есть, при достаточно высокой степени точности вычисления, модули корней уравнения расположенные в каноническом порядке (5) не могут возрастать. Только быть равными или убывать.

Выведенное свойство не является каким бы то ни было привнесенным правилом, оно есть объективный феномен, феномен чередования корней. Наличие этого свойства позволило разложить уравнение (1) на подуравнения (3) и ввести в математику предельное решение уравнений.

На рис. 1а представлена числовая сфера. На ней южный полюс — это начало отсчета. Нулевой меридиан — ось действительных чисел. Прочие меридианы — геометрическое место чисел постоянного аргумента. Экватор — геометрическое место точек с модулем равным единице. Широты — геометрическое место чисел постоянного модуля. Числа противоположные относительно точки сферы единица — обратные числа, т.е.  $Z$  и  $Z^{-1}$ . Обратным числом числа ноль является число “бесконечность” (точка северного полюса сферы).

На рис. 1б представлена карта числовой сферы. На карте северный полюс сферы представляет наружная окружность (карты). Экватор — внутренняя окружность. Меридианы — соответствующие долготы и координатные оси.

Отобразим заданное уравнение (1) на числовую сферу (рис. 1) функцией

$$\varkappa = \frac{Z}{\sqrt[5]{p_{11111}}}. \tag{6}$$

В качестве образа получим уравнение в относительной, числовой форме

$$\varkappa^5 - \psi_1 \varkappa^4 + \psi_{11} \varkappa^3 - \psi_{111} \varkappa^2 + \psi_{1111} \varkappa - 1 = 0 \tag{7}$$

со свободным коэффициентом

$$\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3 \varkappa_4 \varkappa_5 = 1, \tag{8}$$

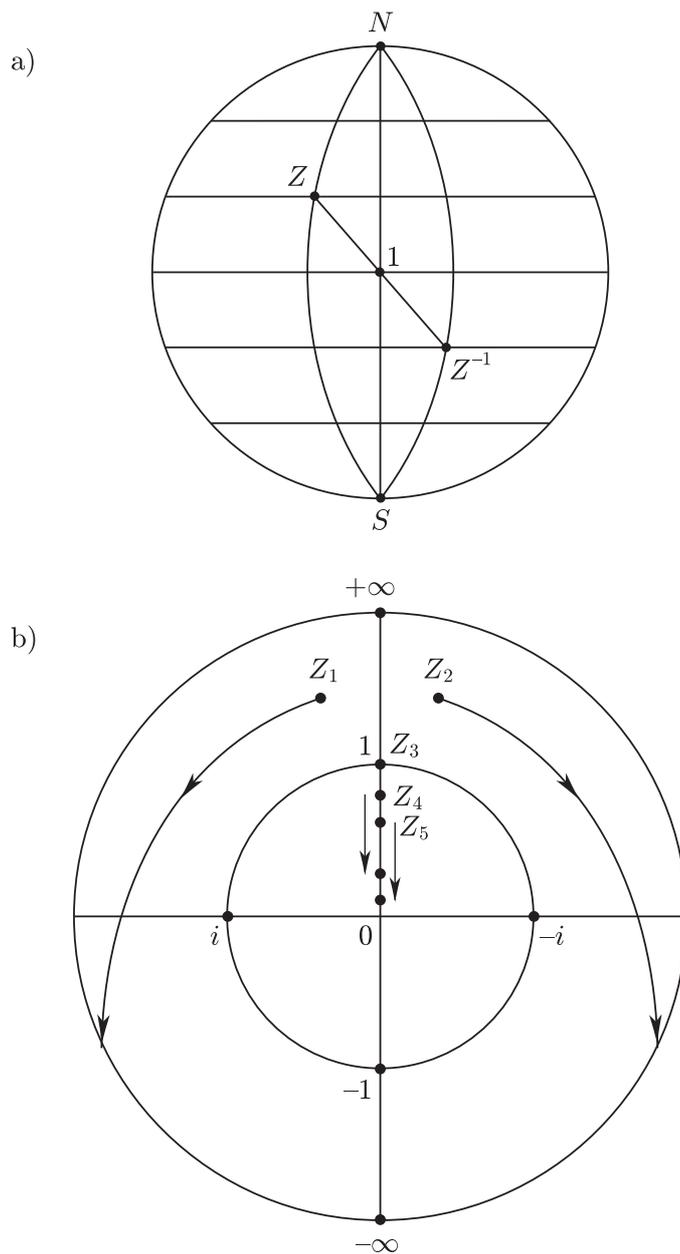


Рис. 1: а) — числовая сфера; б) — карта числовой сферы.

равным единице. Это означает, что в общем случае, корни заданного уравнения размещаются по разные стороны экватора сферы и по разные стороны единичной окружности карты. Предположим, что наибольшие, равномодульные корни  $\varkappa_1$  и  $\varkappa_2$  — комплексны (т.е. сопряжены и по модулю больше единицы). Действительные корни  $\varkappa_3 = 1$ , а  $\varkappa_4$  и  $\varkappa_5$  соответственно меньше единицы (так, как это показано на карте сферы (рис. 1b)). Здесь полагаем  $\varkappa = Z$ .

При отображении заданного уравнения (1), в относительной форме (7), стандартными функциями

$$\varkappa_\nu = \varkappa^\nu, \quad \nu > 1 \quad (9)$$

видно, особенно если представить функцию отображения (9) непрерывной функцией непрерывного аргумента  $\nu$ , что корни верхнего полушария по своим (сопряженным) годографам асимптотически устремляются к наружной окружности карты; единичный корень  $\varkappa_3$  остается на месте а действительные корни ( $\varkappa_4$  и  $\varkappa_5$ ) меньшие единицы устремляются к началу координат по нулевому меридиану. В процессе непрерывного отображения ни один из корней не может пересечь линию экватора, что представляет собой вторую из основных закономерностей распределения корней.

Корни остаются действительными, если они изначально действительны. Корни остаются комплексными сопряженными, если они изначально комплексны. (Здесь, в случаях, когда годографы пересекают оси координат, корни становятся действительными кратными и мы относим их к комплексно сопряженным). Свойство инвариантности характера корней отображению представляют собой третью закономерность распределения корней.

Последовательной чередой отображений заданное уравнение естественно разделяется на два независимых подуравнения. Одно с модулями корней больше радиуса экватора карты и другое — с модулями корней меньше радиуса экватора карты. В абсолютных единицах радиус экватора карты равен корню степени уравнения из свободного коэффициента.

Порядку чередования корней соответствует и определенный порядок чередования коэффициентов уравнения, что является следствием формул вычисления (4) корней. Это обстоятельство позволяет еще до приближенного вычисления корней произвести разделение уравнения на подуравнения.

**Пример 1.** Пусть задано уравнение

$$\begin{aligned} Z^5 - p_1 Z^4 + p_{11} Z^3 - p_{111} Z^2 + p_{1111} Z - p_{11111} \\ = Z^5 - 15Z^4 + 85Z^3 - 225Z^2 + 274Z - 120 = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

Составляем матрицу коэффициентов уравнений образов

$\nu$	$p_\nu$	$p_{\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu\nu\nu}$
1	15	85	225	274	120
2	55	1023	7645	21076	14400
4	979	247731	16908529	$224 \cdot 10^6$	$207 \cdot 10^6$
8	$463 \cdot 10^3$	$28,7 \cdot 10^9$	$175 \cdot 10^{12}$	$43173 \cdot 10^{12}$	$43 \cdot 10^{15}$

Коэффициенты уравнений-образов здесь вычислялись по формулам таблиц [1]–[3].

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1^2 - 2p_{11} = 15^2 - 2 \cdot 85 = 55, \\ p_{22} &= p_{11}^2 - 2p_1 p_{111} + 2p_{1111} = 1023, \\ p_{222} &= p_{111}^2 - 2p_{11} p_{1111} + 2p_1 p_{11111} = 7645, \\ p_{2222} &= p_{1111}^2 - 2p_{111} p_{11111} = 21076, \\ p_{22222} &= p_{11111}^2 = 14400 \end{aligned} \quad (12)$$



$Z_3$  уравнения соответствует возрастающая последовательность моментов  $p_\nu, p_{\nu\nu}, p_{\nu\nu\nu}$ , а корням  $Z_4, Z_5$  южного полушария соответствует убывающая последовательность моментов  $p_{\nu\nu\nu\nu}, p_{\nu\nu\nu\nu\nu}$  уравнения. Причем картина соответствия становится все более очевидной с ростом порядка ( $\nu$ ) отображающей функции.

Таким образом, в случаях, когда заданное уравнение имеет значительную степень, оно может быть последовательно разделено на естественные подуравнения по границам перелома между возрастающими и убывающими последовательностями моментов (коэффициентов).

В рассматриваемом случае заданное уравнение (10) разделяется на два подуравнения

$$\begin{aligned} Z_\nu^3 - p_\nu Z_\nu^2 + p_{\nu\nu} Z_\nu - p_{\nu\nu\nu} Z_\nu &= 0, \\ p_{\nu\nu\nu} Z_\nu^2 - p_{\nu\nu\nu\nu} Z_\nu + p_{\nu\nu\nu\nu\nu} Z_\nu &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Далее, каждое из полученных (17) подуравнений разделяется на свои естественные составляющие. Например, поделив каждый из корней  $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$  (16) на их среднее геометрическое, можно увидеть, что подуравнение третьей степени (17) естественно разделяется на подуравнения с корнями  $Z_1$  и  $Z_2, Z_3$ .

**Пример 2.** Уравнение пятой степени

$$Z^5 - 12Z^4 + 69Z^3 - 88Z^2 - 70Z + 100 = 0 \quad (18)$$

имеет матрицу моментов отображений

$\nu$	$p_\nu$	$p_{\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu\nu\nu}$
1	12	69	88	-70	-100
2	6	2509	15004	$22,5 \cdot 10^3$	$10^4$
4	-4982	$6,16 \cdot 10^6$	$1,12335 \cdot 10^8$	$2,0617 \cdot 10^8$	$10^8$
8	$12,41 \cdot 10^6$	$39,06 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^{16}$	$2 \cdot 10^{16}$	$10^{16}$

(19)

из рассмотрения которой, обратив внимание на несоизмеримые порядки моментов отображений на плоскости четвертого ( $\nu = 4$ ) и восьмого ( $\nu = 8$ ) порядков, можно сделать предположение о разделении уравнения.

Помимо этого в матрице (19) усматриваются две аномалии.

Во-первых, имеет место смена знаков у первого момента  $p_\nu$  при различных отображениях. Это признак парности корней  $Z_1, Z_2$  уравнения. Парность может выразиться в комплексной сопряженности, кратности или противоположности (действительной сопряженности) корней.

Во-вторых, имеет место смена знаков у четвертого и пятого моментов уравнения при переходе к образам высших порядков, что также говорит о парности корней  $Z_4, Z_5$ .

Но долю третьего корня ( $Z_3$ ) уравнения остается только действительность.

Таким образом следует предположить, что наиболее вероятным является разделение на три подуравнения

$$\begin{aligned} Z_\nu^2 - p_\nu Z_\nu + p_{\nu\nu} &= 0 \\ p_{\nu\nu} Z_\nu - p_{\nu\nu\nu} &= 0 \\ p_{\nu\nu\nu} Z_\nu^2 - p_{\nu\nu\nu\nu} Z + p_{\nu\nu\nu\nu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Корни уравнения действительно соответственно равны

$$Z_{1,2} = 5 \pm i5; \quad Z_3 = 2; \quad Z_{4,5} = \pm 1. \quad (21)$$

**Пример 3.** Задано уравнение

$$Z^5 - (-1,2)Z^4 + (-15,79)Z^3 - (-12,61)Z^2 + (-14,17)Z - (-15,15) = 0. \quad (22)$$

Матрица моментов уравнения и образов

$\nu$	$p_\nu$	$p_{\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu\nu\nu}$
1	-1,2	-15,79	-12,61	-14,17	-15,15
2	33,02	191	-252	-181	230
4	709	52661	147873	148600	52680
8	$397 \cdot 10^3$	$210 \cdot 10^6$	$6317 \cdot 10^6$	$6394 \cdot 10^6$	$2767 \cdot 10^6$

(23)

по всей видимости, благополучна для вычисления (4) двух старших корней ( $Z_1$  и  $Z_2$ ). Однако, имеет место неожиданное падение момента  $p_{2222} = -181$ . Настораживающе малый рост моментов  $p_{4444}$  и  $p_{8888}$  в сравнении с  $p_{444}$  и  $p_{888}$ . Видимая мнимость корней  $Z_3$  и  $Z_5$  во втором отображении. В то время, как корень  $Z_4$  вычисляется как действительный (?). Нарушается закономерность распределения корней по модулю. Очевидно, следует рассматривать три младших корня в одном подуровнении третьей степени.

Итак, разделяем заданное уравнение предварительно на подуровнения

$$\begin{aligned} Z_\nu - p_\nu Z_\nu &= 0, \\ p_\nu Z_\nu - p_{\nu\nu} &= 0, \\ p_{\nu\nu} Z_\nu^3 - p_{\nu\nu\nu} Z_\nu^2 + p_{\nu\nu\nu\nu} Z_\nu - p_{\nu\nu\nu\nu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

имея в виду, что мотивации для окончательных выводов еще не исчерпаны.

Здесь следует, однако, иметь в виду, что для полученных линейных подуровнений (24), в связи с тем, что моменты их образов (23) уже известны, наиболее простым путем получения окончательного вывода о разделении на подуровнения, может оказаться простое вычисление приближений корней. В случае же, если предварительное разделение выявило подуровнения второй и третьей степеней, предпочтительнее произвести второй этап исследований с целью выстраивания перспективы дальнейших действий.

Покажем, что подуровнения второй и третьей степеней, при достаточно высокой степени ( $\nu$ ) функции отображения могут рассматриваться не как подуровнения, а как уравнения второй и третьей степеней. То есть перейти в

рассматриваемом примере от более сложных моментов  $p_\nu$  к более простым моментам  $d_\nu$  или  $m_\nu$ , что позволит упростить последующие выкладки и конечные формулы.

Действительно, пусть из уравнения пятой степени в  $\nu$ -м отображении выделено подуравнение второй степени

$$Z_\nu^2 - p_\nu Z_\nu + p_{\nu\nu} = 0. \quad (25)$$

Над той же плоскостью  $\nu$ -го порядка рассмотрим уравнение второй степени

$$Z_\nu^2 - d_\nu Z_\nu + d_{\nu\nu} = 0, \quad (26)$$

корни которого  $Z_{\nu 1}$  и  $Z_{\nu 2}$  совпадают с соответствующими корнями уравнения пятой степени (и, естественно, с корнями выделенного подуравнения (25)).

Возьмем отношение и раскроем первые моменты подуравнения (25) и уравнения (26)

$$\begin{aligned} \frac{p_\nu}{d_\nu} &= \frac{Z_{\nu 1} + Z_{\nu 2} + Z_{\nu 3} + Z_{\nu 4} + Z_{\nu 5}}{Z_{\nu 1} + Z_{\nu 2}} \\ &< 1 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{Z_3}{Z_2} \right)^\nu + \left( \frac{Z_4}{Z_2} \right)^\nu + \left( \frac{Z_5}{Z_2} \right)^\nu \right], \end{aligned} \quad (27)$$

откуда видно, что в соответствии с основным законом распределения корней, всегда может быть выбрано такое значение степеней ( $\nu$ ) функции отображения, что остаточный трехчлен отношения может быть принят равным нулю. И, соответственно, получено равенство

$$p_\nu = d_\nu. \quad (28)$$

Точно так же, в случае, когда подуравнение выделено в стороне меньших корней

$$p_{\nu\nu\nu} Z_\nu^2 - p_{\nu\nu\nu\nu} Z + p_{\nu\nu\nu\nu\nu} = 0 \quad (29)$$

беря отношение свободных моментов подуравнения (29) и уравнения (26)

$$\frac{p_{\nu\nu\nu\nu\nu}}{p_{\nu\nu\nu} d_{\nu\nu}} = \frac{Z_{\nu 1} + Z_{\nu 2} + Z_{\nu 3} + Z_{\nu 4} + Z_{\nu 5}}{(Z_{\nu 1} Z_{\nu 2} Z_{\nu 3} + \dots)_{10} \cdot Z_{\nu 4} Z_{\nu 5}} = 1$$

видно, что при достаточно высоких значениях степени ( $\nu$ ) функции отображения, оно (отношение) мажорируется конечной последовательностью, сходящейся к единице.

Аналогично может быть показана эквивалентность подуравнений и уравнений третьей степени.

Второй этап исследований играет существенную, а порой и решающую роль при разделении уравнений и выявлении характера корней. Основу исследования составляет графический анализ фигур функций, образующих уравнения.

## § 2. Анализ графиков функций, образующих уравнения

Образующей функцией называется функция, приравниванием некоторой константе которой образуется заданное уравнение. Здесь будут рассмотрены графики только двух функций. Функций второго и третьего порядков, так как только таких степеней подуравнения анализируются в работе. Функции четвертого и пятого порядков рассматриваются в другой работе [4] автора.

Как и исследуемые уравнения, образующие функции могут иметь своими корнями только действительные и комплексно сопряженные числа, только действительные коэффициенты, только действительные значения, но комплексный аргумент —  $Z = X + iY$ . Так как в общем случае алгебраическая функция комплексного аргумента тоже комплексна, придется принять специальные меры к тому, чтобы образующая уравнения алгебраическая функция принимала только действительные значения.

Рассмотрим комплексную алгебраическую функцию второго порядка

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 \quad (30)$$

от комплексного аргумента, тогда действительная функция запишется системой выражений

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_2(Z) &= X^2 - 2a_1X + a_2 + (iY)^2, \\ \operatorname{Im} A_2(Z) &= 2(iY)(X - a_1) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Первое из выражений системы (31) определяет пространственную, трехмерную, линейчатую фигуру функции (31). Второе выражение, во-первых, констатирует отсутствие мнимой части у функции (31). Во-вторых, как уравнение, взаимосвязывает два аргумента ( $X$  и  $Y$ ) функции. В-третьих, графически представляет собой две взаимно перпендикулярные, перекрещивающиеся, лежащие в плоскости аргумента прямые, над которыми, как над проекцией расположена пространственная фигура функции (31).

Фигура функции (31) состоит из двух парабол второго порядка. Первая из которых —  $A_2 - A_2$  (рис. 2)

$$\begin{aligned} Y = 0 = \operatorname{const}, \quad X = \operatorname{var}, \\ \operatorname{Re} A_2(Z) = (X - a_1)^2 + a_{02} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

лежит в действительной плоскости  $A_20X$  (плоскости листа рисунка 2). Вершина параболы имеет координаты  $a_{02}$ ,  $a_1$ , где  $a_{02} = -a_1^2 + a_2$  является одновременно и инвариантом линейного отображения (30), и дискриминантом образуемого уравнения

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = 0. \quad (33)$$

Координата  $a_1$ , вершины фигуры — это коэффициент первого порядка образующей функции, центр тяжести корней образуемых уравнений, вертикальная ось симметрии фигуры функции.

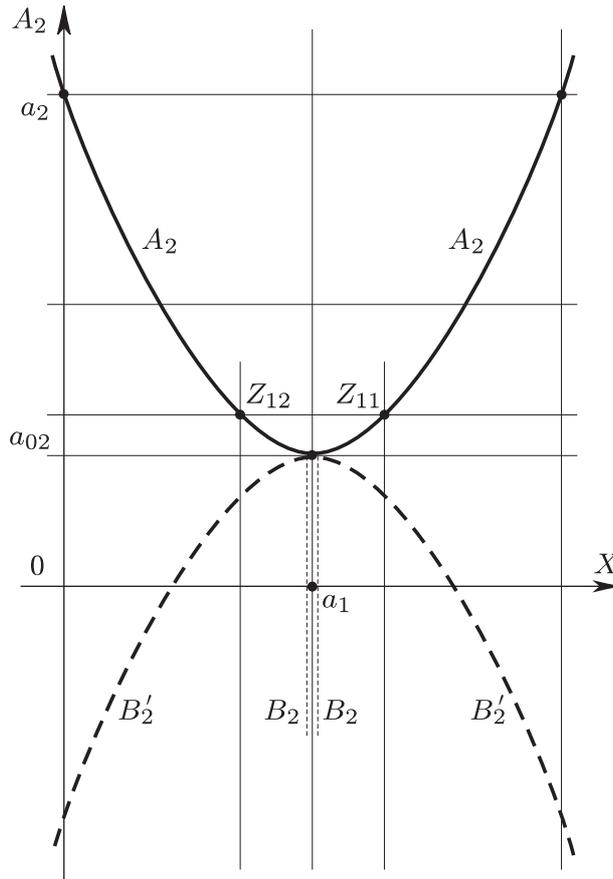


Рис. 2: Фигура функции второго порядка

Вторая парабола —  $B_2 - B_2$  (рис. 2)

$$\begin{aligned} X &= a_1 = \text{const}, & Y &= \text{var}, \\ \text{Re } A_2(Z) &= -a_1^2 + a_2 + (iY)^2 = 0 = a_{02} + (iY)^2 \end{aligned} \quad (34)$$

конструктивно совпадает с первой, но лежит в плоскости ( $X = a_1$ ) перпендикулярной к плоскости листа. Вершина параболы  $B_2 - B_2$  совпадает с вершиной параболы  $A_2 - A_2$ . Точка соприкосновения парабол принадлежит параболе  $A_2 - A_2$ . На рисунке парабола  $B_2 - B_2$  условно показана тонкой пунктирной линией. В развороте на плоскость листа парабола  $B_2 - B_2$  показана штрихом и обозначена  $B_2' - B_2'$ .

Любое из сечений полученной пространственной фигуры плоскостью  $A_2(Z) = \text{const}$  образует уравнение второй степени

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = \text{const}, \quad (35)$$

корнями которого являются аргументы точек проколов плоскости  $A_2 = \text{const}$  ветвями линейчатой фигуры функции. Сечения параболы  $A_2 - A_2$  фигуры образует уравнения с действительными корнями. В этом случае, как это видно из рисунка фигуры, ордината вершин парабол (она же дискриминант и инвариант уравнения)

$$-a_1^2 + a_2 = a_{02} \quad (36)$$

может быть только отрицательной. Если же инвариант (36) уравнения (35) положителен, то сечение фигуры функции плоскостью  $A_2 = \text{const}$  приходится на параболу  $B_2 - B_2$ . Точками проколов плоскости ветвями функции определяются комплексные корни полученного уравнения.

Располагая численными значениями коэффициентов заданного уравнения (33) всегда можно определить расположение фигуры образующей его функции в своем пространстве. Можно качественно и количественно оценить значение корней заданного уравнения или подуравнения второй степени уравнения более высокого порядка [4]. В последнем случае, подуравнение и уравнение неэквивалентны. Их корни различаются, но только количественно. Качественно, а в первом приближении и количественно, значения корней подуравнения и уравнения совпадают [1]. В связи с чем графическое исследование образующих функций может оказаться существенным подспорьем в анализе корней подуравнений.

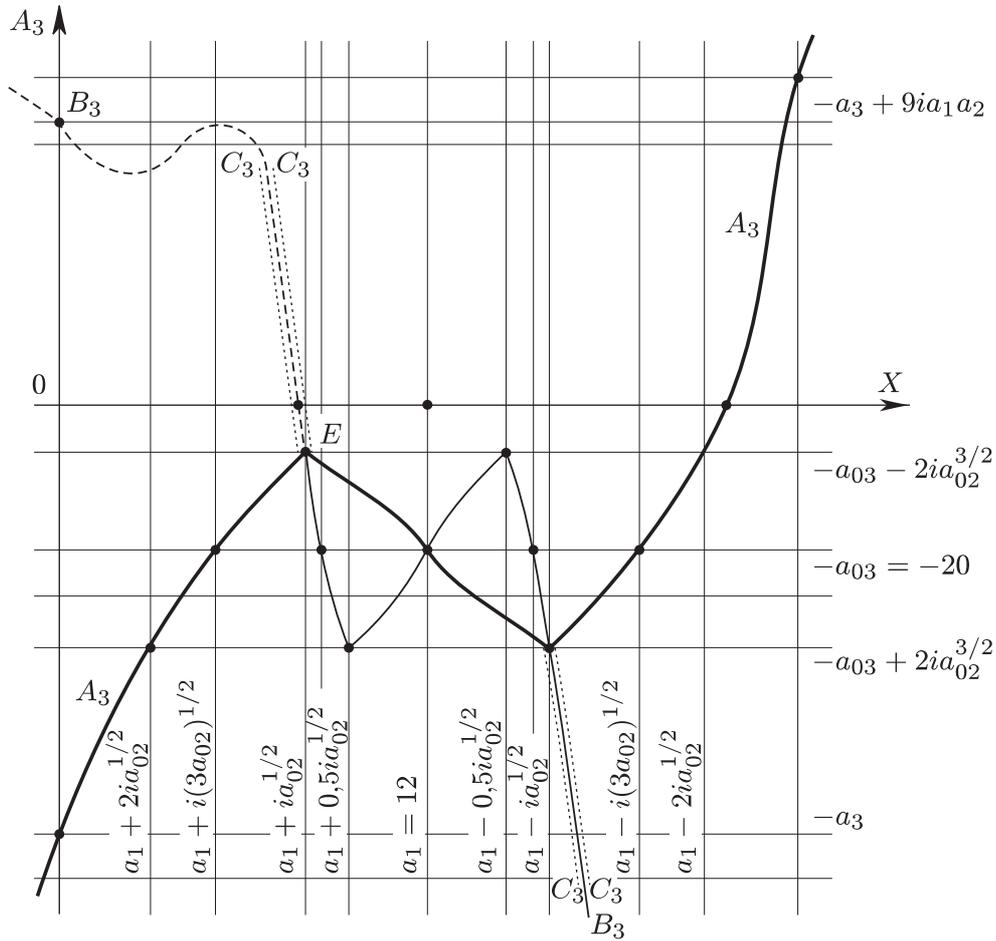


Рис. 3: Фигура функции третьего порядка.

Действительная функция третьего порядка, как и функция второго порядка, может быть представлена системой выражений

$$\begin{aligned} \text{Re } A_3(Z) &= X^3 - 3a_1X^2 + 3a_2X - a_3 + 3(iY)^2(X - a_1), \\ i \text{Im } A_3(Z) &= 3(iY)(X^2 - 2a_1X + a_2 + (iY)^2) = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где первое представляет собой пространственную линейную фигуру, а вто-

рое — проекцию этой фигуры на плоскость аргумента, уравнение, взаимосвязывающее действительный и мнимый параметры аргумента функции. Одновременно, второе выражение констатирует факт отсутствия у рассматриваемой функции мнимой части, утверждая ее, тем самым, как действительную функцию над комплексной плоскостью аргумента.

Фигура функции состоит из четырех ветвей (рис. 3).

Ветвь  $A_3 - A_3$  фигуры

$$\begin{aligned} Y &= 0, \\ \operatorname{Re} A_3(Z) &= X^3 - 3a_1X^2 + 3a_2X - a_3, \end{aligned} \quad (38)$$

определяющая в своих сечениях плоскостями  $A_3(Z) = \operatorname{const}$  действительные корни образуемых уравнений. Ветвь представляет собой параболу третьего порядка, лежащую в плоскости  $A_30X$  (плоскость листа). Известными средствами анализа достаточно просто вычисляются координаты особых точек (экстремумов, перегиба) ветви. Координаты особых и некоторых промежуточных точек ветвей, выраженные через коэффициенты, представлены на выносных линиях рисунка. Так как координаты точек фигуры выражены в обобщенной форме (формулами через коэффициенты), то они действительны в любой системе координат, как бы и где бы она не располагалась относительно фигуры функции. Они действительны для любой функции или подфункции третьего порядка, какую бы частную форму последняя не имела.

Ветвь  $B_3 - B_3$  фигуры функции

$$\begin{aligned} Y &\neq 0, \\ -\operatorname{Re} A_3(Z) &= (2X)^3 - 3a_1(2X)^2 + 3a_2(2X) - a_3 \end{aligned} \quad (39)$$

определяет в своих сечениях плоскостями  $A_3 = \operatorname{const}$  точки середин корней образуемых уравнений. Ветвь  $B_3 - B_3$  представляет собой вдвое сжатую в поперечнике и перевернутую относительно горизонтальной оси с ординатой  $-a_{03}$  параболу третьего порядка. Каждый участок ветви  $B_3 - B_3$  представляет собой геометрическое место середин между соответствующими участками ветвей  $A_3 - A_3$  и ветвей  $C_3 - C_3$ . Ветвь  $B_3 - B_3$  лежит в одной плоскости с ветвью  $A_3 - A_3$  и обозначена штрихом на рис. 3.

Две ветви  $C_3 - C_3$  фигуры функции, проекции которых на плоскость аргумента записаны уравнением системы (37)

$$\begin{aligned} Y &\neq 0, \\ X^2 - 2a_1X + a_2 + (iY)^2 & \end{aligned} \quad (40)$$

определяют в сечениях фигуры плоскостями  $A_3(Z) = \operatorname{const}$  комплексные корни образуемых уравнений. Ветви  $C_3 - C_3$  представляют собой параболы, лежащие в полуплоскостях нормальных к действительной плоскости  $A_30X$  пространства и изогнутых его отходящим линиям ветви  $B_3 - B_3$ . Вершины парабол  $C_3 - C_3$  совпадают с точками экстремумов ветви  $A_3 - A_3$  фигуры функции. Отходящие линии ветви  $B_3 - B_3$  являются осевыми линиями парабол  $C_3 - C_3$ . На рисунке (рис. 3) ветви  $C_3 - C_3$  изображены пунктиром вдоль отходящих линий ветвей  $B_3 - B_3$ .

Из общих свойств построенной фигуры следует отметить ее центральную (нечетную) симметричность. В сечениях фигуры  $A_3 = \text{const}$ , лежащих выше и ниже вершин экстремумов образуются уравнения с комплексными корнями. В сечениях между экстремумами корни образуемых уравнений только действительные. Геометрическим местом центров тяжести всех образуемых функцией уравнений является вертикаль, восстановленная в точке  $X = a_1$  плоскости аргумента. Ординатой геометрического центра фигуры является инвариант третьего порядка —  $a_{03}$ , абсциссой — первый коэффициент ( $a_1$ ) биномиальной знакопеременной формы записи функции.

Коэффициентами функции определяется не только частный вид ее фигуры, но и расположение в системе координат. В рассматриваемом случае, взаимное расположение центра отсчета и геометрического центра фигуры функции, как и вообще, определяется первым коэффициентом ( $a_1$ ) и свободным инвариантом ( $a_{03}$ ).

**Пример 4.** Рассматривается функция, образующая уравнение третьей степени

$$A_3 = Z^3 - 36z^2 + 421Z - 1616 = z^3 - 3a_1Z^2 + 3a_2Z - a_3 = 0 \quad (41)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_1 &= 12, & a_{02} &= -a_1 + a_2 = -9, 7, \\ a_2 &= 140, 3, & a_{03} &= 2a_1^2 - 3a_1a_2 + a_3 = 20, \\ a_3 &= 1616 \end{aligned} \quad (42)$$

Задача заключается в определении местоположения геометрического центра фигуры (рис. 3) функции в собственной системе координат, определенной коэффициентами заданной функции (41).

Из анализа значений коэффициентов (42) и рисунка фигуры функции (рис. 3) можно заключить, что центр фигуры расположен в IV-м квадранте собственной системы, так как его ордината ( $-a_{03} = -20$ ) отрицательна, а абсцисса ( $a_1 = 12$ ) положительна.

Вычисляем координаты точки экстремума ( $E$ ) заданной функции

$$\begin{aligned} -a_{03} - 2ia_{02}^{3/2} &= -10, \\ a_1 + ia_{02}^{1/2} &= 10, 1 \end{aligned} \quad (43)$$

и заключаем, что она тоже находится в четвертом квадранте собственной системы отсчета заданной функции (41).

С учетом полученного результата ставим точку 0 центра собственной системы координат на рисунке (рис. 3) фигуры функции. Проводим линии осей координат и делаем вывод. Заданное уравнение или подуровнение уравнения более высокой степени имеет два комплексно сопряженных корня с положительной действительной частью и положительный действительный корень. Если на рисунок фигуры функции нанести промежуточные линии, то могут быть произведены и количественные оценки корней. При этом графически определяется только действительная часть комплексных корней. Мнимая часть вычисляется из уравнения ветви  $C_3 - C_3$  (37), (40) по известной (вычисленной) действительной части

$$iY = \sqrt{-X^2 + 2a_1X - a_2} = \sqrt{-(X - a_1)^2 - a_{02}}. \quad (44)$$

### § 3. Формулы общего предельного решения уравнений

Знание закономерностей распределения корней при отображении, владение методом естественного разделения заданного уравнения, наконец, владение методами графического анализа функций позволяют произвести обоснованное разделение уравнения на элементарные подуравнения. Очередной задачей становится вывод общих удобоваримых формул решения этих подуравнений. Подуравнений и уравнений первой и второй степени с действительными и комплексными корнями.

#### 3.1. Уравнение второй степени с действительными корнями

Если известно, что уравнение

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = Z^2 - 2a_1 Z + a_2 = 0 \quad (45)$$

имеет своими корнями действительные числа, то через стандартное отображение

$$Z_\nu = Z^\nu \quad (46)$$

на плоскость  $\nu$ -го порядка, где оно естественно разделяется на два подуравнения

$$\begin{aligned} Z_\nu - d_\nu &= 0, \\ d_\nu Z_\nu - d_{\nu\nu} &= 0 \end{aligned} \quad (47)$$

могут быть вычислены  $\nu$ -е степени его корней

$$\begin{aligned} Z_1^\nu &= d_\nu, \\ Z_2^\nu &= \frac{d_{\nu\nu}}{d_\nu}. \end{aligned} \quad (48)$$

Нас, однако, интересует решение заданного (45) уравнения на плоскости первого порядка, где корни, в общем случае, как это следует из проведенного анализа, структурно могут быть представлены в форме

$$Z_{1,2} = \frac{Z_1 + Z_2}{2} + \frac{Z_1 - Z_2}{2} \quad (49)$$

основания и знакопеременного дополнения. Основанием, в приведенной форме (49) решения является, как это видно, первый коэффициент ( $a_1$ ) или половина первого момента ( $d_1$ ), заданного уравнением (45). Дополнением является несимметричный момент, представляющий собой, как известно, инвариант или, что в данном случае то же самое, дискриминант уравнения (45).

Вычисляем дополнение решения (49) приближенно, через  $\nu$ -е степени корней, для чего представим его в виде произведения с единичным сомножителем

$$\frac{Z_1 - Z_2}{2} = \frac{Z_1 - Z_2}{2} \cdot \frac{Z_1 + Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot \frac{Z_1^2 + Z_2^2}{Z_1^2 + Z_2^2} \cdot \frac{Z_1^4 + Z_2^4}{Z_1^4 + Z_2^4} \cdot \frac{Z_1^8 + Z_2^8}{Z_1^8 + Z_2^8} \cdots \frac{Z_1^{\nu/2} + Z_2^{\nu/2}}{Z_1^{\nu/2} + Z_2^{\nu/2}} = \quad (50)$$

Роль единичного сомножителя в построенном выражении выполняют отношения кратных моментов  $(d_1, d_2, d_4, d_8, \dots)$  к себе. Причем используются моменты порядков только кратных степени двойки. Построенное выражение (50), с использованием известного свойства квадратичных форм, может быть упрощено и представлено в виде

$$= \frac{Z_1^\nu - Z_2^\nu}{2d_1 d_2 d_4 \dots d_{\nu/2}} = \quad (51)$$

и далее, с учетом приближенных решений (48) уравнения образа, в форме

$$= \frac{d_\nu^2 - d_{\nu\nu}}{2d_1 d_2 d_4 \dots d_\nu} \quad (52)$$

Обращаем внимание: нами получено алгебраическое выражение дискриминанта уравнения второй степени через моменты.

На основе полученных результатов (51), (52) может быть построено и общее (в  $\nu$ -м приближении, предельное) решение (49) уравнения (45) второй степени

$$Z_{1,2} = \frac{d_1}{2} \pm \frac{d_\nu^2 - d_{\nu\nu}}{2d_1 d_2 d_4 \dots d_\nu}. \quad (53)$$

**Пример 5.** Составляем уравнение второй степени с корнями  $Z_1 = 3$ ,  $Z_2 = 2$

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = Z^2 - 5Z + 6 = 0. \quad (54)$$

Вычисляем и сводим в таблицу моменты образов заданного уравнения (54)

$\nu$	1	2	4	8	16
$d_\nu = d_{\nu/2}^2 - 2d_{\nu/2}d_{\nu/2}$	5	13	97	6817	43112257
$d_{\nu\nu} = d_{11}^\nu$	6	36	1296	1679616	$2821110 \cdot 10^6$

(55)

Вычисляем и сводим в таблицу приближения корней (по формуле (53))

$\nu$	1	2	4	8	16
$Z_1(\nu)$	4,4	3,5	3,1	3,02	3,000000
$Z_2(\nu)$	0,6	1,5	1,9	1,99	2,000000

(56)

где соответственно

$$\begin{aligned} Z_{1,2}(1) &= \frac{d_1}{2} \pm \frac{d_1^2 - d_{11}}{2d_1} = \frac{5}{2} \pm \frac{5^2 - 6}{2 \cdot 5} = 4,4; 0,6, \\ Z_{1,2}(2) &= \frac{d_1}{2} \pm \frac{d_2^2 - d_{22}}{2d_1 d_2} = \frac{5}{2} \pm \frac{13^2 - 36}{2 \cdot 5 \cdot 13} = 3,5; 1,5, \\ Z_{1,2}(4) &= \frac{d_1}{2} \pm \frac{d_4^2 - d_{44}}{2d_1 d_2 d_4} = \frac{5}{2} \pm \frac{97^2 - 1296}{2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 97} = 3,1; 1,9, \\ Z_{1,2}(8) &= \frac{d_1}{2} \pm \frac{d_8^2 - d_{88}}{2d_1 d_2 d_4 d_8} = \frac{5}{2} \pm \frac{6817^2 - 1679616}{2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 97 \cdot 6817} = 3,02; 1,99, \\ Z_{1,2}(16) &= \frac{d_1}{2} \pm \frac{d_{16}^2 - d_{1616}}{2d_1 d_2 d_4 d_8 d_{16}} = 2,5 \pm 0,500000 = 3; 2. \end{aligned} \quad (57)$$

### 3.2. Уравнения второй степени с комплексными корнями

Пусть задано уравнение второй степени

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = 0 \quad (58)$$

и известно, что его корни комплексны.

В соответствии с рисунком (рис. 2) фигуры образующей функции, второй инвариант уравнения

$$a_{02} = A_2(a_1) = -a_1^2 + a_2 \quad (59)$$

положителен. Сечение фигуры осуществлено плоскостью аргумента, где образующая функция ( $A_2$ ) равна нулю (58). Корни уравнения равны

$$Z_{1,2} = a_1 \pm i\sqrt{a_{02}}. \quad (60)$$

Рассмотрим другое сечение фигуры образующей функции. Сечение расположено на уровне ( $2a_{02}$ )

$$A_2(Z) = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = 2a_{02}. \quad (61)$$

Диполь образованного в сечении уравнения

$$Z^2 - 2a_1Z + (2a_1^2 - a_2) = Z^2 - d_1Z + d_{11} = 0 \quad (62)$$

структурно (49) должен совпадать с диполем заданного уравнения (58), так как ветви фигуры образующей функции конструктивно одинаковы, совпадают при совмещении. Вычисляем корни контруравнения (62) (так его назовем)

$$Z_{1,2} = a_1 \pm \sqrt{a_{02}}. \quad (63)$$

и убеждаемся в том, что действительно, корни уравнений (60), (63) отличаются всего лишь множителем (мнимой единицей) около дополнения. То есть, как это и следует из рассмотрения фигуры образующей функции, совершен переход от уравнения с комплексными корнями к уравнению с действительными корнями с той же величиной диполя.

Решение уравнения (61) с действительными корнями известно (53). Решение уравнения (58) с комплексными корнями получим, введя множитель (мнимую единицу) к дополнению корней известного решения (53)

$$Z_{1,2} = \frac{d_1}{2} \pm i \frac{d_\nu^2 - d_{\nu\nu}}{2d_1d_2d_4 \dots d_\nu}. \quad (64)$$

Следует только учитывать, что при решении уравнения с действительными корнями связь моментов с коэффициентами одна (45)

$$\begin{aligned} d_1 &= 2a_1, \\ d_{11} &= a_2, \end{aligned} \quad (65)$$

а при решении уравнений с комплексными корнями — другая (62)

$$\begin{aligned} d_1 &= 2a_1, \\ d_{11} &= 2a_1^2 - a_2. \end{aligned} \quad (66)$$

**Пример 6.** Составим уравнение с корнями  $Z_{1,2} = -0,2 \pm i$

$$Z^2 - (-0,4)Z + 1,04 = Z^2 - 2a_1Z + a_2 = 0. \quad (67)$$

Вычисляем единичные моменты (66) его контруравнения с действительными корнями

$$\begin{aligned} d_1 &= 2a_1 = -0,4, \\ d_{11} &= 2a_1^2 - a_2 = 2(-0,2)^2 - 1,04 = -0,96. \end{aligned} \quad (68)$$

Вычисляем моменты отображений контруравнения

$$\begin{aligned} d_\nu &= d_{\nu/2}^2 - 2d_{\nu/2\nu/2}, \\ d_{\nu\nu} &= d_{11}^\nu \end{aligned} \quad (69)$$

и сводим их в таблицу

$\nu$	1	2	4	8	16	32
$d_\nu$	-0,4	2,08	2,486	4,488	18,7	349
$d_{\nu\nu}$	-0,96	0,92	0,849	0,72	0,52	0,27

(70)

Вычисляем действительные корни контруравнения

$$Z^2 - d_1Z + d_{11} = Z^2 - (-0,4)Z + (-0,96) = 0 \quad (71)$$

точно

$$Z_{1,2} = -0,2 \pm \sqrt{0,2^2 + 0,96} = -0,2 \pm 1 \quad (72)$$

и в предельных приближениях (53)

$$Z_{1,2} = \frac{d_1}{2} \pm \frac{d_\nu^2 - d_{\nu\nu}}{2d_1d_2 \dots d_\nu}. \quad (73)$$

$\nu$	1	2	4	8	16
$Z_{1,2}$	-	-	$-0,2 \pm 1,12$	$-0,2 \pm 1,05$	$-0,2 \pm 1,005$

(74)

Умножаем дополнение полученного значения действительного корня (74) на мнимую единицу и получаем корни заданного уравнения (67)

$$Z_{1,2} = \frac{d_1}{2} \pm i \frac{d_\nu^2 - d_{\nu\nu}}{2d_1d_2d_4 \dots d_\nu} = -0,2 \pm i. \quad (75)$$

### 3.3. Подуравнения второй степени с действительными корнями

Построенное в предыдущем параграфе общее предельное решение уравнений второй степени в чисто алгебраической форме, без радикала, более привлекательно, потому что более просто для анализа. Возникает желание распространить, хотя бы частично, эту форму решения и на подуравнения.

Сложность в том, что если моменты уравнения нам известны (вычисляемы), начиная с плоскости первого порядка и выше, то моменты подуравнения, например, уравнения пятой степени

$$Z_\nu^2 - p_\nu Z_\nu + p_{\nu\nu} = 0 \quad (76)$$

известны (вычисляемы), начиная с плоскости  $\nu$ -го порядка и выше, так как до сих пор они были моментами уравнения пятой степени, и более того, были моментами уравнений неприемлемых приближений. До этого точность вычисляемых корней была мала и подуравнение (76) не приравнивалось к уравнению (76). То есть на плоскости  $\nu$ -го порядка мы всего лишь, наконец, отождествили подуравнение (76) с уравнением (76), которое предстоит решать последовательными отображениями до плоскости более высокого порядка.

Применяя к заданному уравнению (76) метод, изложенный в подразделе 3.1 работы, решение (53) можно записать сразу

$$Z_{\nu 1,2}(\mu) = \frac{d_\nu}{2} \pm \frac{(d_\nu)_\mu^2 - (d_{\nu\nu})_{\mu\mu}}{2(d_\nu)_1(d_\nu)_2(d_\nu)_4 \dots (d_\nu)_\mu}. \quad (77)$$

Отметим, во-первых, что построенное решение — это решение на плоскости  $\nu$ -го порядка там, где оно задано (76) и его предстоит еще “опустить” на плоскость первого порядка. Во-вторых, в соответствии с выводами, полученными в первом разделе работы (27), (29), в решении (77) применены моменты  $d$  (уравнения второй степени), а не  $p$  (уравнения пятой степени), что позволяет упростить последующие выкладки и вычисления. В третьих, перепишем полученные решения (77) в окончательной форме

$$Z_{1,2}(\mu\nu) = \sqrt{\frac{d_\nu}{2} \pm \frac{d_{\mu\nu}^2 - d_{\mu\nu\mu\nu}}{2d_{1\nu} \cdot d_{2\nu} \cdot d_{4\nu} \dots d_{\mu\nu}}}. \quad (78)$$

и упомянем еще раз три движения, зафиксированные в нем:

— отображением на плоскость  $\nu$ -го порядка, заданное уравнение пятой степени разделено, получено подуравнение второй степени, которое рассматривается теперь как самостоятельно заданное уравнение второй степени;

— последующим отображением на плоскость  $\mu\nu$ -го порядка, уравнение второй степени решено в алгебраической форме, получено общее предельное решение на  $\nu$ -й плоскости в  $\mu$ -м приближении;

— извлечением корня  $\nu$ -й степени решение построенного уравнения второй степени отображено на плоскость первого (заданного) порядка, т.е. найдены два действительных корня заданного уравнения пятой степени.

**Пример 7.** На основе уравнений примеров 5, 6 строим уравнение четвертой степени с корнями  $Z_1 = 3$ ,  $Z_2 = 2$ ,  $Z_{3,4} = -0,2 \pm i$

$$\begin{aligned} A_4(Z) &= (Z^2 - 5Z + 6)(Z^2 + 0,47Z + 1,04) \\ &= Z^4 - 4,6Z^3 + 5,04Z^2 - 2,8Z + 6,24 \\ &= Z^4 - n_1 Z^3 + n_{11} Z^2 - n_{111} Z + n_{1111} = 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Стандартным отображением, функцией

$$Z_\nu = Z^\nu \quad (80)$$

строим уравнение-образ на плоскости  $Z_\nu$

$$A_{\nu 4}(Z_\nu) = Z_\nu^4 - n_\nu Z_\nu^3 + n_{\nu\nu} Z_\nu^2 - n_{\nu\nu\nu} Z_\nu + n_{\nu\nu\nu\nu} = 0 \quad (81)$$

и разделяем его на два подуравнения

$$Z_\nu^2 - n_\nu Z_\nu + n_{\nu\nu} = 0, \quad (82)$$

$$n_{\nu\nu} Z_\nu^2 - n_{\nu\nu\nu} Z_\nu + n_{\nu\nu\nu\nu} = 0. \quad (83)$$

На дальнейшее полагаем, что мы не знаем разложения уравнения  $A_4(Z)$  на приведенные два сомножителя (79), не знаем корней уравнений и ищем их, считая заданным уравнение четвертой степени (79) и построенным его подуравнение (82) с действительными корнями.

Вычисляем моменты уравнений-образов заданного оригинала (79) по формулам [1], [2]

$$\begin{aligned} n_\nu &= n_{\nu/2}^2 - 2n_{\nu/2\nu/2}, \\ n_{\nu\nu} &= n_{\nu/2\nu/2}^2 - 2n_{\nu/2}n_{\nu/2\nu/2\nu/2} + 2n_{\nu/2\nu/2\nu/2\nu/2}, \\ n_{\nu\nu\nu} &= n_{\nu/2\nu/2\nu/2}^2 - 2n_{\nu/2}n_{\nu/2\nu/2\nu/2\nu/2}, \\ n_{\nu\nu\nu\nu} &= n_{1111}^\nu = n_{\nu/2\nu/2}n_{\nu/2\nu/2\nu/2\nu/2}^2 \end{aligned} \quad (84)$$

и заносим их в таблицу

$\nu$	$n_\nu$	$n_{\nu\nu}$	$n_{\nu\nu\nu}$	$n_{\nu\nu\nu\nu}$
1	4,6	5,04	2,8	6,24
2	11,08	12,12	-55,06	38,94
4	98,5	1445	2088	1516
8	6812	1679523	-23518	2298671
16	43051110	$2821123 \cdot 10^6$	$5283888 \cdot 10^6$	
32	$1848 \cdot 10^{12}$	$7585041 \cdot 10^{18}$	$59610582 \cdot 10^{18}$	$27919472 \cdot 10^{18}$

(85)

Однако моменты образа при отображении на плоскость 32-го порядка измеряемых величин посчитаны как моменты уравнения второй степени соответственно с корнями  $Z_1, Z_2$

$$\begin{aligned} d_\nu &= d_{\nu/2}^2 - 2d_{\nu/2\nu/2}, \\ d_{\nu\nu} &= d_{\nu/2\nu/2}^2, \end{aligned} \quad (86)$$

что соответствует ранее приведенным выводам. Но это не означает, что переход от подуравнения к уравнению (82) должен быть совершен строго на предыдущей плоскости шестнадцатого порядка величин. Параметры отображений  $\mu$  и  $\nu$  переменны и произвольны. Потери точности на  $\nu$ -отображениях компенсируются на переходе  $\mu$  и наоборот. Без “крайностей”

такие “манипуляции” допустимы, а позволяют получить несколько результатов и найти предельную величину в динамике. Ограничением в получении бóльшего количества результатов является только предельная величина степени отображения —  $\mu\nu$ . В рассматриваемом примере (85), произведение  $\mu\nu \leq 32$ , если таблица не будет дополнена моментами новых отображений.

Предположим, что мы удовлетворены точностью разделения заданного (79) уравнения на подуравнения отображением функцией четвертого порядка. То есть выберем для параметра  $\nu$  значение четыре ( $\nu = 4$ ). Остается, воспользовавшись общей формулой (77), вычислить  $\mu$ -е приближения корней на плоскости четвертого порядка

$$Z_{4\ 1,2}(\mu 4) = \frac{d_4}{2} \pm \frac{d_{\mu 4}^2 - d_{\mu 4 \mu 4}}{2d_{1.4}d_{2.4}\dots d_{\mu 4}}, \quad \mu = 1, 2, 4, 8, \dots, \quad \nu = 4, \quad (87)$$

а далее и  $\mu\nu$ -е приближения на плоскости первого порядка

$$Z_{1,2}(1 \cdot 4) = Z_{1,2}(4) = \sqrt[4]{\frac{d_4}{2} \pm \frac{d_4^2 - d_{44}}{2d_4}}, \quad \mu = 1, \quad \nu = 4. \quad (88)$$

Последним предположением, выбрав численное значение параметра отображения ( $\nu = 4$ ), мы зафиксировали переход от подуравнения (с моментами  $n$ ) к уравнению (с моментами  $d$ ) на плоскости четвертого порядка, т.е. отождествили заготовленные в таблице (85) моменты  $n$  с соответствующими моментами  $d$  расчетной формулы (88), начиная с индекса 4 и выше, что позволяет получить

$$= \sqrt[4]{\frac{98,5}{2} \pm \frac{98,5^2 - 1445}{2 \cdot 98,5}} = 3,09; 1,65. \quad (89)$$

Соответственно для следующих приближений имеем (87)

$$\begin{aligned} Z_{1,2}(2 \cdot 4) = Z_{1,2}(8) &= \sqrt[4]{\frac{d_4}{2} \pm \frac{d_8^2 - d_{88}}{2d_4d_8}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{98,5}{2} \pm \frac{6812^2 - 1679523}{2 \cdot 98,5 \cdot 6812}} = 3,01; 1,998, \quad \mu = 2, \quad \nu = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z_{1,2}(4 \cdot 4) = Z_{1,2}(16) &= \sqrt[4]{\frac{d_4}{2} \pm \frac{d_{16}^2 - d_{16/16}}{2d_4d_8d_{16}}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{98,5}{2} \pm \frac{43051110^2 - 2821123 \cdot 10^6}{2 \cdot 98,5 \cdot 6812 \cdot 43051110}} \\ &= 3,00; 2,04, \quad \mu = 4, \quad \nu = 4, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} Z_{1,2}(8 \cdot 4) = Z_{1,2}(32) &= \sqrt[4]{\frac{d_4}{2} \pm \frac{d_{32}^2 - d_{32/32}}{2d_4d_8d_{16}d_{32}}} \\ &= 3,002; 2,04, \quad \mu = 8, \quad \nu = 4. \end{aligned}$$

Приближения могут быть посчитаны и для  $\nu = 8$  ( $\mu = 1, 2, 4$ ), и для  $\nu = 16$  ( $\mu = 1, 2$ ). Так по (78) имеем

$$\begin{aligned} Z_{1,2}(4 \cdot 8) &= Z_{1,2}(32) = \sqrt[8]{\frac{d_8}{2} \pm \frac{d_{32}^2 - d_{32/32}}{2d_8d_{16}d_{32}}} \\ &= 2,9998; 1,9993, \quad \mu = 4, \quad \nu = 8, \\ Z_{1,2}(2 \cdot 16) &= Z_{1,2}(32) = \sqrt[16]{\frac{d_{16}}{2} \pm \frac{d_{32}^2 - d_{32/32}}{2d_{16}d_{32}}} \\ &= 2,9997; 1,9995, \quad \mu = 2, \quad \nu = 16. \end{aligned} \quad (91)$$

Приближения для краевых значений  $\nu = 2?$ ;  $32?$  естественно, дают “завалы” результатов.

### 3.4. Подуравнение второй степени с комплексными корнями

Общее решение подуравнения с комплексными корнями, в свете вышеизложенного, может быть записано той же формулой (78), что и для подуравнения с действительными корнями

$$Z_{1,2}(\mu\nu) = \sqrt[\nu]{\frac{d_\nu}{2} \pm i \frac{d_{\mu\nu}^2 - d_{\mu\nu\mu\nu}}{2d_{1\nu} \cdot d_{2\nu} \cdot d_{4\nu} \dots d_{\mu\nu}}}. \quad (92)$$

Разница только в одном — около дополнения корня на  $\nu$ -й плоскости появился множитель — мнимая единица. Но это внешняя разница, по существу же здесь новый алгоритм построения и вычисления моментов.

**Пример 8.** Проведем дальнейшие рассуждения на примере второго подуравнения (83)

$$n_{\nu\nu}Z_\nu^2 - n_{\nu\nu\nu}Z_\nu + n_{\nu\nu\nu\nu} \quad (93)$$

уравнений (81), (79) четвертой степени. Общности такой подход не лишится, так как уравнение любой степени может быть разделено на элементарные подуравнения второй и первой степеней.

Переходим к предельно приближенному уравнению и записываем его в знакопеременной канонической и биномиальной формах

$$Z_\nu^2 - \frac{n_{\nu\nu\nu}}{n_{\nu\nu}}Z_\nu + \frac{n_{\nu\nu\nu\nu}}{n_{\nu\nu}} = Z_\nu^2 - 2a_{\nu 1}Z_\nu + a_{\nu 2} = 0 \quad (94)$$

Здесь, как это видно, имеют место равенства

$$\begin{aligned} 2a_{\nu 1} &= \frac{n_{\nu\nu\nu}}{n_{\nu\nu}}, \\ a_{\nu 2} &= \frac{n_{\nu\nu\nu\nu}}{n_{\nu\nu}}. \end{aligned} \quad (95)$$

Уравнение (94) содержит комплексные корни (пример 7), поэтому для его алгебраического решения строим ему противостоящее, контруравнение (68)

$$Z_\nu^2 - 2a_{\nu 1}Z_\nu + a_{\nu 2} = 2a_{-\nu 2} = 2(-a_{\nu 1}^2 + a_{\nu 2}), \quad (96)$$

которое, с учетом предыдущего (95), можно записать тоже в канонической форме

$$Z_\nu^2 - \frac{n_{\nu\nu\nu}}{n_{\nu\nu}} Z_\nu + \left( \frac{n_{\nu\nu\nu}^2}{2n_{\nu\nu}} - \frac{n_{\nu\nu\nu\nu}}{n_{\nu\nu}} \right) = Z_\nu^2 - d_\nu Z_\nu + d_{\nu\nu} = 0. \quad (97)$$

Строим общее решение контруравнения (97)

$$Z_{\nu 1,2} = \frac{n_{\nu\nu\nu}}{2n_{\nu\nu}} \pm \sqrt{\left( \frac{n_{\nu\nu\nu}}{2n_{\nu\nu}} \right)^2 - 2 \left( \frac{n_{\nu\nu\nu}}{2n_{\nu\nu}} \right)^2 \frac{n_{\nu\nu\nu\nu}}{n_{\nu\nu}}}. \quad (98)$$

Раскрывая моменты контруравнения (97)

$$\begin{aligned} n_{\nu\nu} &= (Z_1^\nu Z_2^\nu + \dots)_6^1 = Z_1^\nu Z_2^\nu, \\ n_{\nu\nu\nu} &= (Z_1^\nu Z_2^\nu Z_3^\nu + \dots)_4^1 = Z_1^\nu Z_2^\nu (Z_3^\nu + Z_4^\nu), \\ n_{\nu\nu\nu\nu} &= (Z_1^\nu Z_2^\nu Z_3^\nu Z_4^\nu + \dots)_1^1 = Z_1^\nu Z_2^\nu Z_3^\nu Z_4^\nu \end{aligned} \quad (99)$$

и отбрасывая пренебрежимо малые слагаемые, а также исходя из основной закономерности (5) распределения корней, можно получить, с учетом алгебраического выражения (50)–(53) дискриминанта, окончательную формулу для вычисления корней (98) контруравнения на  $\nu$ -й плоскости

$$\frac{Z_{\nu 3} + Z_{\nu 4}}{2} \pm \frac{Z_{\nu 3} - Z_{\nu 4}}{2} = \frac{d_\nu}{2} \pm \frac{d_{\mu\nu}^2 - d_{\mu\nu\nu}}{2d_{1\nu} \cdot d_{2\nu} \dots d_{\mu\nu}}. \quad (100)$$

Здесь через  $\nu$  обозначен порядок плоскости на которой задано уравнение (97). В формулах (50)–(53) — это плоскость первого порядка. А через  $\mu$  обозначена плоскость над  $\nu$ , через отображение на которую, заданное уравнение (97) решено в алгебраической форме (100), т.е. индекс  $\mu$  в формуле (100) выполняет роль индекса  $\nu$  в формулах (50)–(53).

Приведенные выкладки, помимо того, что показывают еще один способ построения принятой (92) для вычисления корней формулы, подтверждают (100), что анализируемое контруравнение (97) действительно содержит интересующие нас комплексные корни  $Z_3, Z_4$  заданного уравнения (79) четвертой степени.

В соответствии с заданием (97) исходные “единичные” (в рассматриваемом случае — это  $\nu$ -е) моменты подлежащего решению контруравнения (97) равны

$$\begin{aligned} d_\nu &= \frac{n_{\nu\nu\nu}}{n_{\nu\nu}}, \\ d_{\nu\nu} &= \frac{n_{\nu\nu\nu}^2}{2n_{\nu\nu}^2} - \frac{n_{\nu\nu\nu\nu}}{n_{\nu\nu}}. \end{aligned} \quad (101)$$

Отображаем контруравнение-оригинал (97), с целью его алгебраического решения, с плоскости  $\nu$ -го порядка на плоскость  $\mu\nu$ -го порядка функцией

$$Z_{\mu\nu} = Z_\nu^\mu. \quad (102)$$

Получаем уравнения-образы

$$Z_{\mu\nu}^2 - d_{\mu\nu} Z_{\mu\nu} + d_{\mu\nu\nu} = 0. \quad (103)$$

Моменты  $\mu\nu$ -го порядка образов отображений контруравнения на  $\mu$ -е плоскости относительно  $\nu$ -й соответственно равны [2], [3]

$$\begin{aligned} d_{\mu\nu} &= d_{(\mu/2)\nu}^2 - 2d_{(\mu/2)\nu(\mu/2)\nu}, \\ d_{\mu\nu\mu\nu} &= d_{(\mu/2)\nu(\mu/2)\nu}^2. \end{aligned} \quad (104)$$

Вычисляем и заносим в таблицу моменты (101), (104) образов контруравнения (97). В эту же таблицу заносим вычисленные приближения корней (100) на плоскостях  $\nu$ -го и первого порядков (92).

$\nu$	$\mu$	$d_{\mu\nu}$	$d_{\mu\nu\mu\nu}$	$Z_{\nu 1,2}$	$Z_{1,2}$
4	1	1,445	-0,005	$0,72 \pm i0,72$	$-0,195 \pm i1,02$
	2	2,098	0,000025	$0,72 \pm i0,73$	$-0,195 \pm i1,02$
	4	4,4	0	$0,72 \pm i0,73$	$-0,195 \pm i1,02$
	8	19,19	0	$0,72 \pm i0,72$	$-0,195 \pm i1,02$

(105)

Вычисление моментов начинается с выбора параметра отображения  $\nu$ . Осторожность, опыт и желание возможно быстрее получить результат, подсказывают, что для начала параметр отображения следовало бы приравнять четырем ( $\nu = 4$ ).

Вторым шагом вычисляются “единичные” моменты контруравнения. Моменты на плоскости задания контруравнения (101), на основе ранее приведенных (85) моментов заданного уравнения (79)

$$\begin{aligned} d_4 &= \frac{n_{444}}{n_{44}} = \frac{2088}{1445} = 1,445, \\ d_{44} &= \frac{n_{444}^2}{2n_{44}^2} - \frac{n_{4444}}{n_{44}} = \frac{1,445^2}{2} - \frac{1516}{1445} = -0,005 \end{aligned} \quad (106)$$

Моменты (104) каждого из последующих  $\mu$ -х отображений контруравнения строятся и вычисляются на основе моментов предыдущих [2] отображений (106): для  $\mu = 2$

$$\begin{aligned} d_{2.4} &= d_4^2 - 2d_{44} = 1,445^2 - 2(-0,005) = 2,098, \\ d_{2.4 2.4} &= d_{44} = (-0,005)^2 = 0,000025; \end{aligned}$$

для  $\mu = 4$

$$\begin{aligned} d_{4.4} &= d_{2.4}^2 - 2d_{2.4 2.4} = 2,098^2 - 0 = 4,4, \\ d_{4.4 4.4} &= d_{2.4 2.4}^2 = 0; \end{aligned}$$

для  $\mu = 8$

$$\begin{aligned} d_{8.4} &= d_{4.4}^2 - 2d_{4.4 4.4} = 19,19, \\ d_{8.4 8.4} &= d_{4.4 4.4}^2 = 0; \end{aligned} \quad (107)$$

Вычисляем корни контуравнения на плоскости 4-го порядка (100) в приближении  $\mu = 1, \nu = 4$

$$Z_{\nu 3,4}(1 \cdot 4) = \frac{1,445}{2} \pm \frac{1,445^2 - (-0,005)}{21,445} = 0,72 \pm 0,72;$$

в приближении  $\mu = 2, \nu = 4$  и т.д.

$$\begin{aligned} Z_{\nu 3,4}(2 \cdot 4) &= \frac{1,445}{2} \pm \frac{2,098^2 - 0,0}{2 \cdot 1,445 \cdot 2,098} = 0,72 \pm 0,73; \\ Z_{\nu 3,4}(4 \cdot 4) &= \frac{1,445}{2} \pm \frac{4,4^2 - 0,0}{2 \cdot 1,445 \cdot 2,098 \cdot 4,4} = 0,72 \pm 0,73; \\ Z_{\nu 3,4}(8 \cdot 4) &= \frac{1,445}{2} \pm \frac{19,19^2 - 0,0}{2 \cdot 1,445 \cdot 2,098 \cdot 4,4 \cdot 19,19} = 0,72 \pm 0,72. \end{aligned} \quad (108)$$

Основываясь на полученных результатах (108) принимаем корни решаемого подуравнения (97) на плоскости четвертого порядка равными

$$Z_{\nu 3,4} = 0,72 \pm i0,725. \quad (109)$$

Вычисление корней из полученных (102) комплексных чисел проводим по методике, изложенной в основной работе [1]. Для чего вычисляем моменты уравнения, которому принадлежат полученные (109) числа

$$\begin{aligned} d_4 &= Z_{\nu 3} + Z_{\nu 4} = 1,44, \\ d_{44} &= Z_{\nu 3} Z_{\nu 4} = 1,044, \end{aligned} \quad (110)$$

а затем и моменты оригинала этого уравнения

$$\begin{aligned} d_1^4 - 4 \sqrt[4]{d_{44}} d_1^2 + 2 \sqrt{d_{44}} - d_4 &= 0, \\ d_{11} &= \sqrt[4]{d_{44}} \end{aligned} \quad (111)$$

$$d_1 = \pm 0,39, \quad d_{11} = 1,01 \quad (112)$$

Решая уравнение оригинала с найденными моментами (112), находим численные значения корней заданного подуравнения (97) уравнения (79), на плоскости первого порядка

$$Z_{3,4}(4) = \pm 0,195 \pm i0,98 \approx \pm 0,2 \pm i \quad (113)$$

в 4-м приближении.

Итак, со всей очевидностью, можно утверждать, что общее предельное решение (92) для подуравнения с комплексными корнями состоялось.

**Пример 9.** Рассмотрим корни подуравнения примера 2, (18)–(21).

Численное вычисление корней заданного уравнения (18) в предыдущем случае, основано на решении подуравнения (20.1) на  $\nu$ -й плоскости через отождествление его с уравнением второй степени

$$Z_\nu^2 - p_\nu Z_\nu + p_{\nu\nu} = Z_\nu^2 - d_\nu Z_\nu + d_{\nu\nu} = 0 \quad (114)$$

Так в восьмом ( $\nu = 8$ ) приближении моменты расчетного уравнения (114) равны

$$\begin{aligned} d_8 &= p_8 = 12,410567 \cdot 10^6, \\ d_{88} &= p_{88} = 39,063596 \cdot 10^{12}. \end{aligned} \quad (115)$$

Далее, задача та же самая, что и в предыдущем случае. Требуется извлечь корни восьмой степени из сопряженных комплексных чисел, являющихся корнями уравнения (114), (115).

Рассматривая уравнение (114), (115) как образ стандартного отображения на плоскость восьмого порядка некоторого оригинала

$$Z_1^2 - d_1 Z_1 + d_{11} = 0 \quad (116)$$

вычисляем последовательно, используя общие формулы [1] связи моментов

$$\begin{aligned} d_{2\nu} &= d_\nu^2 - 2d_{\nu\nu} \\ d_{2\nu 2\nu} &= d_{\nu\nu}^2 \end{aligned} \quad (117)$$

Моменты образов на плоскости 4, 2 и 1-го порядков (115), (117) и заносим их в таблицу

$\nu$	$d_\nu$	$d_{\nu\nu}$
8	$12,4 \cdot 10^6$	$39 \cdot 10^{12}$
4	-4991	$6250 \cdot 10^3$
2	3	2500
1	$\pm 10,1$	50

(118)

Выбор знаков около вычисляемых моментов определяется, прежде всего, знаком дискриминанта

$$a_{0\nu 2} = -\left(\frac{d_\nu}{2}\right) + d_{\nu\nu} \quad (119)$$

корней уравнения-образа.

Так, в рассматриваемом случае (118) уравнений-образов с комплексно сопряженными корнями, все свободные моменты  $d_{\nu\nu}$  должны иметь положительный знак, так как только в этом случае корни уравнений-образов могут быть комплексными. Кстати, положительности свободного момента  $d_{\nu\nu}$  соответствует то, что он является квадратом модуля комплексно сопряженных корней уравнений-образов.

Знак первого момента  $d_\nu$  уравнения-образа, в общем случае определяется или графически, или предельно, как это описано в предыдущих разделах работы.

Подставив вычисленные значения единичных моментов в уравнение-оригинал (116) находим (в восьмом приближении) комплексные корни заданного (18) уравнения

$$\begin{aligned} Z^2 \pm 10,1Z + 50 &= 0, \\ Z_{1,2} &= \pm 5,05 \pm i4,95 \approx 5 \pm i5. \end{aligned} \quad (120)$$

Для построения общего предельного решения заданного уравнения (18), в части комплексных корней, в соответствии с изложенным выше, составляем контруравнение подуравнению (20.1)

$$Z_\nu^2 - p_\nu Z_\nu + p_{\nu\nu} = 2a_{0\nu 2} = 2 \left[ - \left( \frac{p_\nu}{2} \right)^2 + p_{\nu\nu} \right] \quad (121)$$

$$Z_\nu^2 - p_\nu Z_\nu + \left( \frac{p_\nu^2}{2} - p_{\nu\nu} \right) = Z_\nu^2 - d_\nu Z_\nu + d_{\nu\nu} = 0.$$

Решаем его алгебраически (как уравнение с действительными корнями) на  $\nu$ -й плоскости (через  $\mu$ -ое отображение над  $\nu$ -й плоскостью) и извлекаем корень  $\nu$ -й степени из репродуцированных комплексных корней подуравнения (20.1) (92)

$$Z_{1,2}(\mu\nu) = \sqrt[\nu]{\frac{d_\nu}{2} \pm i \frac{d_{\mu\nu}^2 - d_{\mu\nu\mu\nu}}{2d_{1\nu} \cdot d_{2\nu} \cdot d_{4\nu} \dots d_{\mu\nu}}}. \quad (122)$$

Напомним еще, что  $\mu$ -е отображения контруравнения над  $\nu$ -й плоскостью осуществляются как непосредственное продолжение  $\nu$ -х отображений на плоскости все тех же, кратных степени двойки порядков. Числа эти оказались удобными при построении моментов образов, входящих в конечную формулу (122) решения уравнений. Удобно вычислять и корень степени двойки, входящий в эту (122) формулу.

## Вычисление корней из действительных чисел

Метод вычисления корней из действительных чисел аналогичен методу вычисления корней из комплексных чисел.

Число  $(Z_{\mu\nu})$ , из которого требуется извлечь корень  $\nu$ -й степени рассматривается как точка на плоскости  $\nu$ -го порядка. К заданному числу подключается парное число  $Z_{\nu 2}$ , а вместе они рассматриваются как корни уравнения второй степени

$$Z_{\nu}^2 - d_{\nu}Z_{\nu} + d_{\nu\nu} = 0 \quad (1)$$

на плоскости  $\nu$ -го порядка.

Построенное уравнение (1) представляем себе как образ уравнения-оригинала

$$Z_1^2 - d_1Z_1 + d_{11} = 0 \quad (2)$$

плоскости первого порядка, отображенного стандартной функцией

$$Z_{\nu} = Z_1^{\nu}, \quad (3)$$

при этом связь соответствующих моментов уравнений, согласно таблицам [1], [3] в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} d_{\nu\nu} &= d_{11}^{\nu}, \\ d_{\nu} &= d_1^{\nu} + \alpha_1 d_{11} d_1^{\nu-2} + \alpha_2 d_{11}^2 d_1^{\nu-4} + \alpha_3 d_{11}^3 d_1^{\nu-6} + \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

где моменты уравнения-образа известные функции заданных чисел

$$\begin{aligned} d_{\nu} &= Z_{\nu 1} + Z_{\nu 2}, \\ d_{\nu\nu} &= Z_{\nu 1} Z_{\nu 2}, \end{aligned} \quad (5)$$

а  $\alpha$  — известный числовой коэффициент.

Остается найти единичные моменты из системы уравнений (4) связи, а далее и искомые корни уравнения-оригинала (2). Трудность в том, что второй единичный момент определяется как корень  $\nu$ -й степени из соответствующего, известного момента уравнения-образа

$$d_{11} = \sqrt[\nu]{d_{\nu\nu}} = \sqrt[\nu]{Z_{\nu 1} Z_{\nu 2}}, \quad (6)$$

Однако парный  $(Z_{\nu 2})$  заданному  $(Z_{\nu 1})$  корень в определяющем выражении (6) произволен и может быть выбран, в частности, так, чтобы корень (6) извлекался всегда и тривиально.

Принимаем парный  $(Z_{\nu 2})$  корень равным обратной величине заданного корня, т.е. полагаем

$$Z_{\nu 1} Z_{\nu 2} = 1 \quad (7)$$

Проблема снимается. Второй единичный момент уравнения-оригинала (2) принимает постоянное значение

$$d_{11} = 1, \quad (8)$$

не зависящее ни от величины заданного действительного числа  $Z_{\nu 1}$ , ни от степени ( $\nu$ ), извлекаемого из него корня.

Уравнение, определяющее первый коэффициент оригинала (2) также принимает упрощенную форму

$$d_1^\nu + \alpha_1 d_1^{\nu-2} + \alpha_2 d_1^{\nu-4} + \dots + \alpha_\nu = 0 \quad (9)$$

**Пример 1.** Пусть требуется извлечь корень третьей степени из числа  $Z_{31} = 8$ .

Число, парное заданному равно

$$Z_{32} = \frac{1}{Z_{31}} = 0,125. \quad (10)$$

Уравнение-образ, корнями которого является пара чисел  $Z_{31}$  и  $Z_{32}$  имеет вид

$$Z_3^2 - d_3 Z_3 + d_{33} = Z_3^2 - (Z_{31} + Z_{32})Z_3 + Z_{31}Z_{32} = Z_3^2 - 8,125Z_3 + 1 = 0 \quad (11)$$

и расположено, как мы полагаем, на плоскости третьего порядка  $Z_3$ .

Уравнение-оригинал образа (11) имеет вид

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = Z^2 - (Z_1 + Z_2)Z + Z_1 Z_2 = 0 \quad (12)$$

и расположено на плоскости первого порядка  $Z$ .

Уравнение-образ (11) получено в результате отображения оригинала (12) стандартной функцией

$$Z_3 = Z^3, \quad (13)$$

следствием чего является наличие уравнений связи между моментами образа и оригинала [3]

$$\begin{aligned} d_3 &= d_1^3 - 3d_1 d_{11}, \\ d_{33} &= d_{11}^3, \end{aligned} \quad (14)$$

В силу определения моментов уравнения-образа (10), (11), вычисляем момент второго порядка уравнения-оригинала

$$d_{11} = \sqrt[3]{d_{33}} = 1 \quad (15)$$

и строим уравнение для вычисления момент первого порядка

$$d_1^3 - 3d_1 - 8,125 = d_1^3 - 0 \cdot d_1^2 + (-3)d_1 - 8,125 = 0. \quad (16)$$

Вычисляем и сводим в таблицу моменты отображений полученного уравнения (16)

$\nu$	$m_\nu$	$m_{\nu\nu}$	$m_{\nu\nu\nu}$	$d_1(\nu)$
1	0	-3	8,125	$\sqrt{3}$
2	6	9	66	2,4
4	18	711	4358	2,06
8	1746	348633	18992711	2,54
16	2351250	$55222 \cdot 10^6$	$360,7 \cdot 10^{12}$	2,5000

(17)

Вычисление моментов производилось по формулам [3]

$$\begin{aligned} m_{2\nu} &= m_\nu^2 - 2m_{\nu\nu}, \\ m_{2\nu 2\nu} &= m_{\nu\nu}^2 - 2m_\nu m_{\nu\nu}, \\ m_{2\nu 2\nu 2\nu} &= m_{\nu\nu\nu}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Наличие отрицательных моментов второго порядка говорит о том, что второй и третий корни уравнения (16) комплексны. Первое значение искомого момента действительно

$$d_{11} = 2,5. \quad (19)$$

Подставляем найденные значения моментов (15), (19) в уравнение-оригинал (12)

$$Z^2 - 2,5Z + 1 = 0 \quad (20)$$

и вычисляем его корни

$$Z_1 = 2, \quad Z_2 = 0,5 \quad (21)$$

которые и являются корнями третьей степени из заданной пары чисел  $Z_{31}$  и  $Z_{32}$ .

**Пример 2.** Требуется извлечь корень пятой степени из числа  $Z_{51} = 32$  и ему обратного  $Z_{51} = \frac{1}{32}$ .

Как и в предыдущем примере, полагаем, что заданная пара чисел является корнями уравнения-образа на плоскости пятого порядка

$$Z_5^2 - d_5 Z_5 + d_{55} = Z_5^2 - (Z_{51} + Z_{52})Z_5 + Z_{51}Z_{52} = Z_5^2 - 32,03125Z_5 + 1 = 0 \quad (22)$$

Образ построен стандартным отображением, функцией

$$Z_5 = Z^5, \quad (23)$$

а оригиналом является уравнение

$$Z^2 - d_1 Z + d_{11} = 0 \quad (24)$$

Из таблиц [3] выписываем систему уравнений связи моментов образа и оригинала (22), (24)

$$\begin{aligned} d_5 &= d_1^5 - 5d_{11}d_1^3 + d_{11}^2d_1, \\ d_{55} &= d_{11}^5. \end{aligned} \quad (25)$$

Вычисляем второй момент оригинала (22), (25)

$$d_{11} = \sqrt[5]{Z_{55}} = 1 \quad (26)$$

и строим уравнение для определения момента первого порядка

$$d_1^5 - 5d_1^3 + 5d_1 - 32,03125 = d_1^5 - 0 \cdot d_1^4 + (-5)d_1^3 - 0 \cdot d_1^2 + 5d_1 - 32,03125 = 0 \quad (27)$$

Вычисляем моменты отображения и корни полученного уравнения (27) и заносим их в таблицу

$\nu$	$p_\nu$	$p_{\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu\nu}$	$p_{\nu\nu\nu\nu\nu}$	$d_1(\nu)$
1	0	-5	0	5	32,03125	-
2	10	35	50	25	1024	3,2
4	30	275	21230	-101775	1048576	2,9
8	350	$-1,4 \cdot 10^6$	$569,6 \cdot 10^6$	$-34164 \cdot 10^6$	$1,0995 \cdot 10^{12}$	2,64
16	$2,9 \cdot 10^6$	$1,5 \cdot 10^6$	-	-	-	2,54
32	$5,565 \cdot 10^{12}$	-	-	-	-	2,50

(28)

Моменты вычислялись по формулам [3]

$$\begin{aligned}
 p_{2\nu} &= p_\nu^2 - 2p_{\nu\nu}, \\
 p_{2\nu\ 2\nu} &= p_{\nu\nu}^2 - 2p_\nu p_{\nu\nu\nu} + 2p_{\nu\nu\nu\nu}, \\
 p_{2\nu\ 2\nu\ 2\nu} &= p_{\nu\nu\nu}^2 - 2p_{\nu\nu} p_{\nu\nu\nu\nu} + 2p_\nu p_{\nu\nu\nu\nu\nu}, \\
 p_{2\nu\ 2\nu\ 2\nu\ 2\nu} &= p_{\nu\nu\nu\nu}^2 - 2p_{\nu\nu\nu} p_{\nu\nu\nu\nu\nu}, \\
 p_{2\nu\ 2\nu\ 2\nu\ 2\nu\ 2\nu} &= p_{\nu\nu\nu\nu\nu}^2.
 \end{aligned}
 \tag{29}$$

Анализ моментов показывает, что две пары младших корней уравнения (27) комплексны. Старший — действителен и принимается в качестве первого момента уравнения-оригинала (24)

$$Z^2 - 2,5Z + 1 = 0. \tag{30}$$

Два корня уравнения-оригинала

$$Z_1 = 2, \quad Z_2 = 0,5 \tag{31}$$

представляют собой корни из заданного и ему обратного чисел  $Z_{51}$  и  $Z_{52}$ .

Вычисление корней черных степеней следует производить в два этапа. Сначала извлекается квадратный корень, пока не останется нечетная степень, а затем извлекать корень нечетной степени.

## Список литературы

- [1] **Кочагин И. Ф.** Симметричные алгебраические моменты. 2003.  
<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>
- [2] **Кочагин И. Ф.** Отображение алгебраических функций. 2003.  
<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>
- [3] **Кочагин И. Ф.** Решение алгебраических уравнений высоких степеней.  
2002. <http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>
- [4] **Кочагин И. Ф.** Анализ и синтез математических моделей физических устройств и процессов. 2004.  
<http://www.bezopasnost.ru/knowhow/articles/uravn/index.html>

115191, г. Москва, ул. 3 - я Рощинская, д. 6, ЗАО “Компания Безопасность”  
E-mail: [office@bezopasnost.ru](mailto:office@bezopasnost.ru)  
Корчагину Игорю Федоровичу